Fondamenti di Automatica

Allievi del CL in Ingegneria Elettrica

Prima Prova 2013/2014 - 26 Novembre 2013

Cognome ____

Nome ____

N° di Matricola ___________________________________

____
Firma

La prova dura 120 minuti.

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni.

Questo fascicolo contiene 5 esercizi numerici.

Si prega di non allegare alcun foglio e di non utilizzare il retro delle singole pagine.

Esercizio 1

Per il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t)e^{-x_2(t)} + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + x_3(t)e^{-x_3(t)} + u(t) \\ \dot{x}_3(t) = -x_3(t) + x_1(t)e^{-x_1(t)} + u(t) \end{cases}$$

Si ricavino lo stato (o gli stati) di equilibrio associati all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 0$.

1.1. Si studi la stabilità (asintotica e semplice) del sistema linearizzato intorno a tale (tali) stati di equilibrio.

1.2. Si studi la stabilità asintotica dello stato (stati) di equilibrio trovati.

Svolgimento

Ponendo a zero le derivate si ha: $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 e^{-\bar{x}_2}$, $\bar{x}_2 = \bar{x}_3 e^{-\bar{x}_3}$, $\bar{x}_3 = \bar{x}_1 e^{-\bar{x}_1}$ da cui $\bar{x}_3(e^{-\bar{x}_1-\bar{x}_2-\bar{x}_3}) = \bar{x}_3$ e cioè $\bar{x}_3 = 0$ oppure $\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1 = 0$. Dalla prima relazione segue che $\bar{x}_1 = 0$ e $\bar{x}_2 = 0$ e quindi uno stato di equilibrio è l'origine, cioè $\bar{x} = 0$. Dalla seconda relazione, per sostituzione, si ottiene $\bar{x}_3(e^{-\bar{x}_3-\bar{x}_2} + 1 + e^{-\bar{x}_3}) = 0$, cioè ancora $\bar{x}_3 = 0$. In conclusione l'unico stato di equilibrio è l'origine.

Il sistema linearizzato intorno all'origine risulta

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1(t) = -\delta x_1(t) + \delta x_2(t) + \delta u(t) \\ \delta\dot{x}_2(t) = -\delta x_2(t) + \delta x_3(t) + \delta u(t) \\ \dot{x}_3(t) = -\delta x_3(t) + \delta x_1(t) + \delta u(t) \end{cases}$$

e quindi $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ che ammette polinomio caratteristico $s(s^2 + 3s + 3)$. Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$. Quindi il sistema linearizzato è semplicemente stabile ma non asintoticamente stabile. Poiché il sistema linearizzato ha un auto valore nell'origine (e gli altri a parte reale negativa) nulla si può dire sulla stabilità asintotica dell'origine del sistema non lineare.

Esercizio 2

Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$.
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

2.1) Si studi la stabilità asintotica, la stabilità BIBO, la raggiungibilità e la osservabilità in funzione dei parametri α e β.

2.2) Si ponga poi α=1, β=0 e si scriva l'espressione analitica della risposta **asintotica** del sistema quando u(t)=1-sin(t).

Svolgimento

La funzione di trasferimento è:

$$G(s) = -\frac{s+1}{s^3 + 3s^2 + (2-\beta+\alpha)s + \alpha - 2\beta}$$

Applicando il criterio di Routh Hurwitz si ha che la condizione di stabilità asintotica è $\beta < 2\alpha + 6$ AND $\beta < \frac{\alpha}{2}$.

Si ha raggiungibilità & osservabilità quando il denominatore rimane di grado 3, cioè quando $\beta \neq 0$.

Per $\beta = 0$ si ha $\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -\alpha+\beta \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ che ha rango 3 per ogni α e β. Quindi il sistema è

raggiungibile per ogni (α, β) ed è osservabile per ogni (α, β) con $\beta \neq 0$. Infine si noti che l'eventuale cancellazione si avrebbe con s=-1, che è nel semipiano sinistro e quindi la BIBO stabilità si ha laddove si ha la stabilità asintotica, cioè per $\beta < 4\alpha - 6.$ AND $\beta < \frac{\alpha}{2}$.

