Fondamenti di Automatica

Allievi in Ingegneria Elettrica - Prof. P. Colaneri

Appello del 21 Luglio 2014

Cognome ___________________________________

Nome ______________________________________

N° di Matricola ______________________________

____

Firma

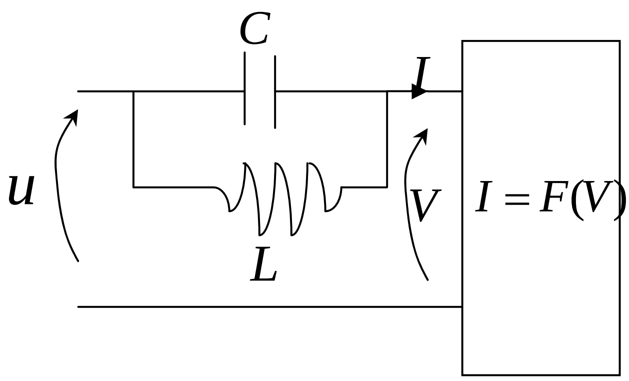
Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni.

Questo fascicolo contiene 5 esercizi.

Si prega di non allegare alcun foglio.

ESERCIZIO 1

Si consideri la rete elettrica in Figura:



dove $F(V) = V^3 + \alpha V$ con $\alpha \neq 0$.

1.1 Si scrivano le equazioni del sistema retro azionato in forma di stato.
1.2 Si determini gli stati di equilibrio associati all'ingresso costante $u = 0$.
1.3 Si studi la stabilità degli stati di equilibrio ricavati in funzione del parametro positivo α.

SOLUZIONE

Indicando con x_1 la tensione sul condensatore e x_2 la corrente che passa nell'induttore abbiamo:

$$
\begin{aligned}
&C\dot{x}_1 + x_2 = I \\
&L\dot{x}_2 = x_1 \\
&V + x_1 = u \\
&I = V^3 + \alpha V
\end{aligned}
$$

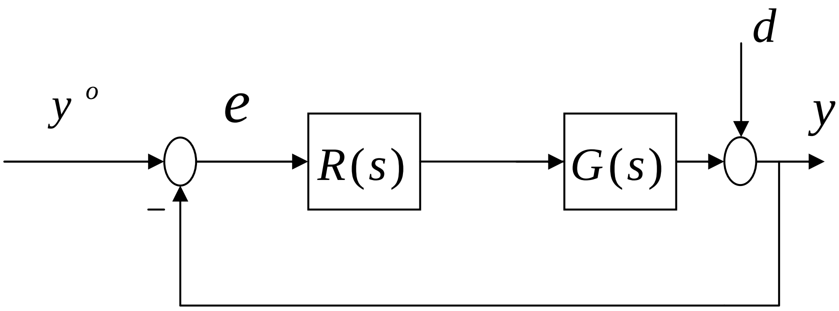
Quindi, con $u = 0$ si ha

$$
\begin{aligned}
&C\dot{x}_1 + x_2 = -x_1^3 - \alpha x_1 \\
&L\dot{x}_2 = x_1
\end{aligned}
$$

Per qualunque valore di α abbiamo un unico equilibrio, che è l'origine. Il sistema linearizzato intorno all'origine ha come matrice dinamica $A = \begin{bmatrix} -\alpha/C & -1/C \\ 1/L & 0 \end{bmatrix}$. Quindi l'origine è asintoticamente stabile per α>0, ed è instabile per α<0.

ESERCIZIO 2

Si consideri lo schema a blocchi seguente



dove $R(s) = \dfrac{1-s}{s+1}$ e $G(s) = \dfrac{\mu}{s(s+1)}$, $y^0(t) = ram(t)$, $d(t) = \sin(t)$, $\mu > 0$.

2.1) Si studi la stabilità del sistema in funzione di $\mu > 0$.

2.2) Si determini l'espressione analitica della risposta **asintotica** dell'errore e in funzione di $\mu > 0$, e si discuta il risultato.

