Fondamenti di Automatica

Prof. Patrizio Colaneri

Prova del 12 Febbraio 2014

COGNOME ---------------------------------

NOME ---------------------------------

MATRICOLA ---------------------------------

FIRMA ---------------------------------

- Il fascicolo contiene 6 domande.
- Tempo = 2.5 ore
- Si può scrivere a matita.
- E' vietato consultare libri, dispense ed appunti.

ESERCIZIO 1

1.1 Si esprima con la massima chiarezza possibile il principio di sovrapposizione degli effetti, specificando la classe di sistemi dinamici per cui tale principio vale.

Si consideri poi il sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1 - x_2 \\
\dot{x}_2 &= -x_1^{\,2} + x_2 \\
\dot{x}_3 &= -x_3 + x_1^{\,3} + u \\
y &= x_3
\end{aligned}
$$

1.2 Si dica se per tale sistema vale il principio di cui al punto precedente.

1.3 Si dica (giustificando la risposta) se per tale sistema la somma delle risposte dell'uscita y(t) ottenute con x(0)=0 a partire da due ingressi corrisponde alla risposta dell'uscita y(t) ottenuta con x(0)=0 dovuta alla somma dei due ingressi.

SOLUZIONI

1.1 ……

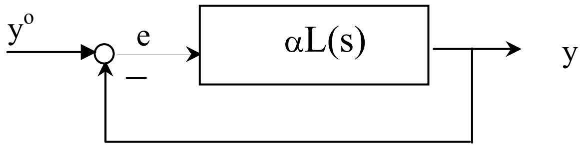
1.2 NO in quanto il sistema è non lineare

1.3 SI in quanto il movimento dello stato a partire da x(0)=0 è tale che $x_1(t)=0$, $x_2(t)=0$ e quindi

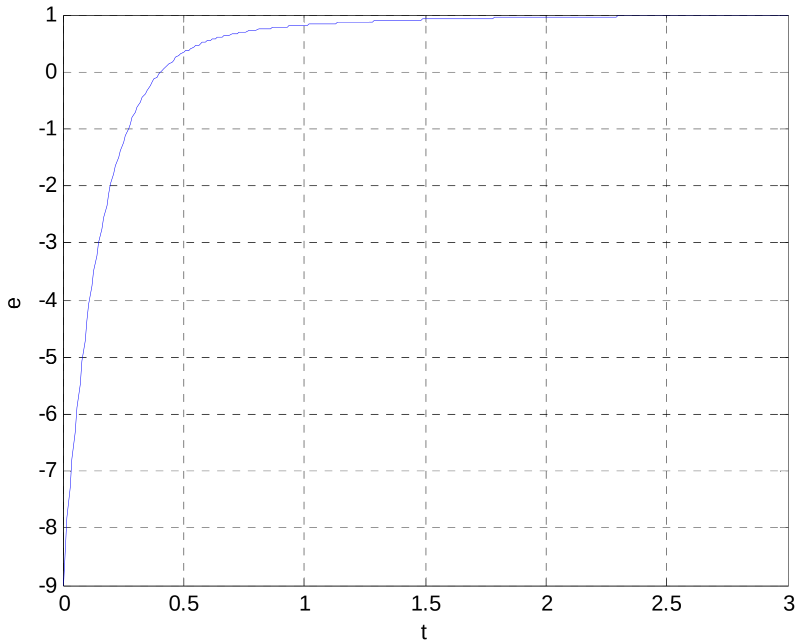
$$
\begin{aligned}
\dot{x}_3 &= -x_3 + u \\
y &= x_3
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema retroazionato



dove α è un parametro reale e L(s) è la funzione di trasferimento di un sistema del secondo ordine. In figura è disegnata la risposta dell'errore e(t) al segnale di ingresso $y^0(t) = -9(ram(t) + e^t)$ quando α=1.



