Fondamenti di Automatica

Allievi in Ingegneria Elettrica - Prof. P. Colaneri

Appello del 22 Febbraio 2013

Cognome ____

Nome ____

N° di Matricola ___________________________________

____

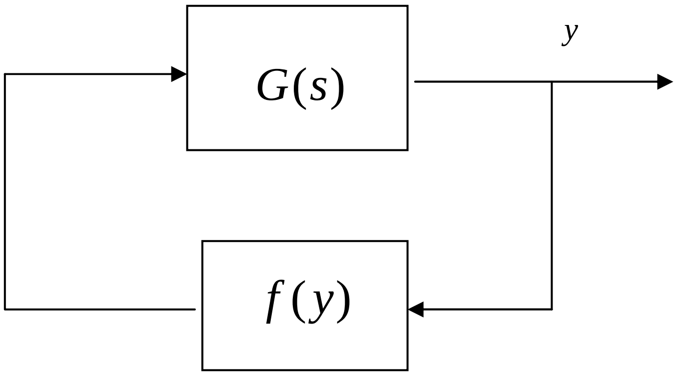
Firma

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni.

Questo fascicolo contiene 5 esercizi.

Si prega di non allegare alcun foglio.

ESERCIZIO 1
Si consideri il sistema in figura:



dove

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 + \alpha s + 5} \quad \text{e} \quad f(y) = y^2 - y$$

Si ricavino gli stati di equilibrio e si studi la stabilità di tali equilibri, in funzione di α.

SOLUZIONE

Realizziamo *G(s):*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

con $u = f(y) = y^2 - y = x_{2_2}^2 - x_2$. Quindi il sistema complessivo è descritto da

$$\dot{x}_1 = -6x_2 + x_2^2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - (\alpha + 1)x_2 + x_2^2$$

