Fondamenti di Automatica

Allievi del CL in Ingegneria Elettrica

25 Settembre 2013

Cognome ____________________________________

Nome ______________________________________

N° di Matricola _______________________________

____

Firma

La prova dura 120 minuti.

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni.

Questo fascicolo contiene 5 esercizi.

Si prega di non allegare alcun foglio e di non utilizzare il retro delle singole pagine.

Esercizio 1

Si consideri il sistema non lineare con ingresso u e uscita y.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1^2 + x_2 - x_3 + u \\
\dot{x}_2 &= -x_2^2 + x_1 + x_3 - u \\
\dot{x}_3 &= -x_3^2 - x_1 - x_2 \\
y &= x_1
\end{aligned}
$$

Si ponga u=0 e si calcoli uno stato di equilibrio. Si studi la stabilità di tale stato di equilibrio. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema linearizzato e si studi la stabilità esterna (BIBO) di tale sistema. .

SOLUZIONE

Ponendo a zero u e le derivate si ottiene

$$
\begin{aligned}
0 &= -x_1^2 + x_2 - x_3 \\
0 &= -x_2^2 + x_1 + x_3 \\
0 &= -x_3^2 - x_1 - x_2
\end{aligned}
$$

la cui unica soluzione reale è

$$
\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Il sistema linearizzato è:

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{x}_1 &= -2\bar{x}_1\,\delta x_1 + \delta x_2 - \delta x_3 + \delta u = \delta x_2 - \delta x_3 + \delta u \\
\delta\dot{x}_2 &= -2x_2\delta x_2 + \delta x_1 + \delta x_3 - \delta u = \delta x_1 + \delta x_3 - \delta u \\
\delta\dot{x}_3 &= -2x_3\delta x_3 - \delta x_1 - \delta x_2 = -\delta x_1 - \delta x_2 \\
\delta y &= \delta x_1
\end{aligned}
$$

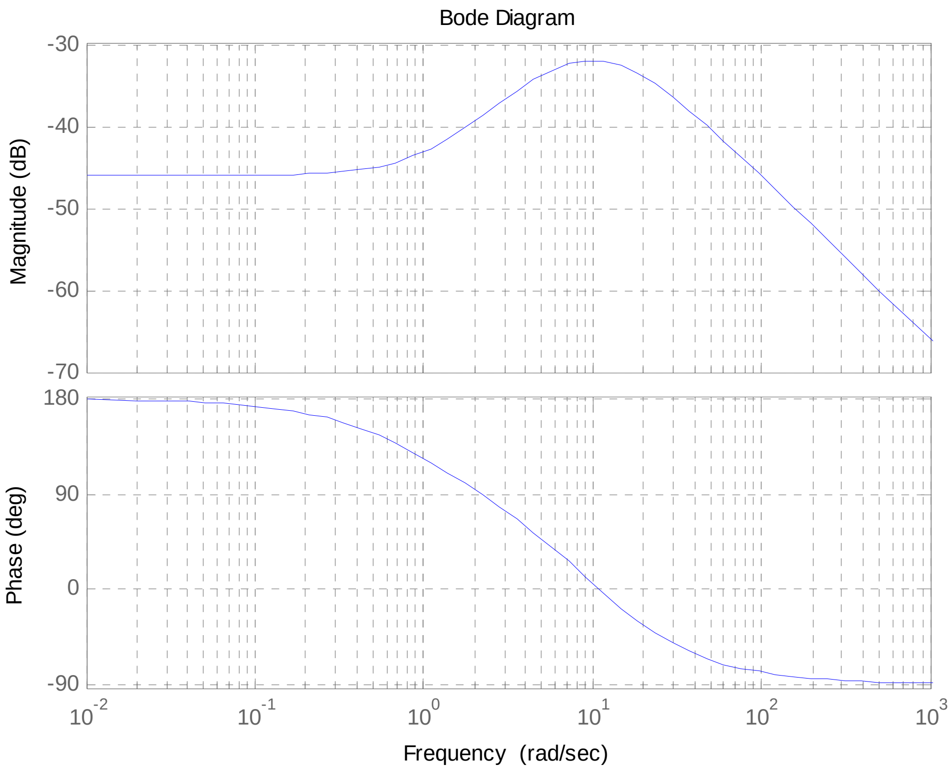
Quindi $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Che ha autovalori (0,1,-1). Lo stato di equilibrio è dunque instabile. Risulta inoltre $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [1 \quad 0 \quad 0]$, $D = 0$.