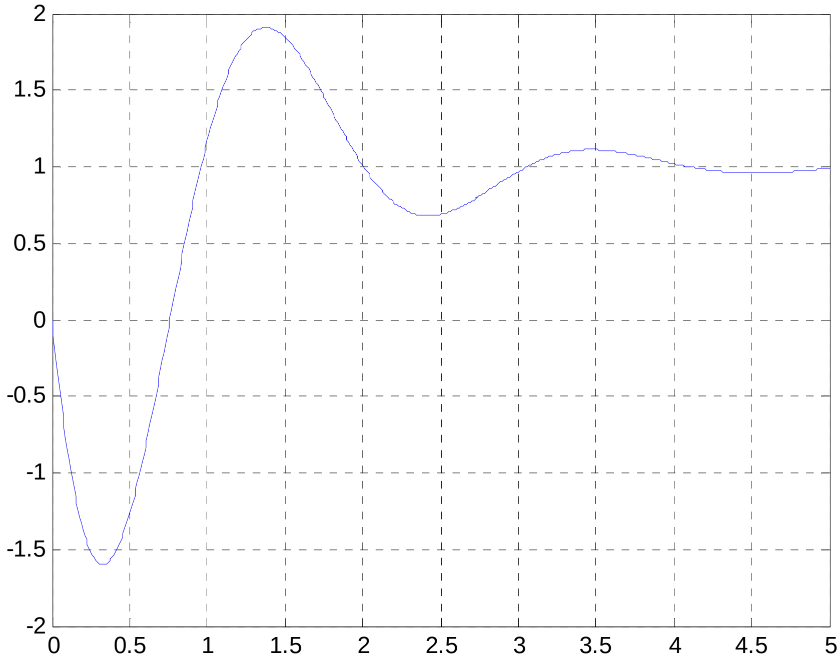
Per $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ la funzione di trasferimento diventa

$G(s) = -\frac{1}{(s+1)^2}$ che ha guadagno statico -1. Quindi la risposta asintotica è:

$$y_p(t) = -1 - |G(j)| \sin(t + \arg(G(j))) = -1 - 0.5\sin(t - \pi/2)$$

Esercizio 3

Si consideri in figura la risposta allo scalino unitario di un sistema **del secondo ordine** con funzione di trasferimento G(s):



3.1) Si ricavi una G(s) compatibile con la risposta data.

3.2) Si ricavino valori compatibili dei parametri a, b, c, d tali che la risposta sia quella del sistema (ingresso u, uscita y) descritto da $\frac{d^2}{dt^2}y + a\frac{d}{dt}y + by = c\frac{d}{dt}u + du$

Svolgimento

Dalla figura si vede che la funzione di trasferimento cercata ha due poli stabili complessi coniugati del tipo $-\alpha \pm j\beta$, con α>0. L'ordinata che corrisponde al primo massimo (rispetto al valore di regime) è circa 0.9 mentre quella che corrisponde al secondo massimo è 0.1 (rispetto al valore di regime). Inoltre l'intervallo di tempo tra i primi due valori di massimo è circa T=2.1. Quindi $0.9e^{-\alpha T} = 0.1$ col che risulta $\alpha \cong 1$. Poiché come sappiamo $T = 2\pi / \beta$ risulta anche $\beta \cong 3$. Inoltre il guadagno statico risulta uguale a 1 e la derivata nell'origine è negativa, il che corrisponde alla presenza di uno zero reale maggiore di zero. conclusione $G(s) = \frac{10(1 - s\tau)}{s^2 + 2s + 10}$ dove il valore della costante positiva τ è uguale ad un decimo del valore assoluto della derivata della risposta allo scalino nell'origine. Ad esempio il valore τ=1 è compatibile con la risposta in figura.

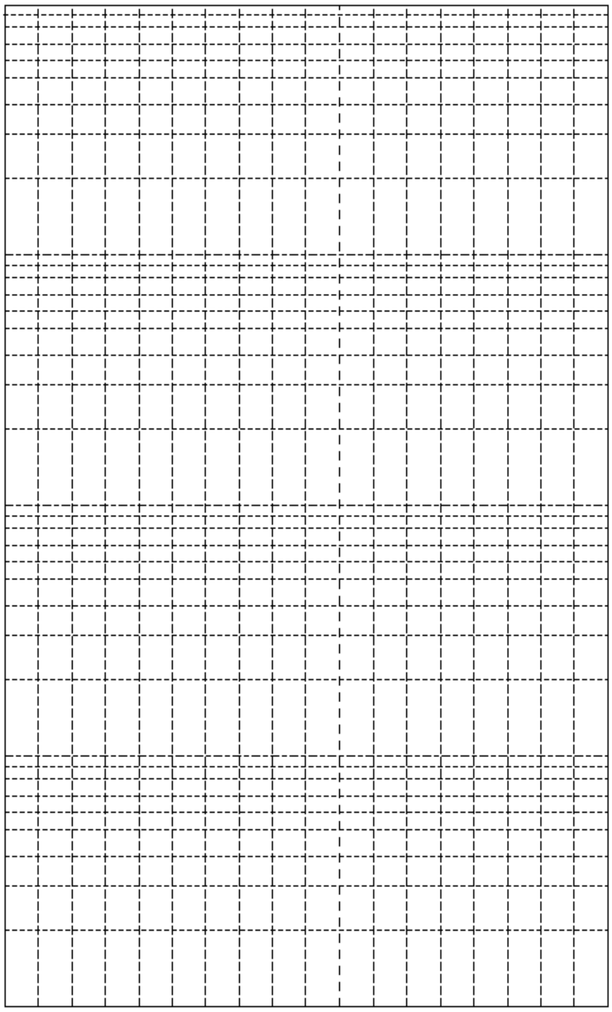
Infine si noti che $\frac{d^2}{dt^2}y + a\frac{d}{dt}y + by = c\frac{d}{dt}u + du$ corrisponde alla funzione di trasferimento

