Fondamenti di Automatica

Allievi in Ingegneria Elettrica - Prof. P. Colaneri

Prima Prova 2012/2013 - 21 Novembre 2012

Cognome ____

Nome ____

N° di Matricola ___________________________________

____
Firma

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni.

Questo fascicolo contiene 5 esercizi numerici.

Si prega di non allegare alcun foglio.

Esercizio 1

Si faccia riferimento al sistema con ingresso u(t) e uscita y(t) descritto dall'equazione differenziale

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \sin\left(\frac{\pi}{2} y(t)\right)\frac{dy(t)}{dt} + y(t)^2 = u(t)$$

1.1 Si scrivano le equazioni del sistema nonlineare in forma normale

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$
$$y(t) = h(x(t), u(t))$$

1.2 Si consideri u(t)=1 e si ricavino gli stati di equilibrio corrispondenti.

1.3 Si studi la stabilità degli stati di equilibrio ricavati,

---

SOLUZIONE

Si ponga

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}$$

Quindi

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} x_1(t)\right)x_2(t) - x_1(t)^2 + u(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

Si ha

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

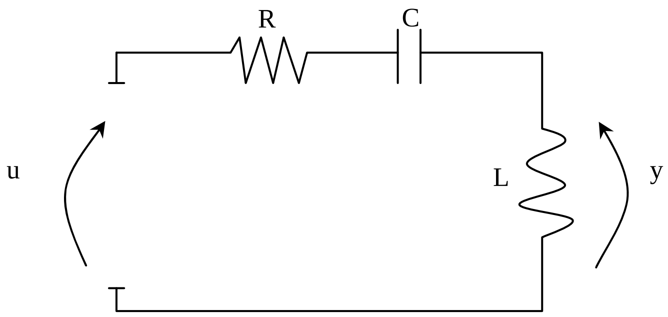
e

$$\delta\dot{x}_1(t) = \delta x_2(t)$$
$$\delta\dot{x}_2(t) = -\left(2x_1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\bar{x}_1\right)\bar{x}_2\right)\delta x_1(t) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\bar{x}_1\right)\delta x_2(t) + \delta u(t)$$
$$\delta y(t) = \delta x_1(t)$$

col che $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ **in corrispondenza del primo equilibrio (che è dunque as. stabile), mentre**

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **in corrispondenza del secondo equilibrio (che è dunque instabile).**

Esercizio 2



Si consideri il sistema elettrico in figura dove u(t) è la tensione di ingresso, y(t) la tensione di uscita, e i parametri R, C, L sono quelli della resistenza, della capacità e dell'induttanza dei dispositivi schematizzati.

2.1 Si ricavino le equazioni di stato del sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

2.2 Si ricavi la funzione di trasferimento da u(t) a y(t)

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

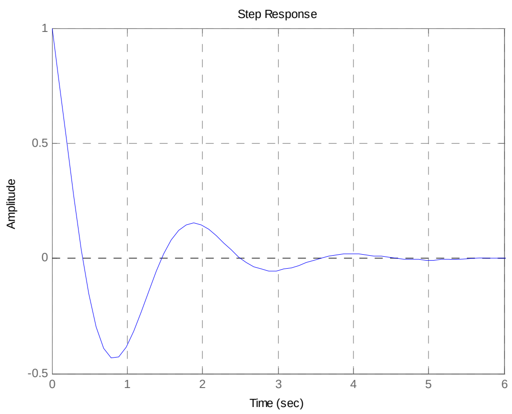
2.3 Si ponga R=2, L=1, C=0.1. Si tracci un grafico qualitativo della risposta allo scalino unitario e si discuta la risposta (oscillazioni, tempo di assestamento, etc…)

SOLUZIONE

Si scelgano le due variabili di stato come la corrente nell'induttore e la tensione ai capi del condensatore. Si ha dunque

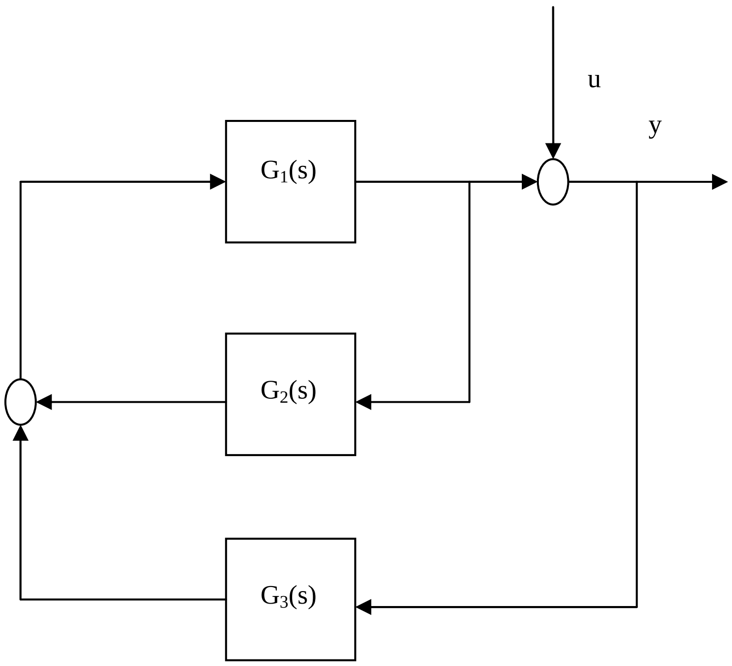
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} -R & -1 \end{bmatrix} x(t) + u(t)$$

e quindi $G(s) = \dfrac{s^2}{s^2 + s\dfrac{R}{L} + \dfrac{1}{LC}}$ **. La risposta allo scalino è:**



Esercizio 3

Si faccia riferimento allo schema a blocchi in figura.