SOLUZIONE (sketch)

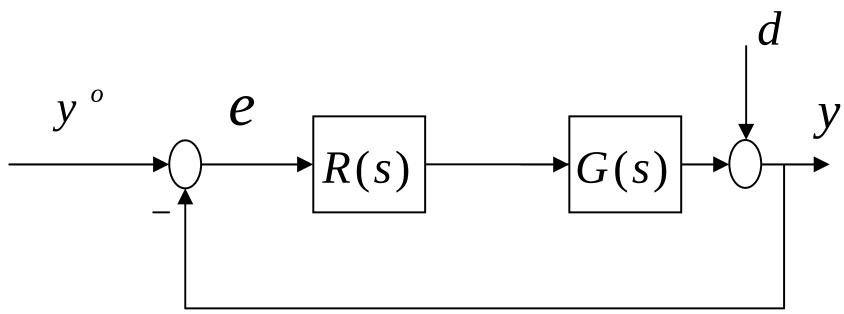
La funzione d'anello è: $L(s) = \dfrac{\mu(1-s)}{s(s+1)^2}$ e quindi il polinomio caratteristico è:

$s^3 + 2s^2 + s(1-\mu) + \mu$ da cui segue che il sistema è asintoticamente stabile per $\mu \in (0, \frac{2}{3})$. Per questi valori di μ l'errore converge al segnale periodico (teorema della risposta periodica, teorema del valor finale) seguente:

$$\frac{1}{|1+L(j)|}\sin(t + \angle\frac{-1}{1+L(j)}) - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{0.5\mu^2 - \mu + 1}}\sin(t + \arctan\frac{0.5\mu}{1-0.5\mu}),$$

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema di controllo

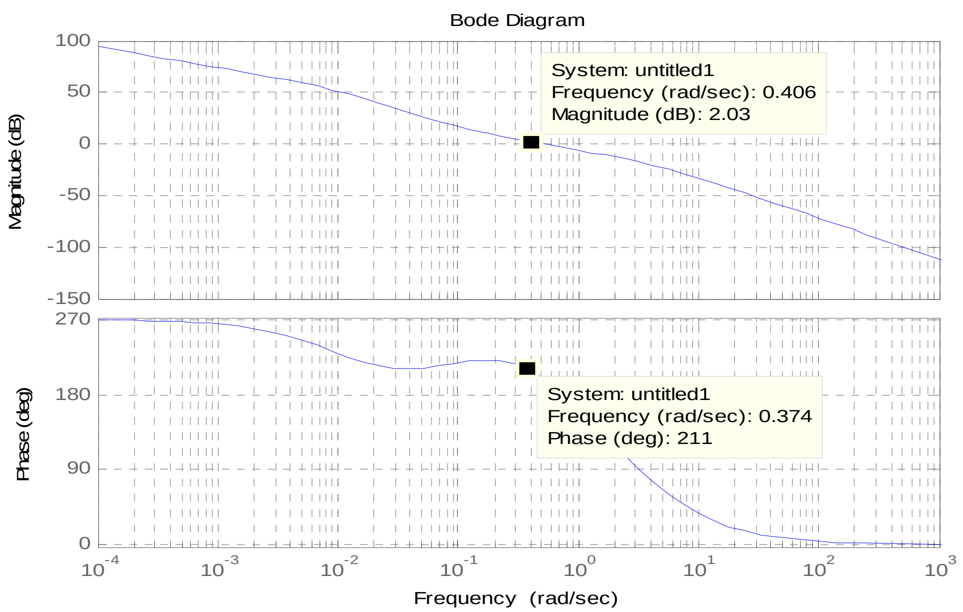


dove $G(s)=\dfrac{5(1-s)}{s(s+1)(s+5)}$, $d(t)=ram(t)$. Si ricavi un regolatore (il più semplice possibile) tale che:

L'errore $e(t)$ a transitorio esaurito sia minore di 0.2.
Il margine di fase sia almeno di 30 gradi.
Il tempo di assestamento all'1% sia al massimo di 15 sec.

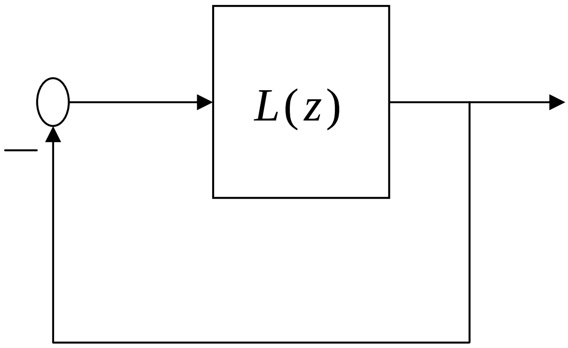
SOLUZIONE
Per il requisito sull'errore, il guadagno d'anello deve essere maggiore di 5. Scegliendo poi una rete ritardatrice si ha, ad esempio:

$R(s)=\dfrac{5(10s+1)}{(100s+1)}$ che assicura guadagno d'anello uguale a 5, circa 30 gradi di margine di fase e una pulsazione critica di 0.4 radianti (e quindi un tempo di assestamento all1% di meno di 15 sec).