2.1 Si ricavi L(s).

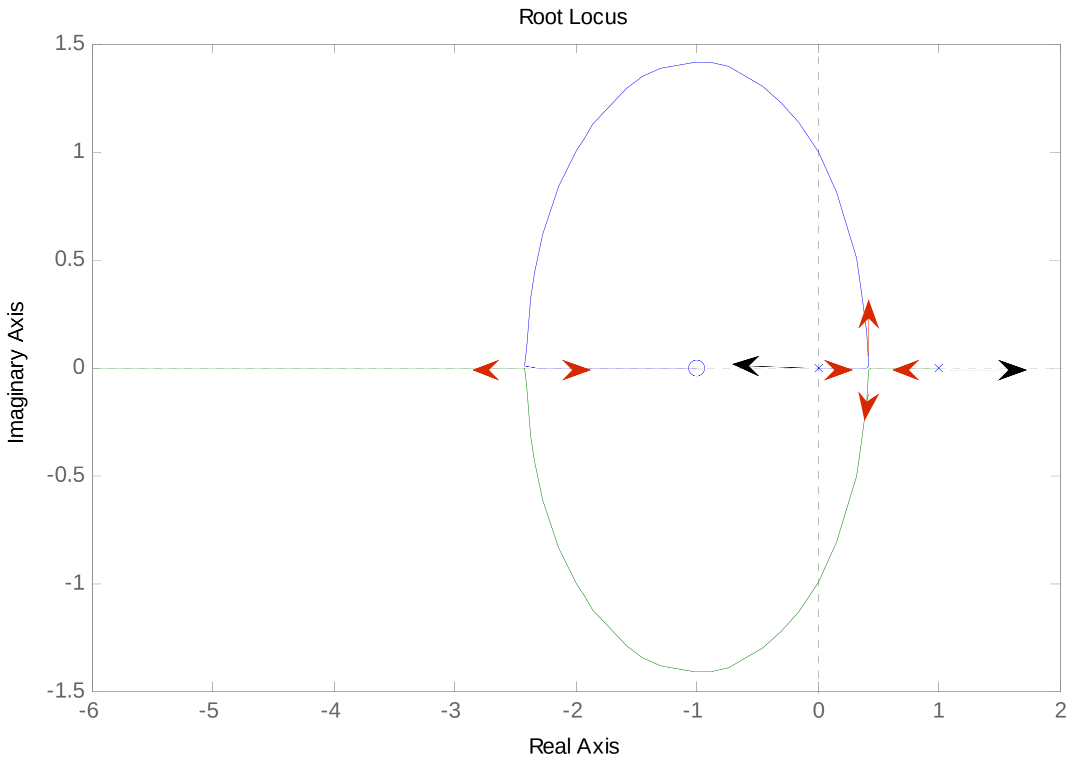
2.2 Si tracci il luogo delle radici in funzione di α e si discuta la stabilità del sistema retroazionato

SOLUZIONE

Si noti che e(∞) è finito e quindi L(s) deve contenere un polo in s=1, cioè il polo del segnale di ingresso e^t. Deve inoltre contenere un integratore (altrimenti l'errore dovuto alla rampa andrebbe all'infinito). Infine il guadagno generalizzato μ di L(s) deve essere -9 (l'errore a regime dovuto alla rampa è -9/μ). Quindi

$L(s) = \dfrac{9(1+s\tau)}{s(s-1)}$ → Il polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso è: $s^2 + s(9\tau - 1) + 9$.

Osservando il tempo di assestamento si può scegliere τ=1. Quindi $L(s) = \dfrac{9(1+s)}{s(s-1)}$.

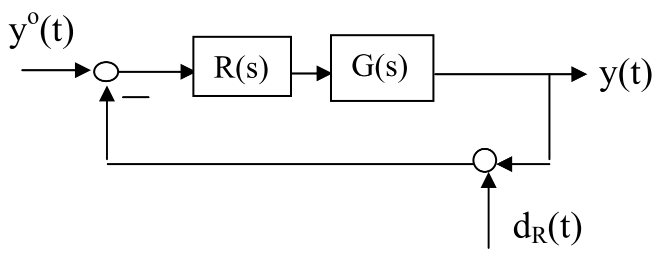


$s^2 - s + 9\alpha(s+1) = s^2 + s(9\alpha - 1) + 9\alpha$. Per α>1/9 il sistema retro azionato è asintoticamente stabile.

ESERCIZIO 3

Si faccia riferimento al sistema di controllo, dove

$$G(s) = 1000\frac{10-s}{(s+10)(s+20)(s+50)}$$



Sia $y^0(t) = sca(t)$ e $d_R(t) = \sin(10t)$. Si sintetizzi un regolatore R(s) in modo tale che:

- $|e_\infty|_{max} < 0.2$
- $\omega_c > 1$ r/s
- $\phi_m > 60^o$

SOLUZIONE

La condizione sull'errore (scegliendo tipo zero del regolatore) è:

$\frac{1}{1+\mu_R} + |L(j10)| < 0.2$ e quindi ad esempio $\mu_R > 10$, $|L(j10)| < 0.1$. Scegliendo $\omega_c \cong 1$ e tagliando a -20 db per decade si può scegliere $R(s) = 10\frac{1+s/20}{1+10s}$ e quindi

$L(s) = 10\frac{1-s/10}{(1+10s)(1+s/10)(1+s/50)}$ col che il margine di fase è di circa 90 gradi.

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema a tempo discreto:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \alpha & 2 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

