Fondamenti di Automatica

Allievi di Ingegneria Elettrica - Prof. P. Colaneri

Appello del 4 Marzo 2014

Cognome ____

Nome ____

N° di Matricola ___________________________________

____

Firma

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni.
Questo fascicolo contiene 5 esercizi.

Si prega di non allegare alcun foglio.

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema descritto dall'equazione differenziale (y è l'uscita, u è l'ingresso):

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + \left(\frac{d^2 y}{dt^2} + 1\right)^3 + \left(\frac{dy}{dt} + 1\right)^2 + y + 1 = u$$

1.1 Si scriva una realizzazione in forma normale del sistema.
1.2 Si ricavi lo stato di equilibrio associato all'ingresso costante u=1
1.3 Si studi la stabilità dell'equilibrio trovato.

SOLUZIONE

Prendendo $x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad x_3 = \ddot{y}$ si ha

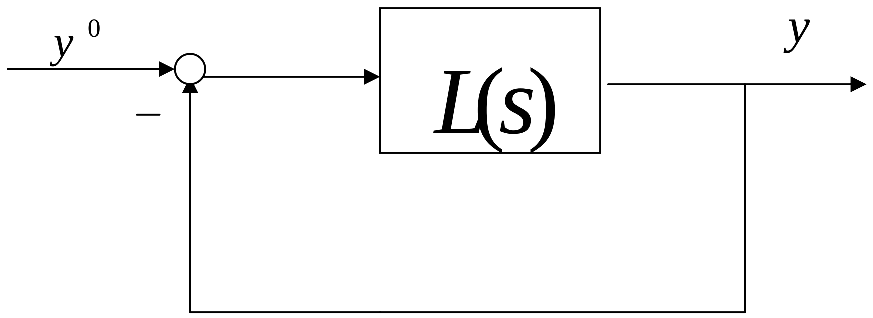
$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = -(1 + x_3)^3 - (1 + x_2)^2 - x_1 - 1 + u$

L'unico stato di equilibrio è $\overline{x}_1 = -2, \quad \overline{x}_2 = 0, \quad \overline{x}_3 = 0$

La matrice A del sistema linearizzato è $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$. Il polinomio caratteristico è $s^3 + 3s^2 + 2s + 1$. Applicando il test di Routh Hurwitz risulta che lo stato di equilibrio è asintoticamente stabile.

ESERCIZIO 2

Si consideri lo schema di un sistema retroazionato



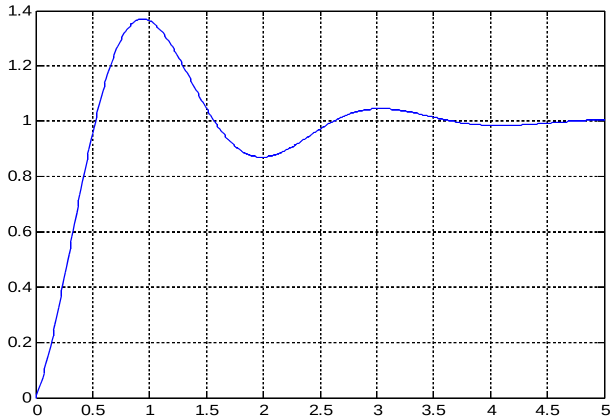
dove

$L(s) = \dfrac{s+10}{s(s+1)}$, $\quad y^0(t) = sca(t)$

Si ricavi l'espressione analitica della risposta y(t) e se ne discutano le caratteristiche (tempo di assestamento, oscillazioni, etc…) con un grafico qualitativo.

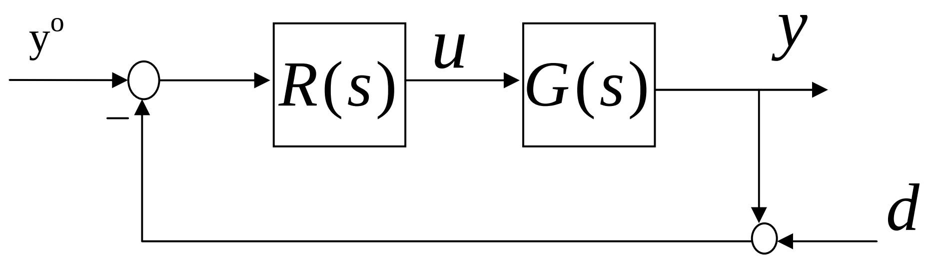
SOLUZIONE

La funzione di sensitività complementare è $F(s) = \dfrac{s+10}{s^2+2s+10}$. La trasformata di Laplace dell'uscita è: $Y(s) = \dfrac{s+10}{s(s^2+2s+10)} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{s+1}{s^2+2s+10} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{s+1}{(s+1)^2+9}$. Quindi $y(t) = 1 - e^{-t}\cos(3t)$.