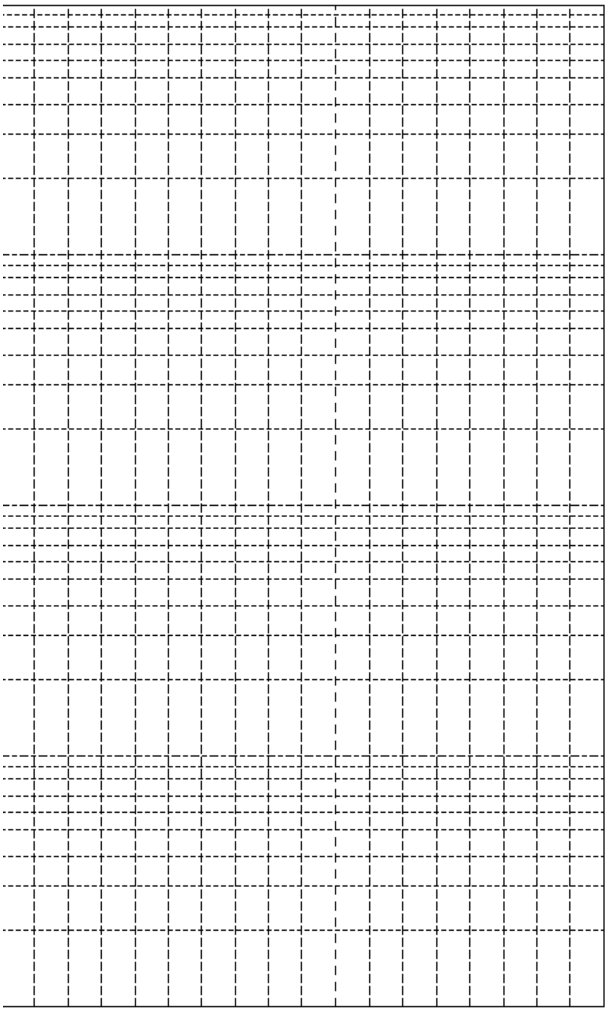
$G(s) = \dfrac{cs + d}{s^2 + as + b}$ e quindi $a = 2, b = 10, c = -10, d = 10$.

Esercizio 4

4.1 Si traccino i diagrammi di Bode del modulo e della fase associati alla funzione di trasferimento

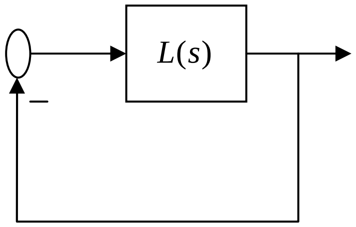
$$L(s) = \frac{20(s+1)(s-5)}{s(s-10)(s+10)}$$



