FONDAMENTI DI AUTOMATICA

(Prof. P. Colaneri)

PROVA 12-07-20013

Da compilarsi ***a penna*** *prima di iniziare la prova d'esame.*

Cognome ....   Nome ....

Nato/a a .... il .... Matricola ....

....

(Firma)

Esercizio 1
Si consideri il sistema non lineare

$$\dot{x}_1 = -\log(x_1)x_2 + \log(x_2)x_1$$
$$\dot{x}_2 = -x_2^{\;2} + \log(x_1)\log(x_2) + u$$
$$y = x_1 + x_2$$

1.1 Si verifichi che $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è uno stato di equilibrio corrispondente all'ingresso costante $u = 1$.

1.2 Si scrivano le equazioni del sistema linearizzato intorno a tale stato di equilibrio.

1.3 Si discutano le proprietà di stabilità, osservabilità e raggiungibilità del sistema linearizzato.

1.4. Si calcoli l'espressione analitica della risposta del sistema linearizzato allo scalino unitario.

SOLUZIONE

1.1 Con $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $u = 1$ si ottiene $\begin{matrix} -\log(1) + \log(1) = 0 \\ -1 + \log(1)\log(1) + 1 = 0 \end{matrix}$ e quindi $\bar{x}$ è di equilibrio.

$$\delta\dot{x}_1 = (-\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1} + \log(\bar{x}_2))\delta x_1 + (\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} - \log(\bar{x}_1))\delta x_2 = -\delta x_1 + \delta x_2$$

1.2 $\delta\dot{x}_2 = \dfrac{\log(\bar{x}_2)}{\bar{x}_1}\delta x_1 + (\dfrac{\log(\bar{x}_1)}{\bar{x}_2} - 2\bar{x}_2)\delta x_2 + \delta u = -2\delta x_2 + \delta u$

$$\delta y = \delta x_1 + \delta x_2$$

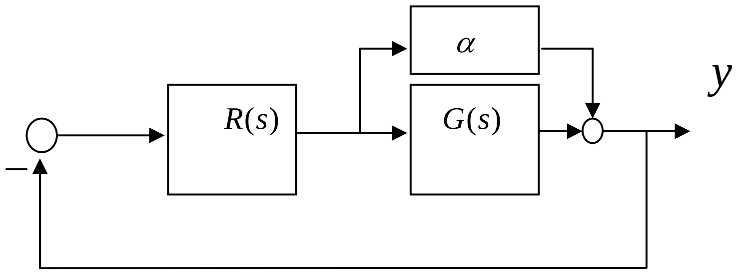
1.3 Quindi con $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ abbiamo che il sistema linearizzato è asintoticamente stabile, il sistema linearizzato è completamente raggiungibile (in quanto $\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ha rango massimo) e infine il sistema linearizzato non è completamente osservabile (in quanto $\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ha rango 1).

1.4 La funzione di trasferimento del sistema linearizzato è:

$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \dfrac{1}{s+1}$ e quindi la risposta allo scalino è:

$$\delta y(t) = 1 - e^{-t}, \quad t \geq 0$$

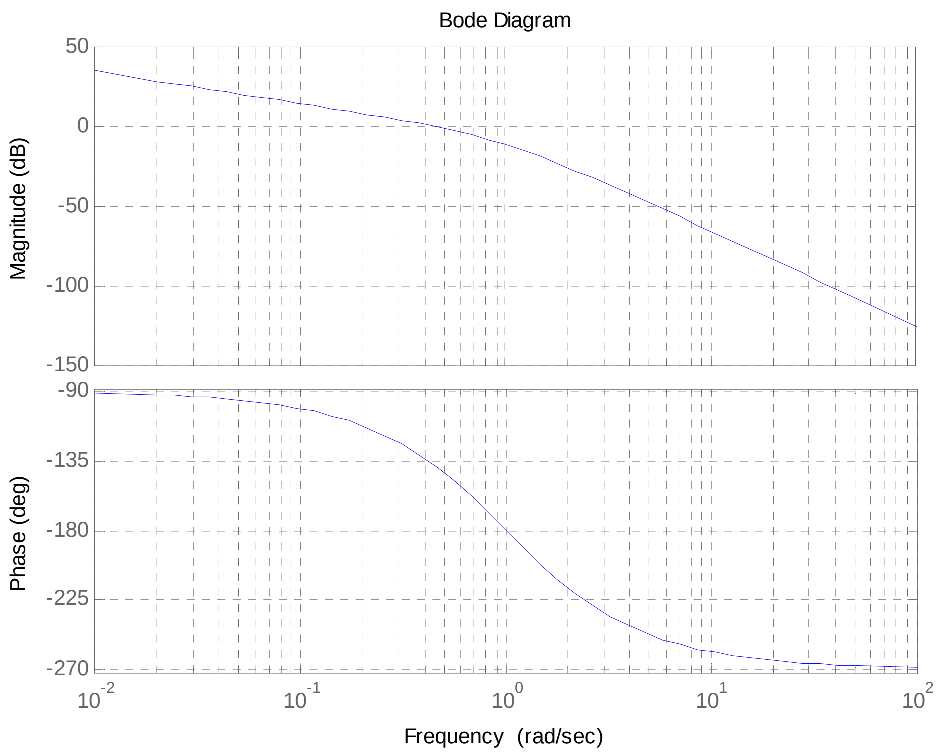
1.5 Esercizio 2
Si consideri il sistema retroazionato in figura



con $R(s) = \dfrac{0.5}{s}, \quad G(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2}$.

2.1 Si ponga α=0 e si traccino i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase della risposta in frequenza associata a L(s)=R(s)G(s) e si calcoli in margine di fase.

SOLUZIONE



La pulsazione critica e' di poco inferiore a 0.5 r/s e il margine di fase è di circa 40 gradi.

2.2 Si discuta la stabilità in anello chiuso del sistema in funzione del parametro α.

SOLUZIONE

La nuova L(s) è:

$L(s) = \frac{0.5}{s}\left(\frac{1}{(s+1)^2} + \alpha\right) = \frac{0.5(1+\alpha(s+1)^2)}{s(s+1)^2}$. Quindi scriviamo il polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso che è il numeratore di 1+L(s), cioè

$$(s+0.5\alpha)(s+1)^2 + 0.5 = s^3 + (2+0.5\alpha)s^2 + (1+\alpha)s + 0.5(\alpha+1)$$

Applicando il criterio di Routh Hurwitz si scrive la tabella

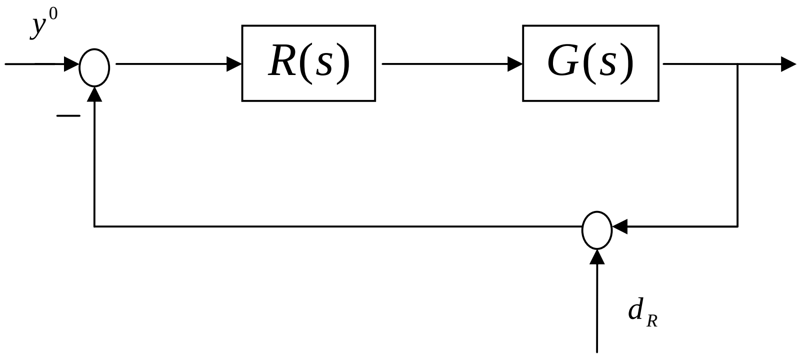
1	$1+\alpha$
$2+0.5\alpha$	$0.5(\alpha+1)$
β	
0.5	

Dove $\beta = \frac{(2+0.5\alpha)(1+\alpha) - 0.5(\alpha+1)}{2+0.5\alpha}$. Quindi si ha asintotica stabilità per i valori di α per cui $\frac{(2+0.5\alpha)(1+\alpha) - 0.5(\alpha+1) = (\alpha+1)(1.5+0.5\alpha)}{2+0.5\alpha}$

In conclusione $\alpha > -1$.