Il sistema linearizzato ha come matrice dinamica

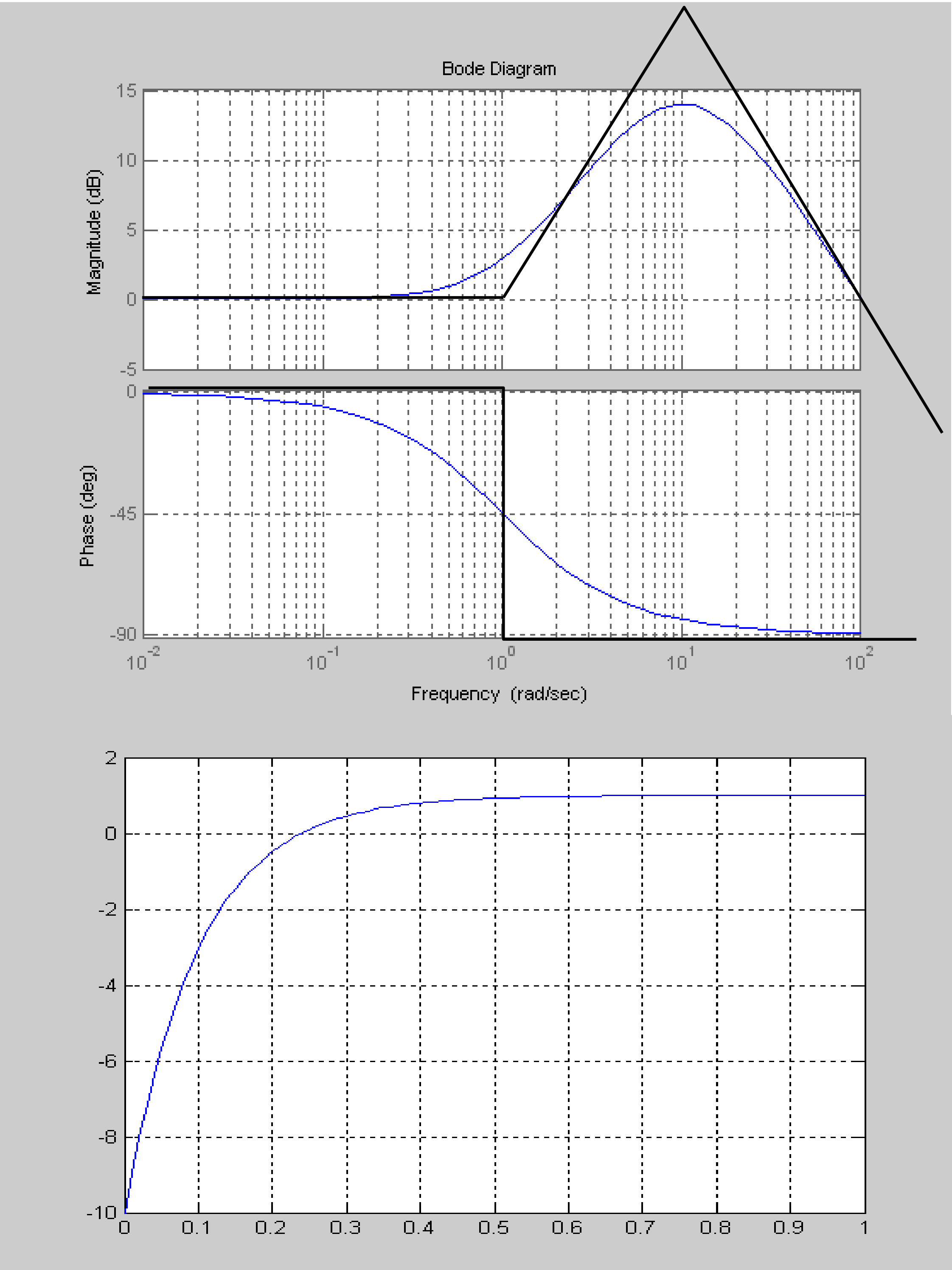
$A = \begin{bmatrix} 0 & -6 + 2\bar{y} \\ 1 & -\alpha - 1 + 2\bar{y} \end{bmatrix}$, dove l'uscita di equilibrio vale 0 oppure 6. In conclusione, lo stato di equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ corrispondente a $\bar{y} = 0$ è asintoticamente stabile per α > −1, ed è instabile per α<−1, mentre gli stati di equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} 6\alpha - 30 \\ 6 \end{bmatrix}$ corrispondenti a $\bar{y} = 6$ sono instabili per ogni valore di α.

ESERCIZIO 2

Si considerino i diagrammi del modulo e della fase di una funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema del secondo ordine, con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.

2.1 Si ricavi $G(s)$.

2.2 Si ricavi $u(t)$ in maniera tale che la risposta forzata $y(t)$ sia quella in figura.



SOLUZIONE

La funzione di trasferimento vale 1 per s=0, ha uno zero instabile in s=1 e due poli in s=10 e s= -10. Quindi

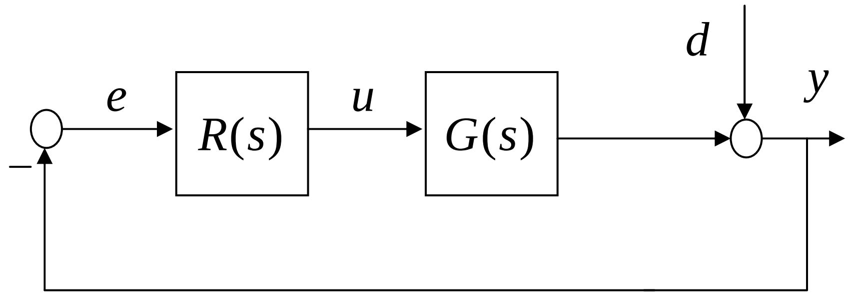
$$G(s) = \frac{1-s}{1-0.01s^2} = \frac{1-s}{(1-0.1s)(1+0.1s)}$$

L'esponenziale in figura è del tipo $y(t) = a + be^{-10t}$ con $a + b = -10$, $a = 1$.