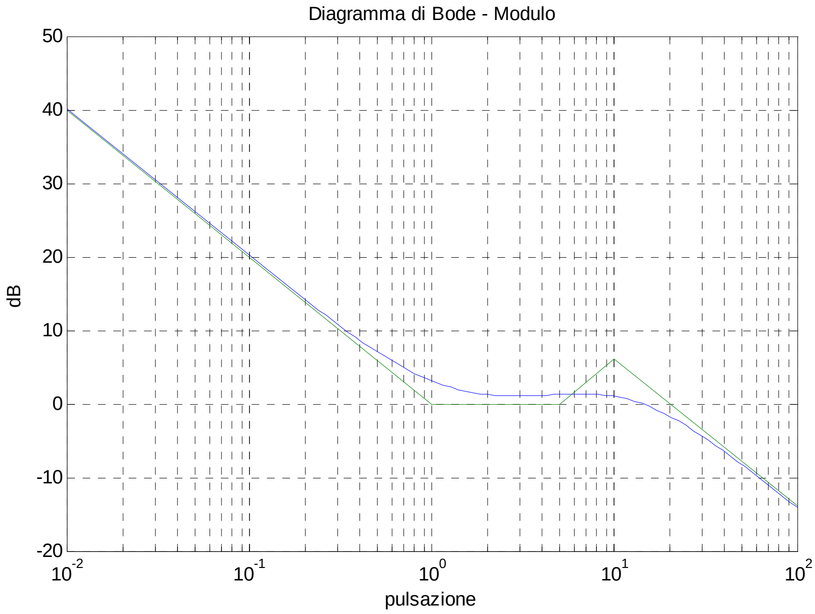


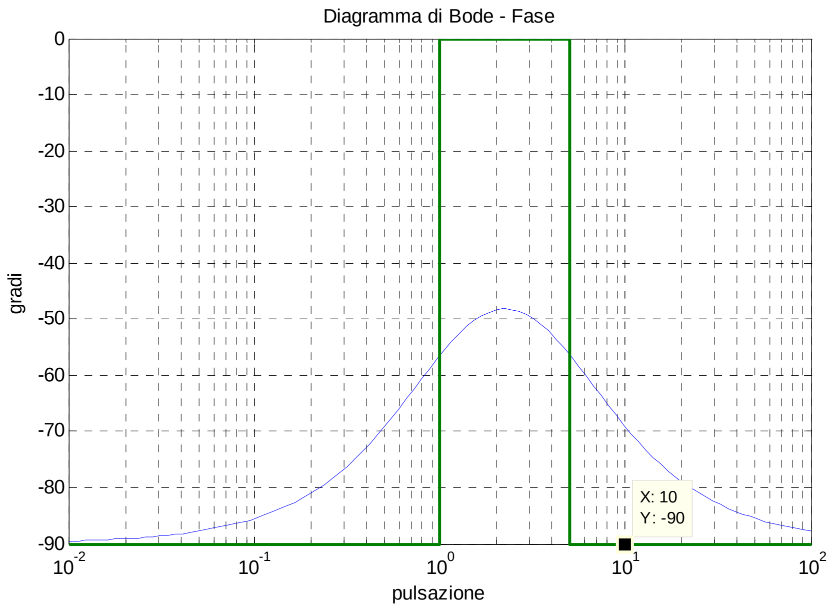
Politecnico di Milano
Dipartimento di Elettronica e Informazione

4.2 Si disegni il diagramma di Nyquist di L(s) e si dica, giustificando la risposta in base al criterio di Nyquist, se il sistema retroazionato seguente è asintoticamente stabile.

