Fondamenti di Automatica

Allievi in Ingegneria Elettrica - Prof. P. Colaneri

Appello 08 Febbraio 2013

Cognome ______________________________________

Nome ____

N° di Matricola _________________________________

____

Firma

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni.

Questo fascicolo contiene 5 esercizi numerici ed una domanda.

Si prega di non allegare alcun foglio.

Esercizio 1

Si faccia riferimento al sistema con ingresso u(t) e uscita y(t) descritto da:

$$\dot{x}_1 = -\sin(x_1)\cos(x_2) + u$$
$$\dot{x}_2 = -\cos(x_1)\sin(x_2) + u$$
$$y = \sin(x_1) + \cos(x_2)$$

1.1 Si ricavino gli stati di equilibrio corrispondenti all'ingresso $u = 0$

1.2 Si scrivano i sistema linearizzati intorno a tali equilibri e le relativa funzioni di trasferimento.

1.3 Si studi la stabilità degli equilibri e la stabilità interna ed esterna dei sistemi linearizzati

SOLUZIONE

$\bar{x} = \begin{bmatrix} 2k\pi \\ 2k\pi \end{bmatrix},\ k = 0, \pm 1, \ldots$ $\quad \begin{aligned} \delta\dot{x}_1 &= -\delta x_1 + \delta u \\ \delta\dot{x}_2 &= -\delta x_2 + \delta u \\ \delta y &= \delta x_1 \end{aligned}$ $\quad G(s) = \dfrac{1}{s+1}$ As. stab., BIBO stab.

$\bar{x} = \begin{bmatrix} 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{bmatrix},\ k = 0, \pm 1, \ldots$ $\quad \begin{aligned} \delta\dot{x}_1 &= \delta x_1 + \delta u \\ \delta\dot{x}_2 &= \delta x_2 + \delta u \\ \delta y &= \delta x_1 \end{aligned}$ $\quad G(s) = \dfrac{1}{s-1}$ inst., BIBO inst.

$\bar{x} = \begin{bmatrix} \pi + 2k\pi \\ 2k\pi \end{bmatrix},\ k = 0, \pm 1, \ldots$ $\quad \begin{aligned} \delta\dot{x}_1 &= \delta x_1 + \delta u \\ \delta\dot{x}_2 &= \delta x_2 + \delta u \\ \delta y &= -\delta x_1 \end{aligned}$ $\quad G(s) = \dfrac{-1}{s-1}$ inst, BIBO inst.

$\bar{x} = \begin{bmatrix} \pi + 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{bmatrix},\ k = 0, \pm 1, \ldots$ $\quad \begin{aligned} \delta\dot{x}_1 &= -\delta x_1 + \delta u \\ \delta\dot{x}_2 &= -\delta x_2 + \delta u \\ \delta y &= -\delta x_1 \end{aligned}$ $\quad G(s) = \dfrac{-1}{s+1}$ As stab., BIBO stab.

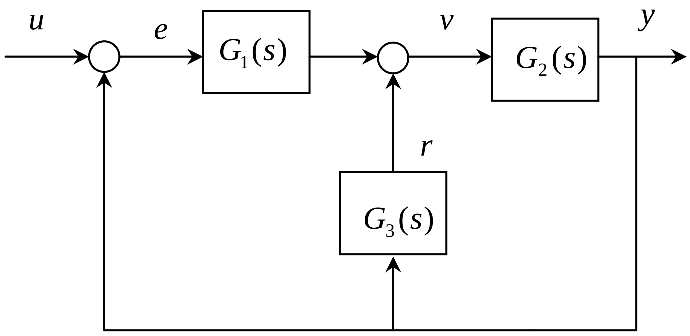
$\bar{x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{bmatrix},\ k = 0, \pm 1, \ldots$ $\quad \begin{aligned} \delta\dot{x}_1 &= +\delta x_2 + \delta u \\ \delta\dot{x}_2 &= +\delta x_1 + \delta u \\ \delta y &= -\delta x_2 \end{aligned}$ $\quad G(s) = \dfrac{-1}{s-1}$ inst., BIBO inst.