4.1 Si studi la stabilità interna ed esterna (BIBO) del sistema in funzione di α.

4.2 Si ponga a=0 e determini l'espressione analitica della risposta all'impulso g(k) del sistema.

SOLUZIONE

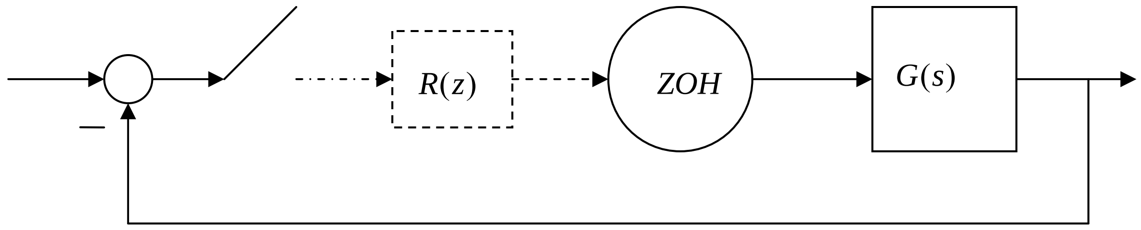
4.1 La matrice A non dipende da α e il polinomio caratteristico è: $z^2 - 0.5z - 0.5 = (z-1)(z+0.5)$. Quindi il sistema non è asintoticamente stabile (è semplicemente stabile per ogni α). La funzione di trasferimento è: $G(z) = \dfrac{(\alpha+2)z + 4 - \alpha/4}{(z-1)(z+0.5)}$. Per α=-8 si ha $G(z) = \dfrac{-6z+6}{(z-1)(z+0.5)} = \dfrac{-6}{z+0.5}$ e quindi il sistema è BIBO stabile.

4.2 La risposta all'impulso è l'antitrasformata di $G(z) = \dfrac{2z+4}{(z-1)(z+0.5)} = \dfrac{4}{z-1} + \dfrac{-2}{z+0.5}$ e quindi

$$g(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ 4 - (-0.5)^{k-1}, & k = 1,2,\ldots.. \end{cases}$$

ESERCIZIO 5

Si consideri il sistema ibrido



dove $G(s) = \frac{\mu}{s}$, $\mu > 0$, $R(z) = \frac{1}{z}$
e il campionatore e il mantenitore operano in fase e sincronia con periodo comune T>0.

Si studi la stabilità del sistema di controllo in funzione di (μ,T) (punto di vista digitale) e si analizzi poi il risultato di robustezza della stabilità attraverso il "punto di vista analogico".

SOLUZIONE

Il sistema a segnali campionati corrispondente a G(s) è $G^*(z) = \frac{\mu T}{z-1}$ e quindi l'equazione caratteristica è $z^2 - z + \mu T = 0$. Le radici sono all'interno del cerchio di raggio uno se e solo se μT<1. Dal punto di vista analogico la funzione d'anello è

$L(s) = \frac{\mu}{s} e^{-sT} e^{-sT/2}$, con $\omega_c = \mu$. Quindi il margine di fase "equivalente" sotto le ipotesi del teorema del campionamento è $\phi_M = \frac{\pi}{2} - \frac{3\mu T}{2} = \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \mu T\right)$.

ESERCIZIO 6

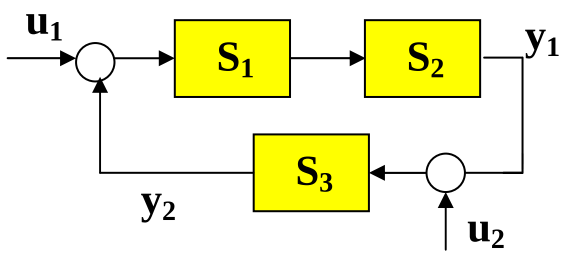
6.5 Con riferimento alla trasformata di Laplace $V(s)=\dfrac{4(s+2)}{(s^2+10)}$ di un segnale *v(t)* si risponda alle domande seguenti:

4.1 Il segnale è limitato per t>0	SI **X**	NO □
4.2 Il segnale converge a zero per $t \to 0$	SI □	NO **X**
4.3 Il segnale è periodico	SI **X**	NO □
4.4 La derivata in $t=0^+$ del segnale è positiva	SI **X**	NO □

6.6 Gli stati di equilibrio per $u(k)=\bar{u}\neq 0$ del sistema di equazione di stato $x(k+1)=f(x(k),u(k))$ sono le soluzioni $\bar{x}$ dell'equazione

- ❑ $0 = f(\bar{x},\bar{u})$
- ❑ $\bar{x} = f(0,\bar{u})$
- **X** $\bar{x} = f(\bar{x},\bar{u})$
- ❑ $\bar{x} = f(\bar{x},0)$

6.7 Con riferimento allo schema seguente,



la matrice di trasferimento dagli ingressi u_1 e u_2 alle uscite y_1 e y_2 è (scrivere SI per quella scelta):

$$G(s)=\frac{1}{1-S_1S_2S_3}\begin{bmatrix} S_1S_2 & S_1S_2S_3 \\ S_1S_3 & S_3 \end{bmatrix}$$

$$G(s)=\frac{1}{1-S_1S_2S_3}\begin{bmatrix} S_1S_2 & S_1S_2S_3 \\ S_1S_2S_3 & S_3 \end{bmatrix} \qquad SI$$

$$G(s)=\frac{1}{1-S_1S_2S_3}\begin{bmatrix} S_1 & S_1S_2S_3 \\ S_1S_2S_3 & S_3 \end{bmatrix}$$

$$G(s)=\frac{1}{1-S_1S_2S_3}\begin{bmatrix} S_1S_2 & S_1S_2 \\ S_1S_2S_3 & S_3 \end{bmatrix}$$