Fondamenti di Automatica

Allievi in Ingegneria Elettrica - Prof. P. Colaneri

Seconda prova in itinere del 12 Settembre 2012

Cognome ____________________________________

Nome _______________________________________

N° di Matricola ______________________________

____

Firma

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni.
Questo fascicolo contiene 5 esercizi.

Si prega di non allegare alcun foglio.

ESERCIZIO 1

$$\dot{x}_1 = \log(x_2) - x_1^{\,2} + 9u^2$$
$$\dot{x}_2 = x_1^{\,2} - 8x_2 - u^3$$
$$y = x_1^{\,2} + x_2^{\,2}$$

1.1 Si trovino gli stati di equilibrio corrispondente all'ingresso costante u=1.
1.2 Si studi la stabilità degli stati di equilibrio
1.3 Si scrivano le funzioni di trasferimento dei modelli linearizzati intorno a tali stati di equilibrio

SOLUZIONE

$$\begin{aligned} 0 &= \log(\bar{x}_2) - \bar{x}_1^{\,2} + 9 \\ 0 &= \bar{x}_1^{\,2} - 8\bar{x}_2 - 1 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

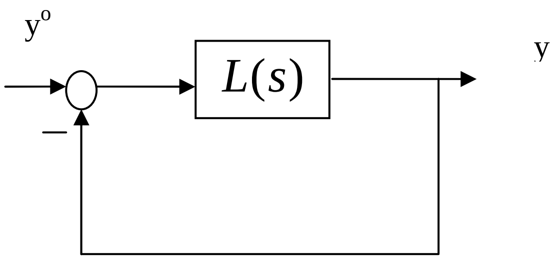
$$\begin{aligned} \delta\dot{x}_1 &= -2\bar{x}_1\delta x_1 + \frac{1}{\bar{x}_2}\delta x_2 + 18\bar{u}\,\delta u \\ \delta\dot{x}_2 &= 2\bar{x}_1\delta x_1 - 8\delta x_2 - 3\bar{u}^2\delta u \\ \delta y &= 2\bar{x}_1\delta x_1 + 2\bar{x}_2\delta x_2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \delta\dot{x} &= \begin{bmatrix} -2\bar{x}_1 & 1 \\ 2\bar{x}_1 & -8 \end{bmatrix}\delta x + \begin{bmatrix} 18 \\ -3 \end{bmatrix}\delta u \\ \delta y &= \begin{bmatrix} 2\bar{x}_1 & 2 \end{bmatrix}\delta x \end{aligned}$$

Lo stato $\bar{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ è asint. stabile e lo stato $\bar{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ è instabile.

$$G(s) = \frac{(36\bar{x}_1 - 6)s + 348\bar{x}_1}{s^2 + (2\bar{x}_1 + 8)s + 14\bar{x}_1} =$$

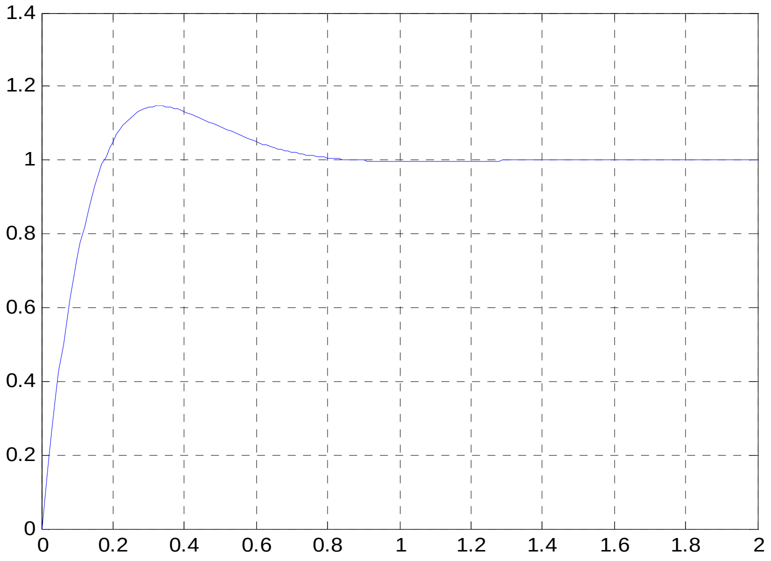
ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema retroazionato



dove $L(s) = \dfrac{\beta(s+5)}{(s+\alpha)(s+1)}$

e la risposta y(t) allo scalino unitario su $y^o(t)$ (la tangente nell'origine vale 10). Si ricavi L(s) cioè α, β).

