Fondamenti di Automatica

Allievi di Ingegneria Elettrica - Prof. P. Colaneri

Appello 03 Marzo 2015

Cognome ______________________________________

Nome ____

N° di Matricola _________________________________

____

Firma

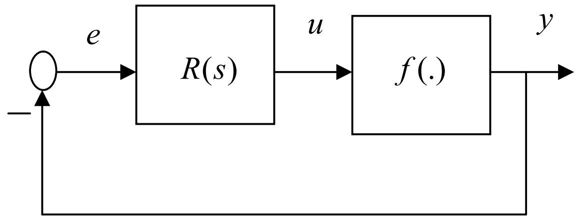
Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni.

Questo fascicolo contiene 5 esercizi.

Si prega di non allegare alcun foglio.

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema non lineare



dove il sistema lineare con funzione di trasferimento R(s) è descritto dalle equazioni di stato

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + e$$
$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_2 + e$$
$$u = x_1 + x_2$$

mentre $y = f(u) = \alpha u^3$ e α è un parametro reale.

Si studi la stabilità asintotica degli equilibri in funzione di α.

.

SOLUZIONE

Il sistema retro-azionato si esprime con le equazioni:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - \alpha(x_1 + x_2)^3$$
$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_2 - \alpha(x_1 + x_2)^3$$

Ponendo a zero le derivate si hanno i seguenti equilibri:

$\bar{x} = 0$ per $\alpha \geq 0$

$\bar{x} = 0$ e $\bar{x} = \pm 0.5\sqrt{\dfrac{-2}{\alpha}}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ per $\alpha < 0$

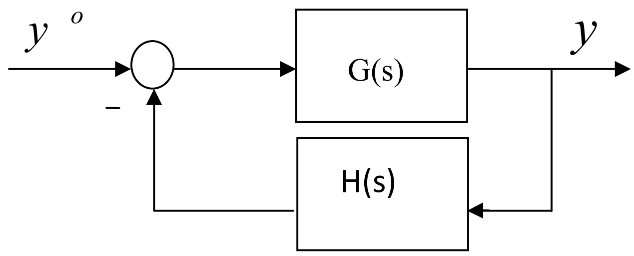
Il sistema linearizzato è descritto dalla matrice :

$$A = \begin{bmatrix} -1 - 3\alpha(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)^2 & 1 - 3\alpha(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)^2 \\ -2 - 3\alpha(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)^2 & -2 - 3\alpha(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)^2 \end{bmatrix}$$

Da cui risulta che $\bar{x} = 0$ è asintoticamente stabile e $\bar{x} = \pm 0.5\sqrt{\dfrac{-2}{\alpha}}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ è instabile.

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema retro-azionato

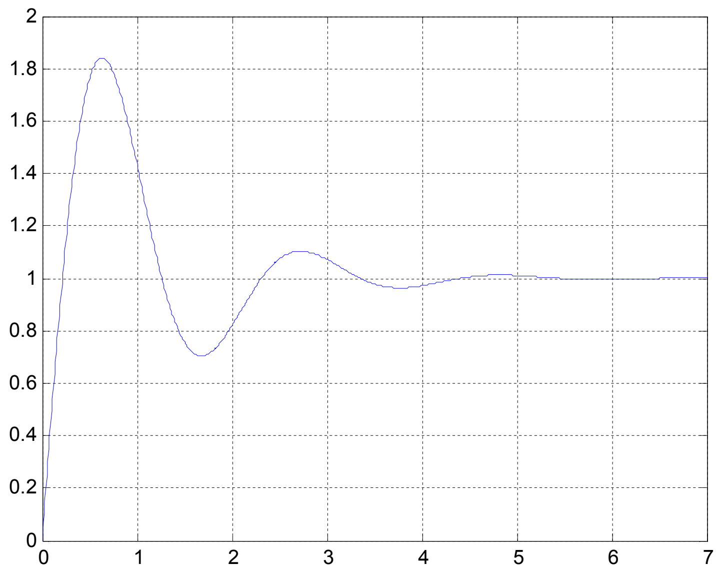


dove $G(s) = \dfrac{5}{s}$ e $H(s) = \dfrac{2}{s+2}$.

2.1) Si dica se il sistema retro-azionato è asintoticamente stabile.
2.2) Si determini l'espressione analitica della risposta y(t) quando $y^o(t)$=sca(t)
2.3) Si tracci il grafico dell'andamento qualitativo di y(t) e se ne discutano le caratteristiche: tempo di assestamento, oscillazioni, valore finale, valore iniziale, valore iniziale della derivata.

SOLUZIONE

La FDT da y^o a y è: $\dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \dfrac{5(s+2)}{s^2+2s+10}$



Valore iniziale=0, valore iniziale delle derivata=5, valore finale=1, coeff. Smorzamento 1/sqrt(10), pulsazione naturale = sqrt(10), Tempo di assestamento all'1% è circa 5 sec.

ESERCIZIO 3

Con riferimento al sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -\alpha & -\alpha \end{bmatrix} x(t)$$

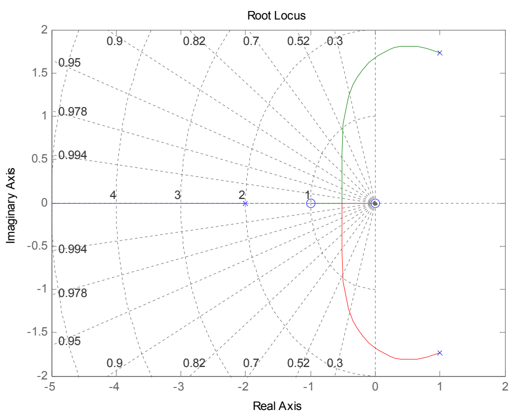
si tracci nel piano complesso il luogo degli autovalori di A, in funzione di α, e si discuta poi la stabilità asintotica del sistema.