Quindi $y(t) = 1 - 11e^{-10t}$ col che $Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{11}{s+10} = \frac{1-s}{s(1+0.1s)}$. In conclusione $U(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} = \frac{1-0.1s}{s}$ e $u(t) = sca(t) - 0.1imp(t)$.

ESERCIZIO 3

Si faccia riferimento al sistema retro azionato in figura.



dove $G(s) = \dfrac{1-0.1s}{s(s+1)}$, $d(t) = ram(t)$

3.1 Si ricavi un regolatore $R(s)$ (del minor ordine possibile) in maniera tale che l'errore a transitorio esaurito sia inferiore a 0.1, il margine di fase sia maggiore di 30 gradi e la pulsazione critica sia maggiore di 4 rad/sec.

3.2 Si scelga il periodo di campionamento (specificando le ragioni della scelta) e si realizzi digitalmente il regolatore ricavato al punto precedente, discutendo il risultato ottenuto dal punto di vista analogico (margine di fase, pulsazione critica, margine di guadagno).

SOLUZIONE

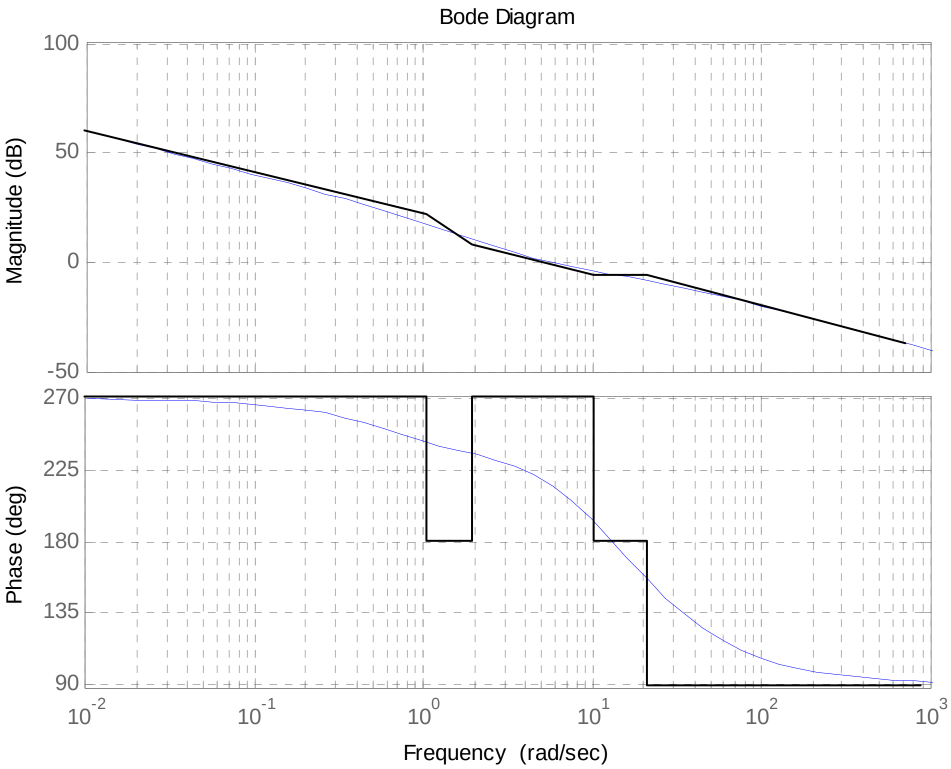
Per soddisfare la specifica statica basta un regolatore di tipo zero con guadagno maggiore o uguale a 10. Con la rete anticipatrice

$$R(s) = 10\frac{1+0.5s}{1+0.05s}$$

si ha una pulsazione critica circa uguale a 5 rad/sec e un margine di fase di circa 35 gradi (vedi diagrammi).

