Esame del 6 Febbraio 2006.

SI RISOLVA IL MAGGIOR NUMERO DI ESERCIZI

(non occorre risolverli tutti per avere il voto massimo)

Esercizio 1 Si consideri la Figura 1 dove il sistema lineare incerto ha funzione di trasferimento

$$G_{\text{in}}(s) = \frac{1+\delta}{s-2+\delta}\,, \qquad \delta \in \mathbb{R}\,,\ |\delta| \le \frac{1}{2}\,.$$

1.1) Determinare tutti i controllori lineari statici che stabilizzano robustamente il sistema.
1.2) Si denoti con $F_{\text{in}}(s)$ la funzione di trasferimento da v a y. Tra i controllori determinati al punto 1.1), individuare quelli che garantiscono $\|F_{\text{in}}\|_\infty < 1$ per qualunque perturbazione $\delta \in \mathbb{R}$ con $|\delta| \le \frac{1}{2}$.

Esercizio 2 Si consideri la Figura 2 dove

$$G(s) = \frac{1}{s-2}$$

2.1) Determinare un controllore lineare statico che stabilizzi il sistema e tale che la funzione di trasferimento $F(s)$ da v a y è tale che $\|F\|_\infty = \frac{1}{2}$.
2.2) Calcolare la γ–entropia della F così ottenuta e, sapendo che si tratta di una funzione decrescente, tracciarne il grafico al variare di γ.
2.3) Calcolare $\|F\|_2$.

Esercizio 3 Si consideri ancora la Figura 2 dove

$$G(s) = \frac{1}{s-2}$$

Determinare un controllore $C(s) \in \mathcal{H}_\infty$ stabilizzante tale che il polinomio caratteristico in anello chiuso sia $\Delta(s) = (s+1)(s+2)$ e $\|F\|_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Esercizio 4 Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x - 3u + w \\ z &= x + u \end{aligned}$$

Si ricavi K stabilizzante per cui $u = Kx$ minimizza la norma H_2 tra w e z.

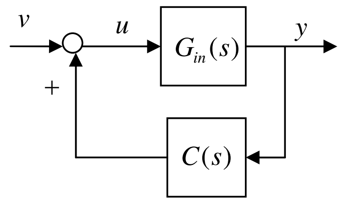

Figure 1:

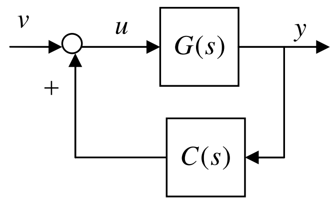

Figure 2:

Esercizio 5 Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x - 3u \\ y &= x \\ x(0) &= 0 \end{aligned}$$

Si determini il valore massimo della norma di picco di $y(t)$ rispetto agli ingressi integrabili a quadrato di norma unitaria.

Esercizio 6 Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bw \\ y &= Cx + Dw \\ \xi &= Cx \end{aligned}$$

con A Hurwitz, $D'D = I$, $BD' = 0$, w, ξ e y scalari.
5.1 Si scrivano le equazioni del filtro di Kalman.
5.2 Si dimostri che la funzione di trasferimento da w all'errore di filtraggio ha norma infinita non superiore a 2.

Soluzione

1.1) Supponiamo di chiudere l'anello con un controllore statico $k \in \mathbb{R}$ posto in retroazione positiva. Il polinomio caratteristico in anello chiuso è

$$\Delta(s) = s - 2 + \delta - k(1+\delta)\,.$$

I controllori cercati sono individuati dai valori di k tali che, $\forall\, \delta \in \mathbb{R}$ con $|\delta| \leq \frac{1}{2}$, il polinomio $\Delta(s)$ è hurwitz, cioè

$$k \quad \text{tale che} \quad \forall\, \delta \in \mathbb{R} \;\text{ con }\; |\delta| \leq \frac{1}{2} \quad \text{si abbia} \quad -2 + \delta - k(1+\delta) > 0\,,$$

ossia

$$k < \frac{-2+\delta}{1+\delta} \qquad \forall\, \delta \in \mathbb{R} \;\text{ con }\; |\delta| \leq \frac{1}{2}\,.$$

La funzione

$$\begin{array}{rcl} \varphi \,:\, [-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ \delta & \mapsto & \frac{-2+\delta}{1+\delta} \end{array}$$

assume il minimo per $\delta = -\frac{1}{2}$ ed è $\varphi(-\frac{1}{2}) = -5$, da cui le retroazioni cercate sono

$$k \in \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad k < -5\,.$$

1.2) $F_{\text{in}}(s) = \frac{G_{\text{in}}(s)}{1-G_{\text{in}}(s)k} = \frac{1+\delta}{\Delta(s)} = \frac{1+\delta}{s-2+\delta-k(1+\delta)}$, dunque

$$\begin{aligned} \|F_{\text{in}}\|_\infty &= \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \sqrt{F_{\text{in}}(j\omega)\cdot F_{\text{in}}(-j\omega)} = \\ &= \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \sqrt{\frac{(1+\delta)^2}{\big(-2+\delta-k(1+\delta)\big)^2+\omega^2}} = \\ &= \frac{1+\delta}{|-2+\delta-k(1+\delta)|}\,. \end{aligned}$$