3.1 Si ricavi la funzione di trasferimento G(s) da u(t) a y(t).

3.2 Siano

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+1)}, \quad G_2(s) = \frac{\alpha}{s}, \quad G_3(s) = \frac{1}{(s+5)}$$

e si studi la stabilità interna ed esterna del sistema complessivo del terzo ordine in funzione del parametro scalare α.

SOLUZIONE

$$G(s) = \frac{1 - G_1(s)G_2(s)}{1 - G_1(s)G_2(s) - G_1(s)G_3(s)} = \frac{(s^2 + s - \alpha)(s+5)}{s^3 + 6s^2 + (4-\alpha)s - 5\alpha}$$

Si ha asintotica stabilità per $\alpha<0$ e BIBO stabilità per $\alpha\leq 0$.

Esercizio 4

Si consideri un sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s(s-1)}{(s+1)^3}$$

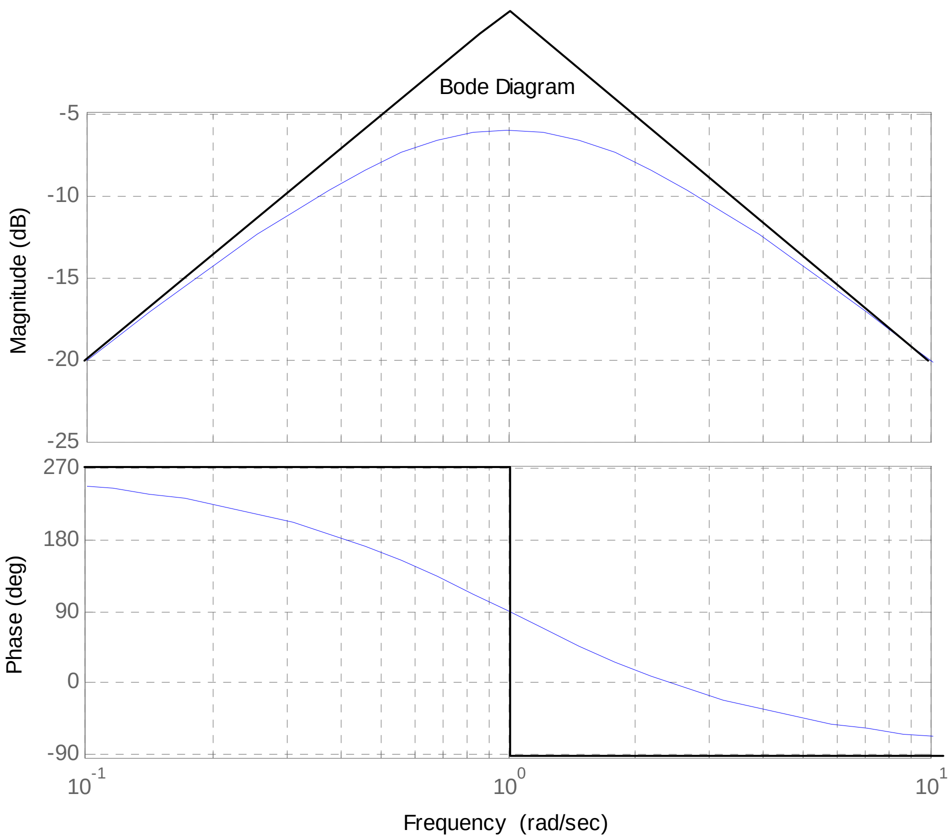
4.1 Si traccino i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase e il diagramma di Nyquist.

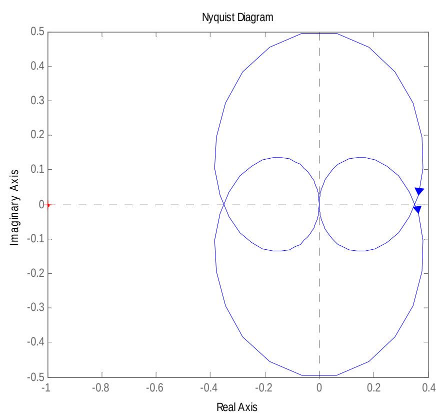
4.2 Si ricavi la risposta asintotica del sistema quando u(t)=10+sin(t).

SOLUZIONE

La risposta asintotica è:

$$y(t) = \sin(t - 1.5\pi)$$





Esercizio 5

Con riferimento alla G(s) dell'esercizio precedente, si ricavi una *realizzazione minima* in spazio di stato e l'espressione analitica della *risposta libera* $y_L(t)$ quando

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

SOLUZIONE

Scegliamo la realizzazione in forma canonica di osservabilità e quindi

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Risulta

$$Y_L(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & s & s^2 \end{bmatrix} x(0)}{(s+1)^3} = \frac{1}{(s+1)^3}$$

e quindi

$$y_L(t) = \frac{t^2}{2} e^{-t}, \quad t \geq 0$$