ESERCIZIO 4

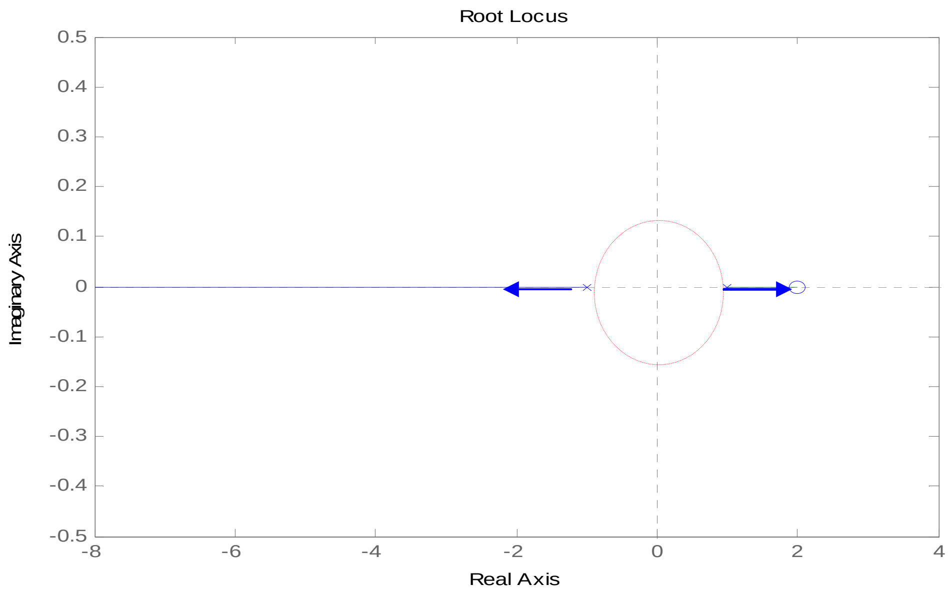
Si consideri lo schema blocchi del sistema a tempo discreto in figura



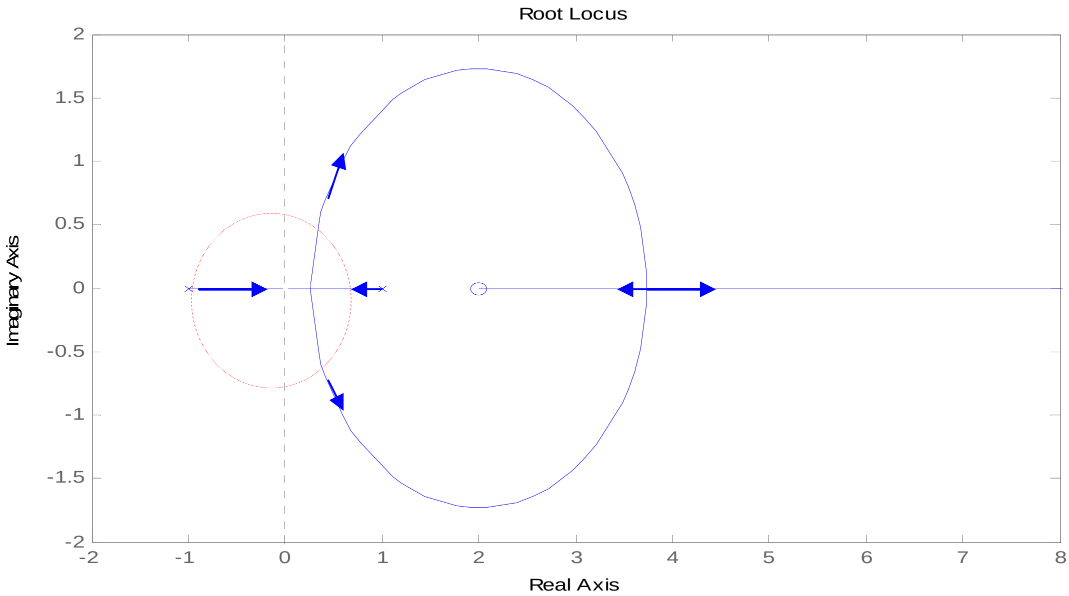
dove $L(z) = \dfrac{\alpha(z-2)}{z^2-1}$. Si studi la stabilità del sistema retro-azionato in funzione di α, e si traccino i due rami (diretto e inverso) del luogo delle radici.

