Fondamenti di Automatica

Allievi in Ingegneria Elettrica - Prof. P. Colaneri

Prima Prova 2011/2012 - 14 Novembre 2011

Cognome ____

Nome ____

N° di Matricola ___________________________________

____

Firma

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni.

Questo fascicolo contiene 4 esercizi numerici ed una domanda a scelta.

Si prega di non allegare alcun foglio.

Esercizio 1

Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t)x_2(t) - e^{x_1(t)}x_1(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + \left(e^{x_1(t)} - e^{x_2(t)}x_2(t)\right)u(t) - e^{x_2(t)} \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

dove $u(t) = \bar{u} = 1$ e tutte le variabili in gioco sono reali.

1.1) Si dica quanti stati di equilibrio ammette il sistema in corrispondenza di $u(t) = \bar{u} = 1$ e si determini uno stato di equilibrio $\bar{x}$.

1.2) Si linearizzi il sistema intorno all'equilibrio trovato e si dica se tale equilibrio è asintoticamente stabile o instabile.

1.3) Infine si calcoli la funzione di trasferimento del sistema linearizzato.

SOLUZIONE

Ci sono due stati di equilibrio, uno dei quali e' quello nullo, cioè $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$. Il sistema linearizzato risulta essere:

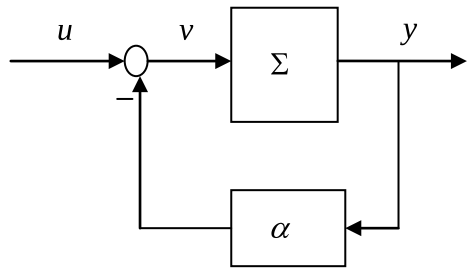
$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1(t) = -(e^{\bar{x}_1}\bar{x}_1 + e^{\bar{x}_1} + \bar{x}_2)\delta x_1 - \bar{x}_1\delta x_2(t) - e^{\bar{x}_1}\bar{x}_1\delta u(t) = -\delta x_1 \\ \delta\dot{x}_2(t) = (e^{\bar{x}_1} + 1)\delta x_1(t) - (e^{\bar{x}_2}\bar{x}_2 + 2e^{\bar{x}_2})\delta x_2 + \left(e^{\bar{x}_1} - e^{\bar{x}_2}x_2\right)\delta u(t) = 2\delta x_1 - 2\delta x_2 + \delta u \\ \delta y(t) = \delta x_1(t) + \delta x_2(t) \end{cases}$$

Il sistema linearizzato ha due autovalori, -1, -2 e quindi lo stato di equilibrio nullo e' asintoticamente stabile. La funzione di trasferimento del sistema linearizzato è

$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

Esercizio 2

Si consideri lo schema a blocchi seguente



dove Σ è descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} v(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

Si studi, in funzione di α, la stabilità asintotica del sistema retroazionato. Si studi infine la stabilità BIBO del sistema con ingresso u e uscita y, l'osservabilità da y e la raggiungibilità da u.

SOLUZIONE

Chiamata G(s) la funzione di trasferimento del sistema Σ, la funzione di trasferimento del sistema retroazionato è

$$\frac{G(s)}{1+\alpha G(s)} = \frac{-2-s+s^2}{s^3+(3+\alpha)s^2+(1-\alpha)s+2-2\alpha}$$

L'equazione caratteristica è: $s^3+(3+\alpha)s^2+(1-\alpha)s+2-2\alpha=0$. Tabella di Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{ll} 1 & (1-\alpha) \\ (3+\alpha) & 2-2\alpha \\ \dfrac{1-\alpha^2}{3+\alpha} & 0 \\ 2-2\alpha & \end{array}$$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se $\alpha \in (-1\,,1)$. Il sistema Σ e' osservabile per costruzione (forma canonica di osservabilità) ed e' anche raggiungibile. Non essendoci cancellazioni tra Σ e il sistema algebrico con funzione di trasferimento α, anche il sistema retroazionato da u a y sarà completamente osservabile e raggiungibile. Quindi è BIBO stabile se e solo se $\alpha \in (-1\,,1)$.

Esercizio 3

Si consideri un sistema, con ingresso u e uscita y, avente come funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1-10s}{(1+s)^2}$$

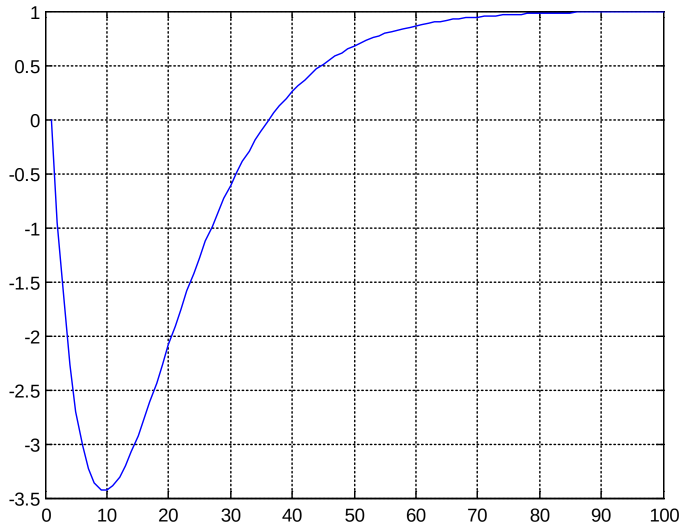
Si ricavi l'espressione analitica della risposta y(t) del sistema quando l'ingresso è u(t)=sca(t).

Si disegni un grafico (qualitativo) di tale risposta e si calcoli $\mu = \max_{t\geq 0}|y(t)|$.

SOLUZIONE

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{11}{(s+1)^2}$$

$$y(t) = 1 - e^{-t} - 11te^{-t}$$



Il punto di massimo modulo e' in t=10/11 e il massimo risulta essere circa 3.5.

Esercizio 5

Si consideri la risposta per t ≥ 0 allo scalino di un sistema (lineare, tempo invariante, a dimensione 3):

$$y(t) = -2 + te^{-t} + 2e^{-2t}$$

Si determino A,B,C,D per cui il sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

abbia come risposta forzata allo scalino quella indicata.

SOLUZIONE

$$Y(s) = \frac{-2}{s} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+2}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-3s^2 - 6s - 4}{(s+1)^2(s+2)}$$

Ad esempio una realizzazione e' la seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

Esercizio 6

Si dia una giustificazione (teorica) ad **almeno** una delle due seguenti affermazioni, che fanno riferimento ad un sistema lineare, invariante nel tempo e a dimensioni finite n descritto da

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

6.1 Il sistema è asintoticamente stabile *se e solo se* gli autovalori di A hanno parte reale strettamente negativa.

6.2 Il sistema è osservabile *se e solo* se $rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$

TRACCIA DIMOSTRAZIONE

Uno stato x è non osservabile se $Ce^{At}x = 0, \forall t \geq 0$.

Calcolando le derivate (funzioni analitiche) in t=0, cio' significa

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \\ \vdots \end{bmatrix} x = 0$$

Per il teorema di Cailey –Hamilton ci si può fermare alla potenza n-1 e quindi x e' non osservabile se e solo se

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x = 0$$

da cui segue l'affermazione.

6.3 Il sistema è asintoticamente stabile *se e solo se* la variazione di fase di $\det(jI - A)$ per ω che varia da zero all'infinito è ben definita e uguale a $\frac{\pi n}{2}$ in senso antiorario.