$\bar{x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{bmatrix},\ k = 0, \pm 1, \ldots$ $\quad \begin{aligned} \delta\dot{x}_1 &= -\delta x_2 + \delta u \\ \delta\dot{x}_2 &= -\delta x_1 + \delta u \\ \delta y &= \delta x_2 \end{aligned}$ $\quad G(s) = \dfrac{1}{s+1}$ As. stab., BIBO stab.

$\bar{x} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{bmatrix},\ k = 0, \pm 1, \ldots$ $\quad \begin{aligned} \delta\dot{x}_1 &= -\delta x_2 + \delta u \\ \delta\dot{x}_2 &= -\delta x_1 + \delta u \\ \delta y &= -\delta x_2 \end{aligned}$ $\quad G(s) = \dfrac{-1}{s+1}$ As. stab. BIBO stab.

$\bar{x} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{bmatrix},\ k = 0, \pm 1, \ldots$ $\quad \begin{aligned} \delta\dot{x}_1 &= \delta x_2 + \delta u \\ \delta\dot{x}_2 &= \delta x_1 + \delta u \\ \delta y &= \delta x_2 \end{aligned}$ $\quad G(s) = \dfrac{1}{s-1}$ inst., BIBO inst.

Esercizio 2



Si consideri il sistema dinamico con ingresso u e uscita y raffigurato nello schema a blocchi in figura, dove $G_1(s)$, $G_2(s)$ e $G_3(s)$ sono le seguenti funzioni di trasferimento di sistemi del primo ordine:

$$G_1(s) = \frac{\alpha}{s}\,,\; G_2(s) = \frac{1}{s+1}\,,\; G_3(s) = \frac{\beta}{s-2}$$

2.1 Si ricavino le equazioni di stato del sistema

2.2 Si ricavi la funzione di trasferimento da u(t) a y(t)

2.3 Si studi la stabilità interna ed esterna del sistema

SOLUZIONE

$$\dot{x}_1 = \alpha e\,,\;\; \dot{x}_2 = -x_2 + v\,,\; \dot{x}_3 = 2x_3 + \beta y\,,\;\; v = x_1 + r\,,\;\; y = x_2\,,\; e = u + y\,,\; r = x_3$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \alpha x_2 + \alpha u \\
\dot{x}_2 &= -x_2 + x_1 + x_3 \\
\dot{x}_3 &= 2x_3 + \beta x_2 \\
y &= x_2
\end{aligned}$$

$$G(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 - G_2(s)(G_1(s) + G_3(s))} = \frac{\alpha(s-2)}{s^3 - s^2 - s(2+\alpha+\beta) + 2\alpha}$$

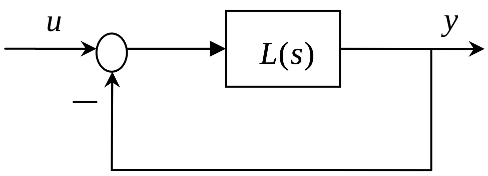
Il sistema e' del terzo ordine. C'e un segno discorde al denominatore e quindi il sistema non è asintoticamente stabile per alcun valore di α. Per la stabilità BIBO vediamo per quali valori di α e β c'e' una cancellazione in s=2. La cancellazione risulta per β=0 e per tale valore si ha:

$$G(s) = \frac{\alpha}{s^2 + s - \alpha}\,.$$

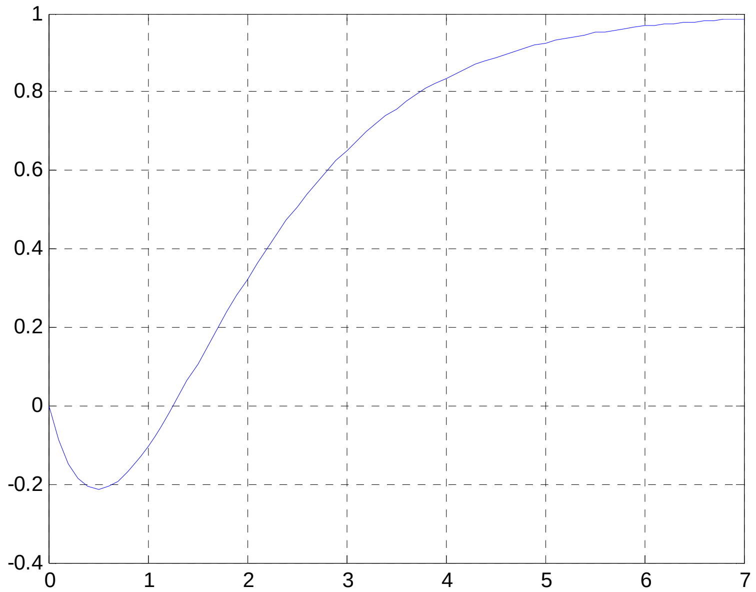
Si ha dunque stabilità BIBO per la coppia α e β che soddisfa α<0, β=0.