La funzione di trasferimento del sistema linearizzato è $G(s) = \dfrac{1}{s+1}$ e quindi il sistema linearizzato è BIBO stabile.

Esercizio 2

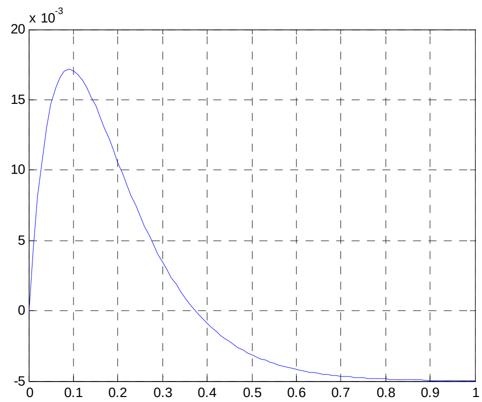
Si considerino i grafici del modulo e della fase della risposta in frequenza di un sistema del secondo ordine con funzione di trasferimento G(s).



Si ricavi G(s) e si tracci un grafico qualitativo della risposta dell'uscita y(t) quando l'ingresso u(t) è uno scalino unitario.

SOLUZIONE

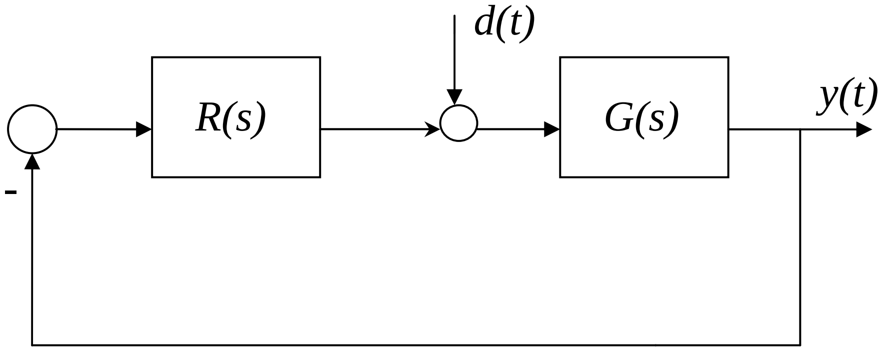
Dal grafico del modulo si capisce che G(s) ha uno zero (circa a frequenza 1) e due poli coincidenti (circa a frequenza 10). Inoltre il guadagno statico ha valore assoluto pari a circa -46db, che corrisponde a 0.005. Dal diagramma delle fasi si capisce invece che lo zero è nel semipiano destro, che i due poli sono nel semipiano sinistro e che il guadagno statico è negativo. In conclusione $G(s)=\dfrac{0.5(s-1)}{(s+10)^2}$. La risposta allo scalino unitario si calcola nel modo seguente: $Y(s)=\dfrac{0.5(s-1)}{(s+10)^2}\dfrac{1}{s}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s+10}+\dfrac{C}{(s+10)^2}=0.5\left(\dfrac{-0.01}{s}+\dfrac{0.01}{s+10}+\dfrac{1.1}{(s+10)^2}\right)$ e quindi



$y(t)=-0.05\left(0.01-0.01e^{-10t}-1.1te^{-10t}\right),\quad t\geq 0$.

Esercizio 3

Si consideri lo schema seguente



dove $G(s)=\dfrac{10e^{-0.5s}}{(s+1)(s+10)}$, $d(t)=sca(t)$.

Si ricavi R(s) (più semplice possibile) in maniera tale che:

3.1 L'uscita a transitorio esaurito sia in valore assoluto minore di 0.2.

3.2 Il margine di fase sia maggiore di 40 gradi.

3.3 La pulsazione critica sia maggiore di 1 rad/sec.

SOLUZIONE

Considerazioni:

Il ritardo di tempo per ω=1 comporta un ritardo di fase di 0.5 radianti (circa 27 gradi). Se si sceglie tipo zero il guadagno d'anello μ deve essere tale che $\dfrac{G(0)}{1+\mu}<0.2$ cioè μ>4. Se si sceglie invece tipo 1 l'errore diventa nullo (a patto che il sistema di controllo sia asintoticamente stabile).