Scegliendo il periodo di campionamento T=0.0628 si ha una pulsazione di campionamento 20 volte più grande della pulsazione critica e un deterioramento del margine di fase dovuto

$$R^*(z) = R\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right) = ...$$

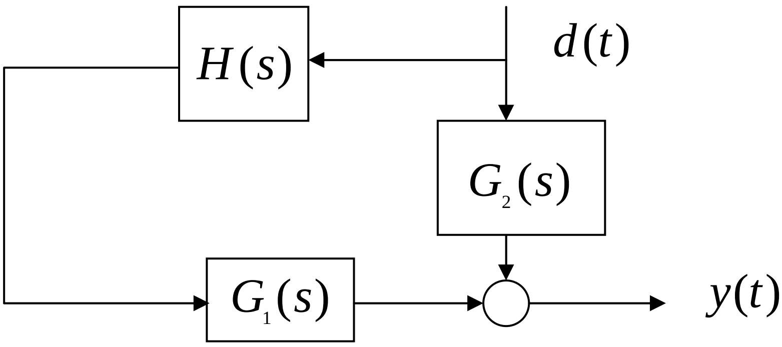

Bode Diagram
Magnitude (dB)
100
50
0
-50
Phase (deg)
270
225
180
135
90
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2
10^3
Frequency (rad/sec)

ESERCIZIO 4

Si consideri lo schema di compensazione del disturbo in figura, dove

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad G_2(s) = \frac{1-s}{s+1}$$

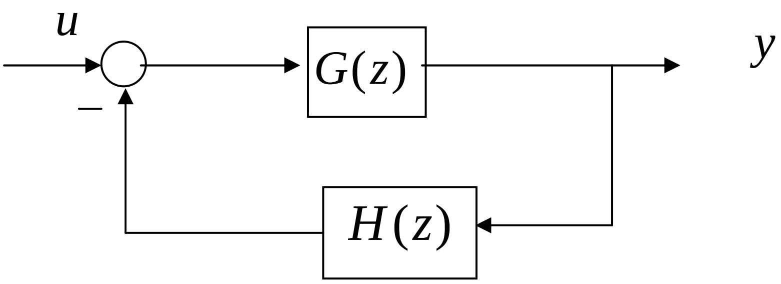
Si ricavi una funzione di trasferimento *H(s)* (del minimo ordine possibile) in maniera tale che il sistema complessivo sia asintoticamente stabile e che *y(t)* tenda asintoticamente a zero quando *d(t)=sin(t).*



SOLUZIONE

Per il teorema della risposta in frequenza il problema è risolto trovando una funzione H(s) con poli a parte reale negativa tale che $H(j) = -\frac{G_2(j)}{G_1(j)} = -1 + j$. Ad esempio $H(s) = \frac{-2}{s+1}$ che in effetti mi dà $G_2(s) + G_1(s)H(s) = \frac{1-s}{s+1} - 2\frac{1}{(s+1)^2} = -\frac{1+s^2}{(1+s)^2}$.

ESERCIZIO 5
Si faccia riferimento al sistema a tempo discreto seguente



dove

$$G(z) = \frac{z+1}{z^2 - 3z + 5}.$$

Si ricavi la funzione di trasferimento *H(z)* (del minimo ordine possibile) in maniera tale che il sistema da u a y sia un FIR. Si ricavi poi la risposta *y(k)* quando *u(k)=sca(k).*

SOLUZIONE

Si noti che

$$z^2 - 3z + 5 + (z+1)H(z) = z^2$$

con

$$H(z) = \frac{3z-5}{z+1}$$

La funzione di trasferimento da u a y diventa:

$$\frac{z+1}{z^2}\ .$$

La risposta all'impulso è y(0)=0, y(1)=1, y(2)=1, y(3)=0, ... mentre quella allo scalino è y(0)=0, y(1)=1, y(2)=2, ...