Si noti che per $k < -5$ e $\forall\, \delta \in \mathbb{R}$ con $|\delta| \leq \frac{1}{2}$, $|-2+\delta-k(1+\delta)| = -2+\delta-k(1+\delta)$, quindi, al variare dei guadagni k tra quelli che garantiscono la stabilità robusta, si ha che

$$\|F_{\text{in}}\|_\infty = \frac{1+\delta}{-2+\delta-k(1+\delta)}\,.$$

Assumendo che $k < -5$ e imponendo che $\forall\, \delta \in \mathbb{R}$ con $|\delta| \leq \frac{1}{2}$, $\|F_{\text{in}}\|_\infty < 1$ si ha

$$\begin{array}{l} \frac{1+\delta}{-2+\delta-k(1+\delta)} < 1 \quad \forall\, \delta \in \mathbb{R} \;\text{ con }\; |\delta| \leq \frac{1}{2} \iff \\ 1+\delta < -2+\delta-k(1+\delta) \quad \forall\, \delta \in \mathbb{R} \;\text{ con }\; |\delta| \leq \frac{1}{2} \iff \\ k < -\frac{3}{1+\delta} \quad \forall\, \delta \in \mathbb{R} \;\text{ con }\; |\delta| \leq \frac{1}{2} \end{array}$$

da cui si deduce che le retroazioni cercate sono

$$k \in \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad k < -6\,.$$

2.1) Poiché $\Delta(s) = s - 2 - k$, dunque i guadagni stabilizzanti sono i $k \in \mathbb{R}$ tali che $k < -2$. Inoltre, $\|F\|_\infty = \frac{1}{|-2-k|}$: assumendo $k < -2$ e imponendo che $\|F\|_\infty = \frac{1}{2}$ si ottiene

$$k = -4\,.$$

2.1) In corrispondenza di $k=-4$ si ha

$$F(s)=\frac{1}{s+2}$$

che è realizzata dal sistema $(a,b,c)=(-2,1,1)$. Calcoliamo la γ–entropia di F al variare di $\gamma>\|F\|_\infty=\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} I_\gamma(F)=\mathrm{tr}(b'pb) \\ p \ \text{ tale che } \begin{cases} a'p+pa+\frac{1}{\gamma^2}pbb'p+c'c=0 \\ a+\frac{1}{\gamma^2}bb'p \quad \text{hurwitz,} \end{cases} \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} I_\gamma(F)=p \\ p \ \text{ tale che } \begin{cases} -4p+\frac{1}{\gamma^2}p^2+1=0 \\ -2+\frac{1}{\gamma^2}p \quad \text{hurwitz}\,. \end{cases} \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione di Riccati sono $p=\gamma^2\Big(2\pm\frac{\sqrt{4\gamma^2-1}}{\gamma}\Big)$, da cui

$$\begin{cases} I_\gamma(F)=\gamma^2\Big(2-\frac{\sqrt{4\gamma^2-1}}{\gamma}\Big) \\ \gamma>\frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Per tracciare il grafico di $I_\gamma(F)$ è sufficiente calcolare i due limiti

$$\lim_{\gamma\to\frac{1}{2}^+} I_\gamma(F)=\frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{\gamma\to+\infty} I_\gamma(F)=\frac{1}{4}\,.$$

2.3) Come noto, $\lim_{\gamma\to+\infty} I_\gamma(F)=\|F\|_2^2=\frac{1}{4}$, dunque $\|F\|_2=\frac{1}{2}$. Oppure,

$$\begin{cases} \|F\|_2^2=\mathrm{tr}(b'pb) \\ p \ \text{ tale che } \ a'p+pa+c'c=0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} \|F\|_2^2=p \\ p \ \text{ tale che } \ -4p+1=0 \end{cases}$$

da cui si ritrova $\|F\|_2=\frac{1}{2}$.

3) Consideriamo la fattorizzazione

$$G(s)=\frac{N(s)}{M(s)} \quad \text{con} \quad N(s)=\frac{1}{s+1}\,,\ M(s)=\frac{s-2}{s+1}\ :$$

con tale scelta di M ed N garantiamo che uno dei poli in anello chiuso sia in -1. La funzione $N(s)$ ha un solo zero in $s=\infty$: dobbiamo dunque cercare una $U\in\mathcal{H}_\infty$ tale che $U^{-1}\in\mathcal{H}_\infty$ e $M-U$ abbia uno zero per $s=\infty$. Scegliendo $U(s)$ della forma

$$U(s)=\frac{s+2}{\alpha s+\beta}$$

garantiamo che l'altro polo in anello chiuso sia in -2. Essendo

$$M(s) - U(s) = \frac{(\alpha-1)s^2 + (\beta - 2\alpha - 3)s - 2\beta - 2}{(s+1)(\alpha s + \beta)},$$

affinché $M - U$ abbia uno zero per $s = \infty$ deve essere $\alpha = 1$. Conseguentemente, affinché $U^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$, dovrà essere

$$\beta > 0.$$

Abbiamo quindi

$$M(s) - U(s) = \frac{(\beta-5)s - 2\beta - 2}{(s+1)(s+\beta)}$$

e

$$C(s) = \frac{M(s) - U(s)}{N(s)} = \frac{(\beta-5)s - 2\beta - 2}{s+\beta}.$$

Dunque,

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)C(s)} = \frac{s+\beta}{(s+1)(s+2)}.$$