SOLUZIONE

Il polinomio caratteristico è $z^2 + \alpha z - 1 - 2\alpha$. Con la trasformazione bilineare $z = \dfrac{1+s}{1-s}$ si ha $(1+s)^2 + \alpha(1+s)(1-s) - (1+2\alpha)(1-s)^2 = -3\alpha s^2 + 4(1+\alpha)s - \alpha$. Si ha dunque stabilità asintotica per $\alpha \in (-1,0)$. Il luogo delle radici diretto è il seguente:

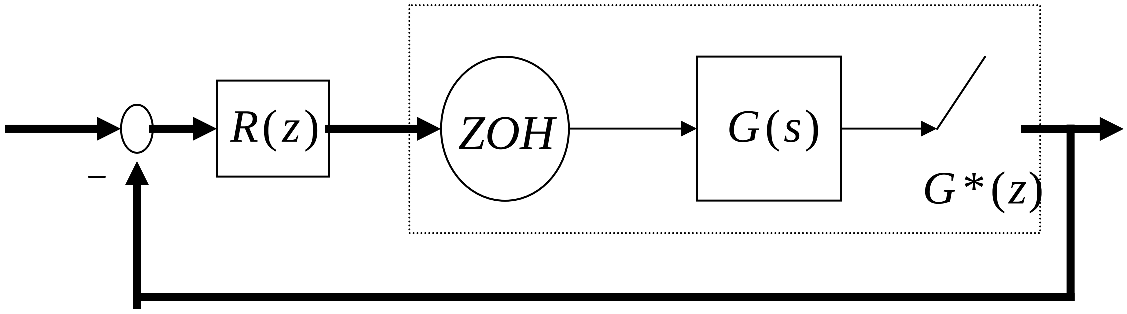


Si vede che il sistema è instabile per ogni α>0. Il luogo delle radici inverso è invece il seguente:



dove si vede che il luogo rimane all'interno del cerchio di raggio uno fino a quando le due radici giungono sulla circonferenza di raggio uno. Questo avviene quando il termine noto del polinomio caratteristico è 1, cioè per α=-1. I punti di intersezione sull'asse reale sono in $x = 2 \mp \sqrt{3}$ in corrispondenza di $\alpha = -1 \pm 0.5\sqrt{3}$, rispettivamente.

ESERCIZIO 5



Con riferimento al sistema di controllo digitale riportato in figura (il campionatore - ideale a cadenza uniforme - e il mantenitore ideale - di ordine zero – operano in sincronia e in fase con periodo T), si enuncino, a parole, i passi che conducono al progetto di un regolatore digitale secondo il "punto di vista digitale" (sistema a stati campionati, traduzione delle specifiche di stabilità e prestazione in vincoli di interpolazione, etc…).

SOLUZIONE

La funzione $G^*(z) = C(zI - e^{AT})^{-1}\int_0^T e^{A\tau}d\tau\, B + D$ rappresenta il sistema a segnali campionati corrispondente a $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. Si determina la funzione di sensitività complementare desiderata $F^o(z)$ in modo tale da assicurare la **stabilità** del sistema retro-azionato, la **causalità** del regolatore e le **prestazioni** ricercate. Per la causalità, $F^o(z)$ deve avere grado relativo maggiore o uguale a $G^*(z)$. Per la stabilità interna $F^o(z)$ deve avere poli all'interno della circonferenza di raggio uno e evitare che il regolatore cancelli poli/zeri instabili di $G^*(z)$, imponendo i vincoli di interpolazione $F^o(p) = 1$ [$F^o(\xi) = 1$] per ogni polo [zero] instabile di $G^*(z)$. Per le prestazioni, ad esempio errore nullo a fronte di un riferimento allo scalino, si deve imporre $F^o(1) = 1$. La posizione dei poli di $F^o(z)$ è invece responsabile della velocità di risposta, ad esempio se si vuole un comportamento di tipo FIR tutti i poli di $F^o(z)$ devono essere imposti nell'origine.
Una volta definita $F^o(z)$ con tali caratteristiche, il regolatore si ottiene dalla formula inversa, cioè

$$R(z) = \frac{1}{G^*(z)}\frac{F^o(z)}{1 - F^o(z)}$$