Tipo 0: $R(s)=\mu_r\dfrac{s+1}{1+sT}$ e quindi $L(s)=\mu_r\dfrac{e^{-0.5s}}{(1+sT)(1+0.1s)}$ con $\mu_r > 4$. Ad esempio ponendo μ_r=10 e T = 10 si ha $L(s)=10\dfrac{e^{-0.5s}}{(1+10s)(1+0.1s)}$ a cui corrisponde una pulsazione critica circa uguale ad 1 rad/sec ed un margine di fase di circa π-arctan(0.1)-0.5 rad = 180-90-27 gradi = 63 gradi. E' anche possibile aumentare di un po' μ_r.

Tipo 1: $R(s)=\mu_r\dfrac{s+1}{s}$ e quindi $L(s)=\mu_r\dfrac{e^{-0.5s}}{s(1+0.1s)}$. Ad esempio ponendo μ_r=1 si ha $L(s)=1\dfrac{e^{-0.5s}}{s(1+0.1s)}$ a cui corrisponde una pulsazione critica circa uguale ad 1 rad/sec ed un margine di fase di circa π-π/2-arctan(0.1)-0.5 rad = 180-90-6-28 gradi = 56 gradi. E' anche possibile aumentare di un po' μ_r.

Esercizio 4

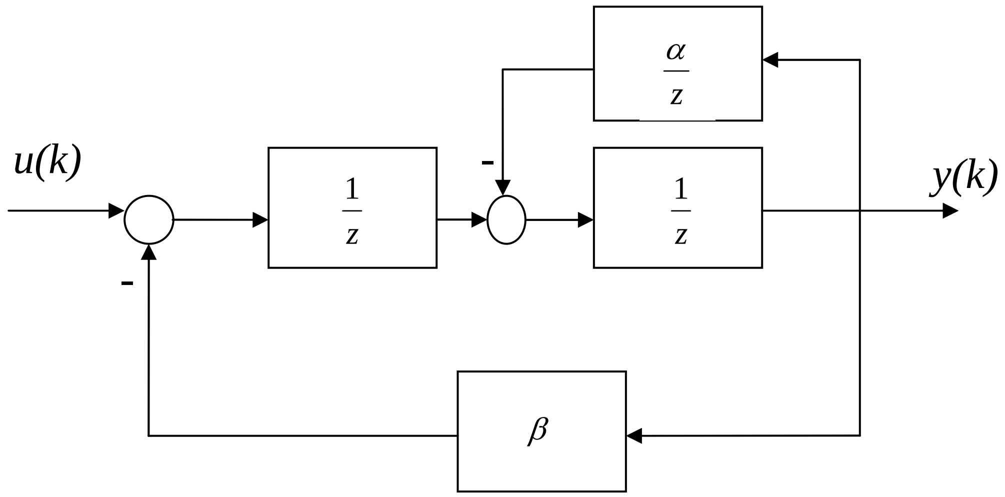
Si descrivano i passaggi alla base della trasformazione di Tustin $s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$ e il ruolo giocato dal tempo di campionamento T nella sintesi di un controllore digitale una volta sia dato un controllore analogico di riferimento $R^o(s)$.

SOLUZIONE

Vedere il libro di testo

Esercizio 5

Si consideri il sistema retroazionato a tempo **discreto** in figura



Si studi la stabilità interna del sistema in funzione dei parametri reali α, β.

Si calcoli la funzione di trasferimento da u a y e si studi la stabilità esterna (BIBO) in funzione dei parametri.

Si dica per quali valori di α, β il sistema da u a y è un FIR.

SOLUZIONE

Il sistema è del terzo ordine con un autovalore in z=0 e gli altri zeri del polinomio $z^2+\alpha+\beta=0$. La stabilità asintotica si ha per $|\alpha+\beta|<1$. La funzione di trasferimento è $\frac{1}{z^2+\alpha+\beta}$. Quindi si ha stabilità BIBO per $|\alpha+\beta|<1$. Infine è un FIR per $\alpha+\beta=0$.