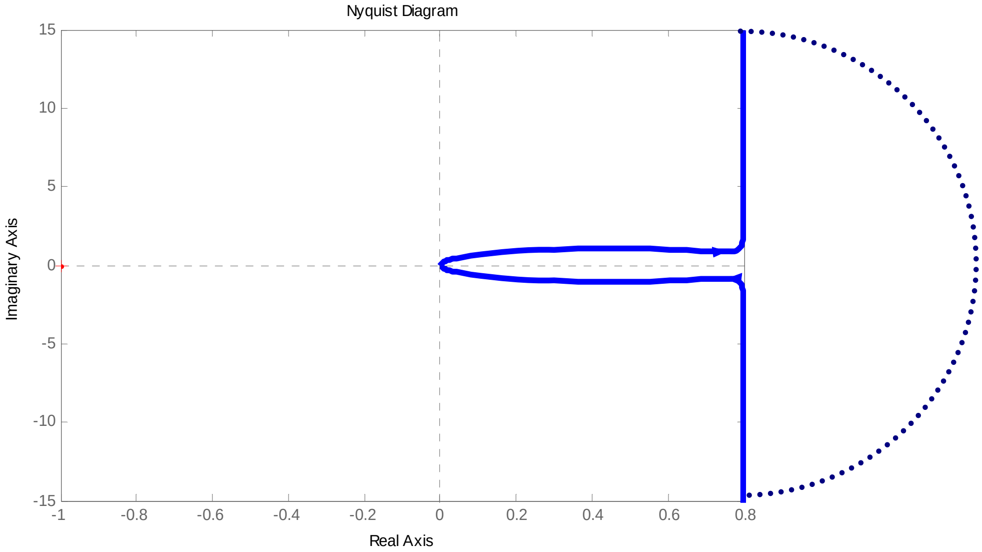


Svolgimento



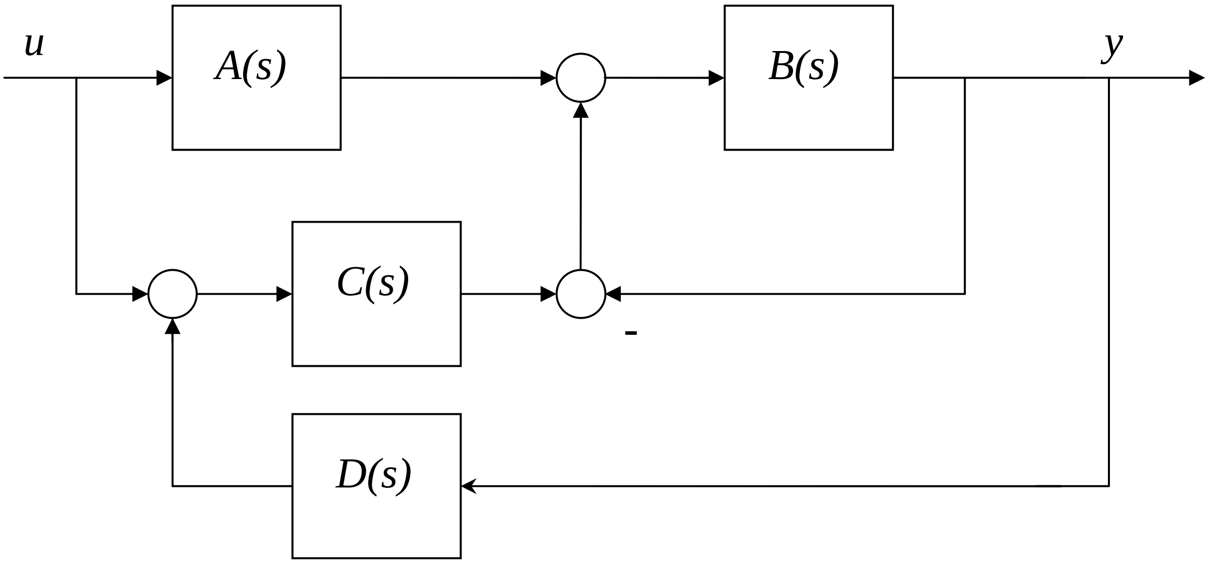


Zero giri intorno a -1. Il sistema retroazionato e' instabile (criterio di Nyquist).


Nyquist Diagram
15
10
5
0
-5
-10
-15
Imaginary Axis
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
Real Axis

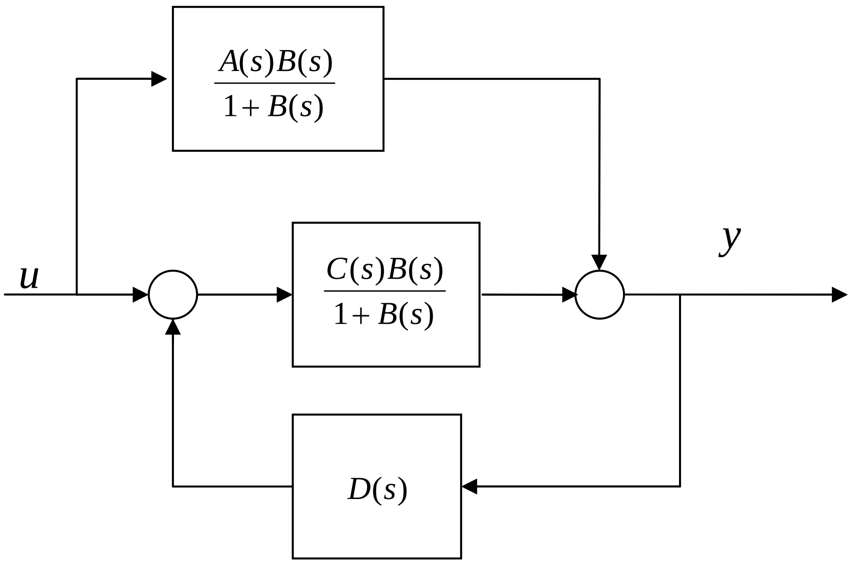
Esercizio 5

Si determini la funzione di trasferimento da u a y con riferimento al sistema descritto dallo schema a blocchi di figura.



Svolgimento

Si noti che lo schema è equivalente allo schema



Quindi la funzione di trasferimento cercata è:

$$\frac{\frac{A(s)B(s)}{1+B(s)}+\frac{C(s)B(s)}{1+B(s)}}{1-\frac{C(s)B(s)D(s)}{1+B(s)}}=\frac{(A(s)+C(s))B(s)}{1+B(s)-C(s)B(s)D(s)}$$