Esercizio 3

Si consideri il sistema retroazionato



e la risposta *y(t)* allo scalino unitario di *u(t)* in figura:



3.1 Si determini **L(s)** *qualitativamente* compatibile con la risposta in figura.

3.2 Si traccino i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase di tale **L(s)** discutendo, utilizzando il criterio di Bode, la robustezza della stabilità del sistema retroazionato attraverso la determinazione del margine di fase e di guadagno.

SOLUZIONE

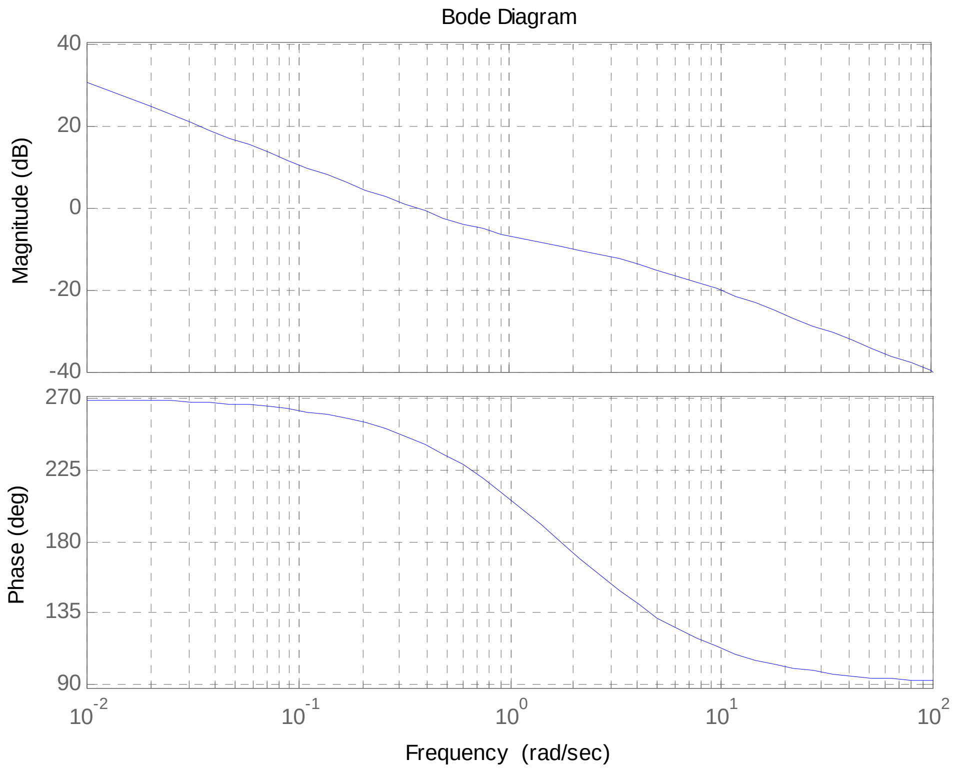
3.1 La $L(s)$ deve avere un integratore puro (l'errore tende a zero), uno zero nel semipiano destro, e grado relativo uno, quindi del tipo