ESERCIZIO 3

Si faccia riferimento al sistema retro azionato in figura.



dove $G(s)=\dfrac{10}{(s+1)^2}$, $d(t)=\sin(20t)$, $y^0(t)=ram(t)$

3.1 Si ricavi un regolatore R(s) (del minor ordine possibile) in maniera tale che l'errore y^o-y a transitorio esaurito dovuto al riferimento sia inferiore a 0.1, il disturbo sia attenuato sull'errore di almeno dieci volte, il margine di fase sia maggiore di 40 gradi e la pulsazione critica sia maggiore di 0,5 rad/sec.

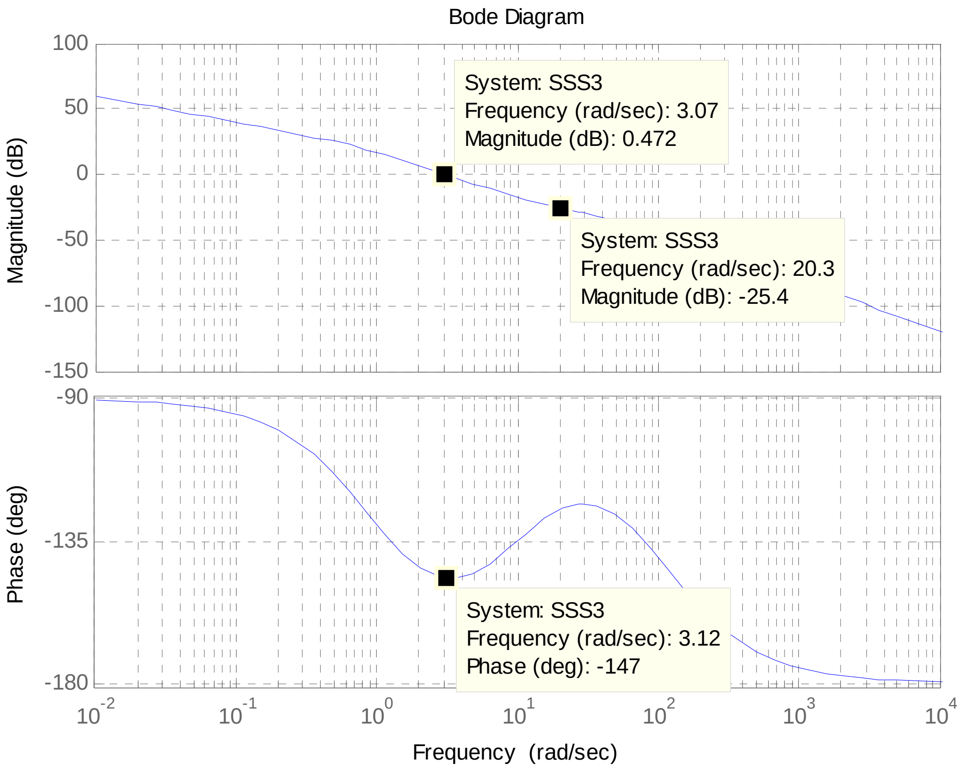
3.2 Si scelga un periodo di campionamento (specificando le ragioni della scelta) e si discuta il problema della realizzazione digitale di R(s) ottenuto dal punto di vista analogico (margine di fase, pulsazione critica, margine di guadagno, etc…).

SOLUZIONE

Il regolatore deve avere almeno un polo nell'origine e guadagno maggiore di uno. Inoltre $|L(j\omega)|<0.1$ per $\omega=20$. Primo tentativo con il PI $R(s)=\dfrac{s+1}{s}$. Si ha $L(s)=\dfrac{10}{s(s+1)}$ che soddisfa tutte le specifiche a parte il margine di fase. Poniamo allora una rete ritardatrice con un polo a pulsazione 0.01 e uno zero a pulsazione 0.1. Quindi con $R(s)=\dfrac{(s+1)(1+s/10)}{s(1+s/100)}$ si ha $L(s)=\dfrac{10(1+s/10)}{s(s+1)(1+s/100)}$.