Esercizio 3

Si faccia riferimento al sistema retroazionato in figura.



dove $G(s) = \dfrac{100}{(s+10)(1+s)}$,

Si ricavi R(s) in modo tale che:

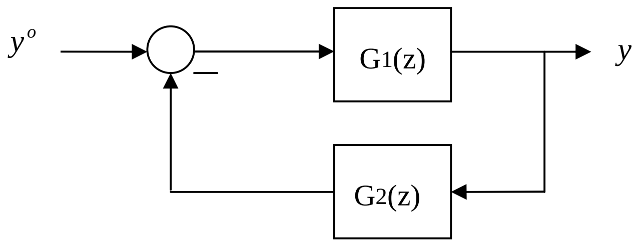
- si abbia errore nullo a transitorio esaurito quando $d_R=0$ e $y^o(t)$=sca(t)
- il margine di fase sia almeno 60°
- la pulsazione critica sia almeno di 0.5 r/s
- il disturbo in retroazione sia attenuato di almeno 20 db quando $d_R(t)=\sin(\omega t)$, $\omega>50$r/s

SOLUZIONE

Per la regolazione a zero dell'errore e necessario che R(s) abbia un integratore. La soluzione più semplice è poi quella di un PI:

$R(s) = \dfrac{\mu(s+10)}{s}$ col che $L(s) = \dfrac{100\mu}{s(s+1)}$ e prendendo μ piccolo (ad esempio 7/1000) si riescono a soddisfare tutti in vincoli. Ancora meglio $R(s) = \dfrac{\mu(s+1)}{s}$ col che $L(s) = \dfrac{100\mu}{s(s+10)}$ con μ opportuno, ad esempio μ=0.1

Esercizio 4
Si consideri il sistema retroazionato a tempo discreto



dove

$$G_2(z) = \frac{1}{z+0.5}$$

Si ricavi una descrizione in variabili di stato del sistema $G_1(z)$ compatibile con la risposta y(k) ad uno scalino unitario $y^o(k)$ del tipo: **y(0)=0, y(1)=2, y(k)=3, k≥3**.

SOLUZIONE

Chiamiamo F(z) la funzione di trasferimento da y^o a y, cioè:

$F(z) = \dfrac{G_1(z)}{1+G_1(z)G_2(z)}$. Dai dati risulta che

$$Y(z) = F(z)\frac{z}{z-1} = \frac{2}{z}+\frac{3}{z^2}+\frac{3}{z^3}+....... = \frac{2}{z}+\frac{3}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{2}{z}+\frac{3}{z^2}\frac{z}{z-1} = \frac{2(z+0.5)}{z(z-1)}$$

e quindi $F(z) = \dfrac{2(z+0.5)}{z^2}$ che è appunto un sistema FIR. Quindi

$$G_1(z) = \frac{F(z)}{1-FG_2(z)} = \frac{2z+1}{z^2-z+2}$$

Esercizio 5

Si faccia riferimento all'esercizio 2, con α=0. Si voglia realizzare R(s) con un regolatore digitale attraverso il metodo di Tustin. Si scelga il periodo di campionamento in maniera tale che il margine di fase del sistema degradi al più di 5 gradi. Si scriva poi la R(z) corrispondente.

SOLUZIONE

Il margine di fase è di quaranta gradi. 5 gradi corrispondono a $\pi/36$ radianti. Il degrado di margine di fase con un periodo di campionamento T è di circa $\omega_c T/2$, dove ω_c è di circa 0.5 e quindi il degrado è T/4. Quindi $T/4 < \pi/36$ significa $T < \pi/9$. La R(z) si ottiene sostituendo a s in R(s) l'espressione $s \rightarrow \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$, e quindi

$$R(z) = \frac{0.25(z+1)T}{z-1}$$