$$L(s) = \mu \frac{1 - s\tau}{s(1 + sT)}, \quad T > 0, \quad \tau > 0$$

col che

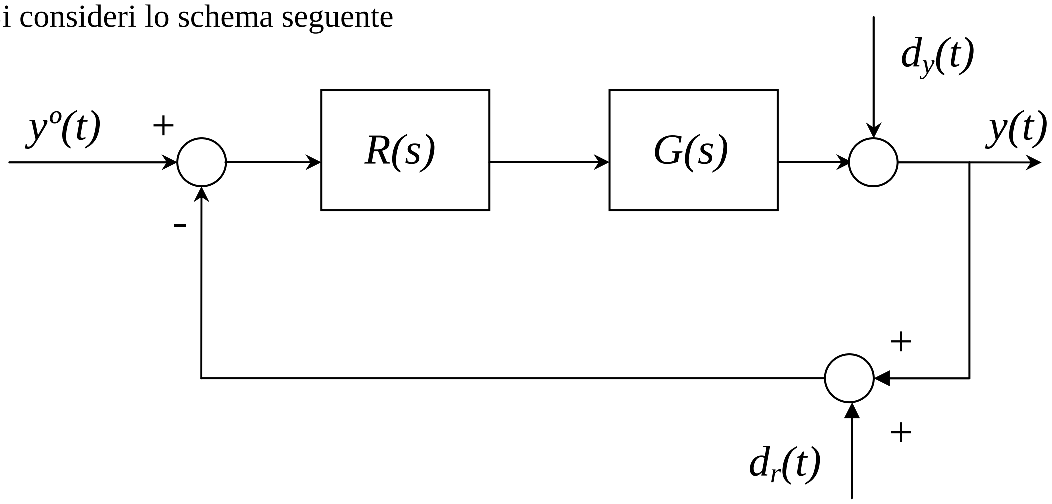
$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{\mu(1 - s\tau)}{s^2 T + s(1 - \mu\tau) + \mu}$$

La derivata prima nell'origine è -1 e quindi $\mu\tau = T$ che implica $F(s) = \dfrac{\mu - sT}{s^2 T + s(1-T) + \mu}$ .Ovviamente $T < 1$. Il grafico corrisponde a $\mu = T = 1/3$, $\tau = 1$ e quindi a $L(s) = \dfrac{1-s}{s(s+3)}$.



Esercizio 4

Si consideri lo schema seguente



dove $G(s) = \dfrac{100}{s+10}$.

Si sintetizzi un regolatore $R(s)$ di tipo PI tale che:

4.1 L'errore a transitorio esaurito abbia valore assoluto minore di **0.1** quando il riferimento è una **rampa** unitaria.

4.2 Ci sia un'attenuazione almeno di un fattore **10** per disturbi armonici del segnale d_y a frequenza inferiore a **1 rad/sec.**

4.3 Ci sia un'attenuazione almeno di un fattore **10** per disturbi armonici del segnale d_r a frequenza superiore a **50 rad/sec**.

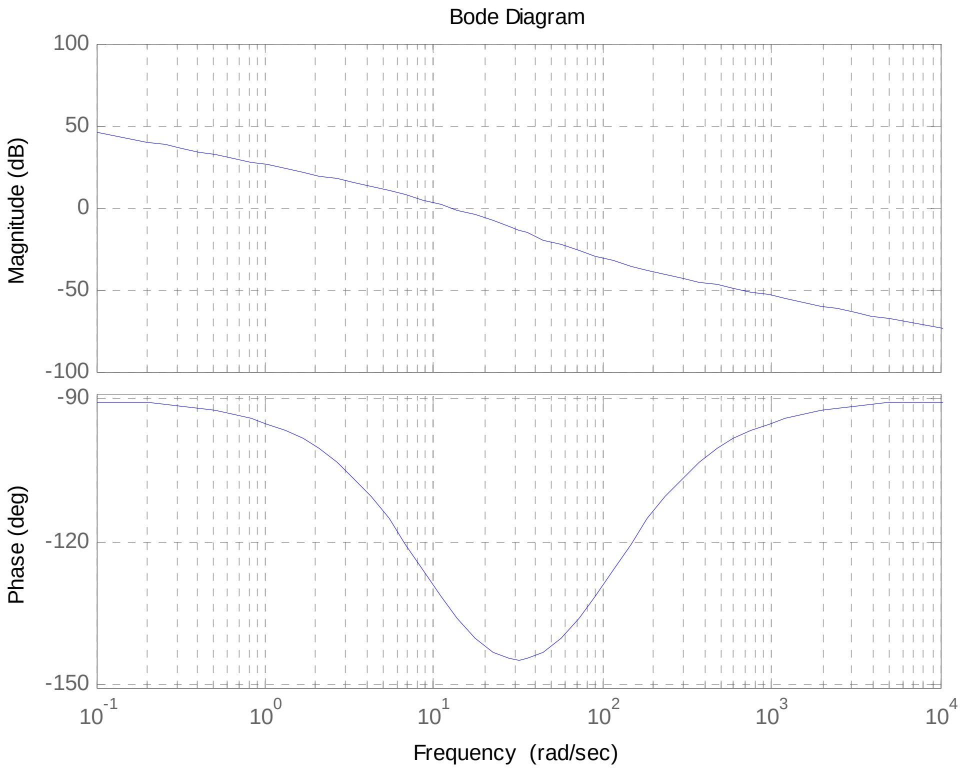
4.4 La pulsazione critica sia maggiore di **10 rad/sec.**