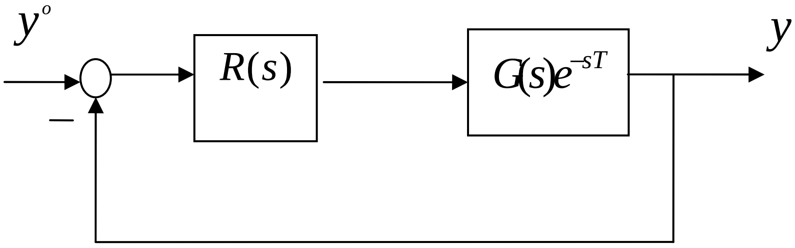


SOLUZIONE

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{\beta(s+5)}{s^2+(\alpha+1+\beta)s+\alpha+5\beta} \rightarrow F(s) = \frac{10(s+5)}{s^2+11s+50} \rightarrow L(s) = \frac{10(s+5)}{s(s+1)}$$

ESERCIZIO 3

Si faccia riferimento al sistema retroazionato in figura.



dove $G(s) = \frac{0.1s+1}{(10s+1)^2}$.

3.1 Si ponga T=0 e si determini un regolatore R(s) tale che:

$$|e(\infty)| \leq 0.002 \quad per \quad y^o(t) = ram(t)$$
$$\omega_c \geq 5 \; rad/\sec$$
$$\phi_m \geq 45^o$$

3.2 Si studi la stabilità del sistema di controllo così ottenuto in funzione di T>0.

SOLUZIONE

L'errore a transitorio esaurito con g=1 è 1/μ e quindi μ>500. Si può cancellare un polo in s=-0.1 e quindi

$R(s) = \mu \frac{10s+1}{s}$ col che $L(s) = \mu \frac{0.1s+1}{s(10s+1)}$. Con μ sufficientemente alto si soddisfano le specifiche. Ad esempio con μ=1000 si ha ω_c=15 e ϕ_m=55 gradi.

Lo sfasamento introdotto da T è di $-\omega_c T$=-15T rad e quindi si ha stabilità per T<55*π/(180*15)=0.064 sec.

Sono possibili altre soluzioni (ad esempio cancellando anche l'altro polo) che danno origine ad una banda passante più bassa a parità di margine di fase e quindi ad una maggiore robustezza della stabilità rispetto al ritardo T.

ESERCIZIO 4

Si consideri un sistema a tempo discreto del terzo ordine, con ingresso u(k) e uscita y(k), descritto dalle equazioni alle differenze

$$y(k) = -\alpha y(k-1) + 0.5y(k-2) + \alpha y(k-3) + u(k) + u(k-1)$$

4.1) Si ricavi la funzione di trasferimento (da u a y) del sistema

4.2) Si discuta la stabilità interna ed esterna del sistema in funzione del parametri α e β (si usi a tal scopo il metodi della trasformazione bilineare).

SOLUZIONE

$$G(z) = \frac{1+z^{-1}}{1+\alpha z^{-1} - 0.5z^{-2} - \alpha z^{-3}} = \frac{z^2(z+1)}{z^3 + \alpha z^2 - 0.5z - \alpha}$$

$z \rightarrow \dfrac{s+1}{1-s}$ $\quad (s+1)^3 + \alpha(s+1)^2(1-s) - 0.5(s+1)(1-s)^2 - \alpha(1-s)^3 = 0$

$$0.5s^3 + s^2(3.5-4\alpha) + s(3.5+4\alpha) + 0.5 = 0 \rightarrow s^3 + s^2(7-8\alpha) + s(7+8\alpha) + 1 = 0$$

1	$7+8\alpha$
$7-8\alpha$	1
$\dfrac{16(3-4\alpha^2)}{7-8\alpha}$	
1	

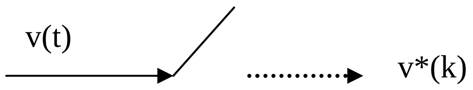
Quindi il sistema è asintoticamente stabile per $\alpha \in \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Il denominatore non si annulla per z=-1 per nessun valore di α. Si ha BIBO stabilità nello stesso intervallo.

ESERCIZIO 5

Si spieghi il funzionamento (nel dominio del tempo e nel dominio delle frequenze) di un campionatore ideale a cadenza uniforme.

SOLUZIONE



$$v^*(k) = v(kT)$$

$$V^*(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} V(j(\omega + k\Omega_c)), \quad \Omega_c = \frac{2\pi}{T}$$

Poi considerazioni sul Teorema di Shannon e il fenomeno dell'aliasing……