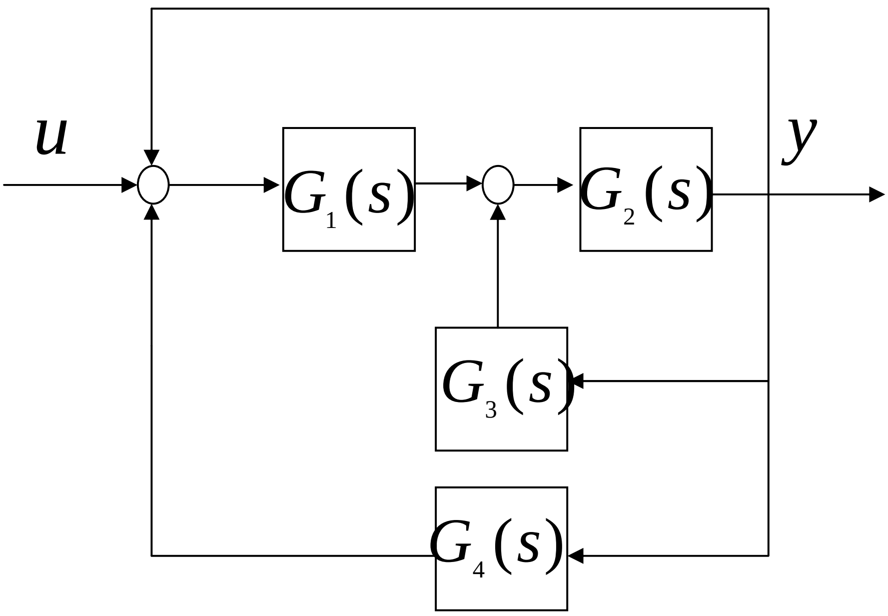
Si ottiene una pulsazione critica di circa 3rad/sec, un margine di fase di circa 45 gradi e il modulo di L minore di -25db a frequenze maggiori di 20rad/sec.

Realizzando R(s) in forma digitale, con la trasformazione di Tustin, si ha un sistema analogico equivalente con lo stesso diagramma del modulo di L e con un margine di fase deteriorato di 1.5T radianti. Per avere un deterioramento di max 5 gradi occorre quindi che $1.5T<5\pi/180$ cioè $T<0.058$ sec.



Bode Diagram
Magnitude (dB)
100
50
0
-50
-100
-150
System: SSS3
Frequency (rad/sec): 3.07
Magnitude (dB): 0.472
System: SSS3
Frequency (rad/sec): 20.3
Magnitude (dB): -25.4
Phase (deg)
-90
-135
-180
System: SSS3
Frequency (rad/sec): 3.12
Phase (deg): -147
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
Frequency (rad/sec)

ESERCIZIO 4
Si faccia riferimento alla schema a blocchi seguente, dove G1, G2, G3 e G4 rappresentano sistemi dinamici a tempo discreto.



3.1 Si ricavi la funzione di trasferimento da u a y.
3.2 Sia poi

$$G_1(s) = G_3(s) = \frac{1}{s}, \quad G_2(s) = \alpha, \quad G_4(s) = \frac{\beta}{s+1}$$

Si studi la stabilità interna ed interna del sistema in funzione di $\alpha \neq 0$ e β.

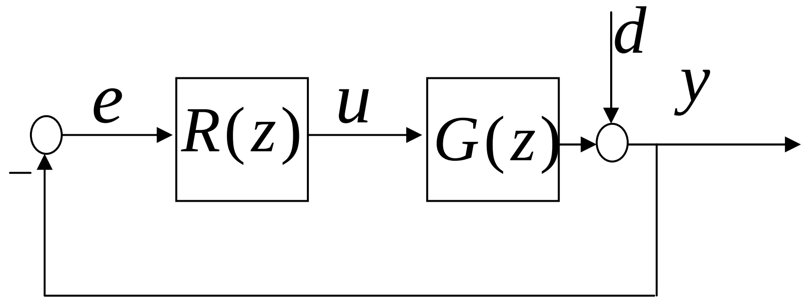
SOLUZIONE

La funzione di trasferimento è:

$$\frac{G_1(s)G_2(s)}{1 - G_2(s)G_1(s) - G_2(s)G_3(s) - G_2(s)G_1(s)G_4(s)} = \frac{\alpha(s+1)}{s^2 + s(1-2\alpha) - 2\alpha - \alpha\beta}$$

Il sistema è asintoticamente stabile per $\alpha < 0.5, \quad \alpha(\beta + 2) < 0$

ESERCIZIO 5
Si faccia riferimento al sistema di controllo (a tempo discreto)



dove $G(z) = \dfrac{2 - z}{z(z+1)}$, $d(k) = sca(k)$

Si ricavi R(z) in modo tale che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile e l'errore e(k) sia nullo dopo un numero finito (minimo) di passi.

SOLUZIONE
La funzione di sensitività S(z) deve essere FIR e soddisfare: $S(1) = 0, \quad S(-1) = 0, \quad S(2) = 1$,
quindi del tipo $S(z) = \dfrac{(z+1)(z-1)(z+a)}{z^3}$ con $2 + a = \dfrac{8}{3}$. Quindi $S(z) = \dfrac{(z+1)(z-1)(z+2/3)}{z^3}$.
In conclusione

$$R(z) = \frac{1}{G(z)}\frac{1 - S(z)}{S(z)} = \frac{z(z+1)}{2-z}\frac{(z^3 - (z+1)(z-1)(z+2/3))}{(z+1)(z-1)(z+2/3)} =$$
$$\frac{z(z+1)}{2-z}\left(-2/3\frac{(z+0.5)(z-2)}{(z+1)(z-1)(z+2/3)}\right) = 2/3\frac{z(z+0.5)}{(z-1)(z+2/3)}$$