4.5 Il margine di fase sia maggiore di **45 gradi**.

SOLUZIONE

$$R(s) = \frac{\mu(1+s\tau)}{s}$$

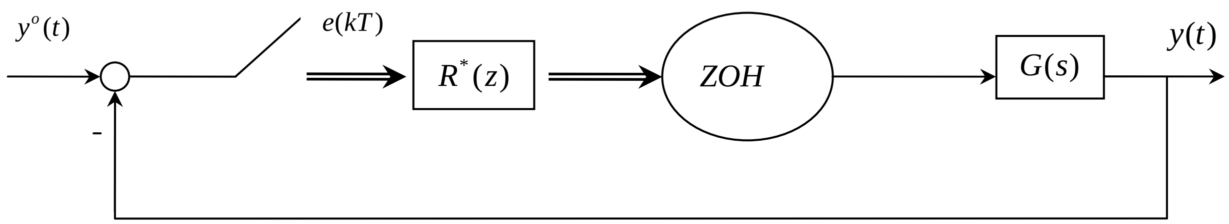
con $\mu > 1$. Ponendo $\tau = 1/10$ si ha $L(s) = \dfrac{10\mu}{s}$ ma con $\mu > 1$ non si riesce a soddisfare i vincoli 4.3 e 4.4 insieme. Allora prendiamo ad esempio $\tau = 1/100$ e $\mu = 2$ si ha $L(s) = \dfrac{20(1+s/100)}{s(1+s/10)}$ che soddisfa le specifiche con $\omega_c = 13 rad/\sec$, $\varphi_m = 47^o$.



Bode Diagram
Magnitude (dB)
100
50
0
-50
-100
Phase (deg)
-90
-120
-150
10^-1
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
Frequency (rad/sec)

Esercizio 5

Si faccia riferimento allo schema (controllo digitale) seguente



dove

$G(s) = \dfrac{1-s}{s^2-4}$, $y^o(t) = sca(t)$.

Si supponga che il mantenitore e il campionatore operino in fase e sincronia, con periodo $T = 0.5\ln(2)$.

5.1 Si ricavi la funzione di trasferimento $G^*(z)$ del *sistema a segnali campionati* corrispondente a $G(s)$.
5.2 Si ricavi un regolatore digitale $R(z)$ tale che l'errore $e(kT)$ sia nullo a transitorio esaurito dopo un numero finito (e minimo possibile) di passi.

SOLUZIONE

$$G(s) = \frac{1-s}{s^2-4} = -\frac{1}{4(s-2)} - \frac{3}{4(s+2)} \quad \Rightarrow \quad G*(z) = -\frac{e^{2T}-1}{8(z-e^{2T})} - \frac{3(1-e^{-2T})}{8(s+e^{-2T})} = -\frac{5(z-7/5)}{6(z-2)(z-1/2)}$$

Vincoli: $F(1)=1, \quad F(7/5)=0, \quad F(2)=1$.
Inoltre F(z)=FIR con minimo numero di poli nell'origine. Quindi

$$F(z) = \frac{(z-7/5)(az+b)}{z^3}, \quad a+b=-5/2, \quad 2a+b=40/3$$

$$F(z) = \frac{95}{6}\frac{(z-7/5)(z-110/95)}{z^3}$$

$$R(z) = \frac{1}{G^*(z)}\frac{F(z)}{1-F(z)} = -19\frac{(z-1/2)(z-110/95)}{(z-1)(z-77/6)}$$

Esercizio 6
Si enunci con la massima precisione possibile il criterio di Nyquist e lo si dimostri.

SOLUZIONE

Vedi libro