Calcoliamo $\|F\|_2$ al variare di $\beta > 0$ e cerchiamo β tale che $\|F\|_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Sia

$$\hat{F}(s) := \frac{s+\beta}{(s+1)(s-2)}\ :$$

è immediato vedere che $\|\hat{F}\|_2 = \|F\|_2$. D'altra parte

$$\hat{F}(s) = \hat{F}_{\mathrm{st}}(s) + \hat{F}_{\mathrm{as}}(s), \quad \text{dove} \quad \hat{F}_{\mathrm{st}}(s) = \frac{(1-\beta)/3}{s+1} \quad \text{e} \quad \hat{F}_{\mathrm{as}}(s) = \frac{(\beta+2)/3}{s-2}.$$

Poiché $\hat{F}_{\mathrm{st}} \perp \hat{F}_{\mathrm{as}}$, dal Teorema di Pitagora si ha $\|\hat{F}\|_2^2 = \|\hat{F}_{\mathrm{st}}\|_2^2 + \|\hat{F}_{\mathrm{as}}\|_2^2$. Calcoliamo $\|\hat{F}_{\mathrm{st}}\|_2^2$: una realizzazione di $\hat{F}_{\mathrm{st}}$ è data dal sistema $(a,b,c) = (-1, \frac{1-\beta}{3}, 1)$. Sappiamo che

$$\begin{cases} \|\hat{F}_{\mathrm{st}}\|_2^2 = \mathrm{tr}(b'pb) \\ p \ \text{ tale che } \ a'p + pa + c'c = 0, \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} \|\hat{F}_{\mathrm{st}}\|_2^2 = p\frac{(1-\beta)^2}{9} \\ p \ \text{ tale che } \ -2p + 1 = 0 \end{cases}$$

da cui si trova $\|\hat{F}_{\mathrm{st}}\|_2^2 = \frac{(1-\beta)^2}{18}$.
Posto $\hat{F}_{\mathrm{as}}^{\sim}(s) := \hat{F}_{\mathrm{as}}(-s) = -\frac{(\beta+2)/3}{s+2}$, si ha $\|\hat{F}_{\mathrm{as}}\|_2 = \|\hat{F}_{\mathrm{as}}^{\sim}\|_2$ e quest'ultima si calcola con lo stesso procedimento visto sopra. Facendo il conto si trova $\|\hat{F}_{\mathrm{as}}\|_2^2 = \frac{(\beta+2)^2}{36}$. Abbiamo dunque

$$\|F\|_2^2 = \frac{(1-\beta)^2}{18} + \frac{(\beta+2)^2}{36} = \frac{\beta^2+2}{12}.$$

Infine, imponendo che $\|F\|_2^2 = \frac{3}{2}$, si ottiene $\beta = 4$. Il controllore cercato è quindi

$$C(s) = -\frac{s+10}{s+4}.$$

4) La funzione di trasferimento è

$$T_{zw}(s) = -\frac{1+K}{s-2+3K}\,.$$

la cui norma H_2 è ben definita per $K > 2/3$ e risulta

$$\|T_{zw}\|_2^2 = \frac{(1+K)^2}{6K-4}$$

Il minimo di questa funzione si ha per $K = 7/3$ e la norma minima $\sqrt{10/9}$.

5) Il valore massimo della norma di picco al quadrato è data da P che risolve l'equazione di Lyapunov $-4P + 9 = 0$. Quindi il valore cercato $3/2$.

6.1)

$$\begin{aligned}
\hat{x}(t) &= A\hat{x}(t) + L(C\hat{x}(t) - y(t)) \\
\hat{\xi}(t) &= C\hat{x}(t)
\end{aligned}$$

dove $L = -SC'$ e P è l'unica soluzione semidefinita positiva e stabilizzante dell'equazione di Riccati $AS + SA' - SC'CS + BB' = 0$.

6.1) In questo caso il filtro ottimo è dato da

$$F_{ott}(s) = I - T(s)^{-1}$$

dove $T(s)$ è il fattore spettrale canonico di $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. Indicando con $T_{\hat{\xi}-\xi,w}(s)$ la funzione di trasferimento da w a $\hat{\xi} - \xi$, risulta

$$T_{\hat{\xi}-\xi,w}(s)T^{\sim}_{\hat{\xi}-\xi,w}(s) = 2I - T(s)^{-1} - T^{\sim}(s)^{-1}$$

Poiché

$$T^{\sim}(s)^{-1}T^{-1}(s) = (I + H(s)H^{\sim}(s))^{-1}$$

dove $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$, si ha che $\|T(s)^{-1}\|_\infty < 1$ e quindi $\|T_{\hat{\xi}-\xi,w}\|_\infty^2 < 4$.