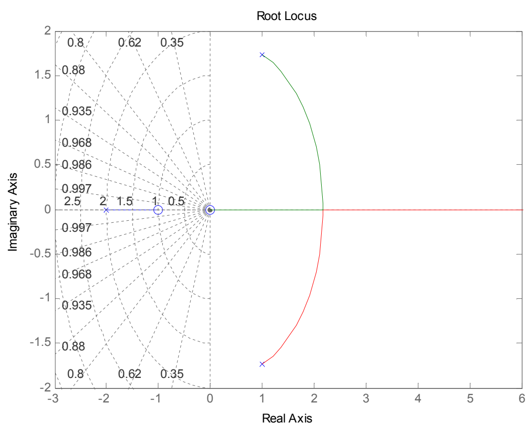
SOLUZIONE

Il polinomio caratteristico è:

$s^3 + \alpha s^2 + \alpha s + 8$.

Applicando il criterio di Routh Hurwitz si conclude che il siustema è asintoticamente stabile per $\alpha > 2\sqrt{2}$. D'altra parte l'equazione caratteristica si può scrivere come $\alpha s(s+1) + s^3 + 8 = 0$, cioè come l'equazione caratteristica di un sistema retro-azionato negativamente (con retroazione unitaria) e funzione d'anello $L(s) = \dfrac{s(s+1)}{s^3+8}$. I poli in anello aperto sono $-2,\ 1 \pm j\sqrt{3}$, gli zeri sono $0,\ -1$.

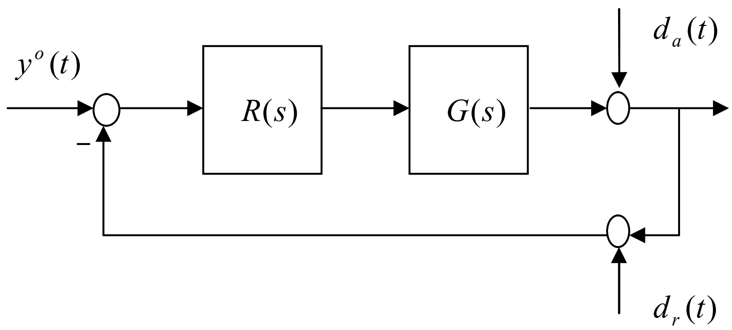




Politecnico di Milano
Dipartimento di Elettronica e Informazione

Politecnico di Milano
Dipartimento di Elettronica e Informazione

ESERCIZIO 4

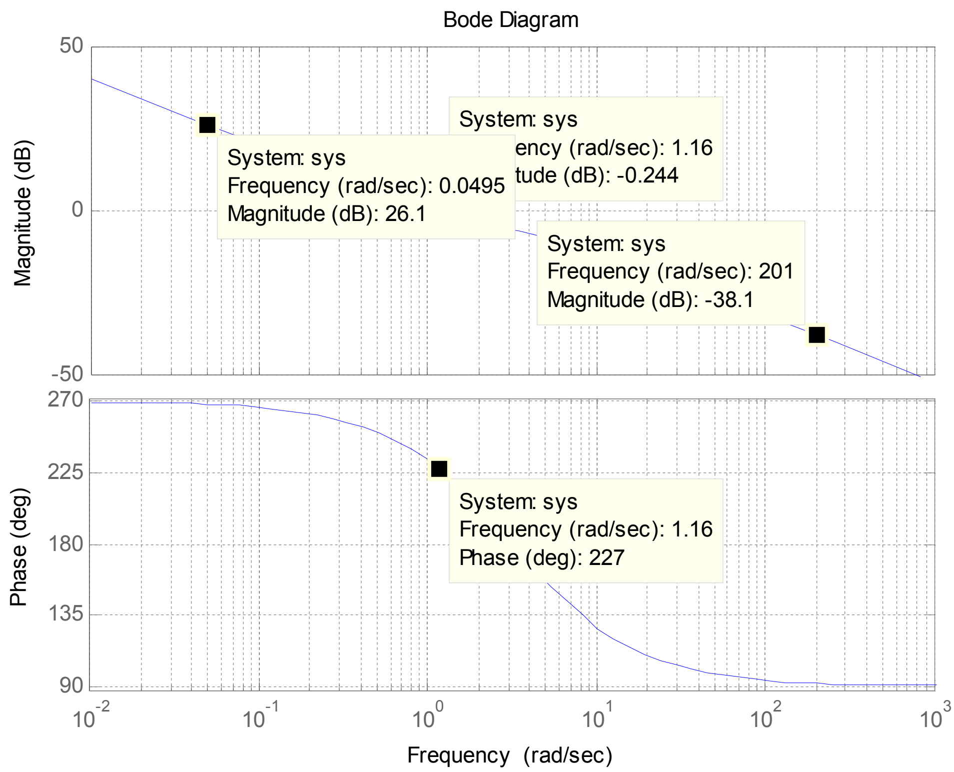


Si consideri il sistema di controllo in figura, dove $G(s) = \dfrac{2-s}{(s+1)(s+5)}$, $y^o(t) = sca(t)$, $d_r(t) = \sin(20t)$, $d_a(t) = \sin(0.05t)$.

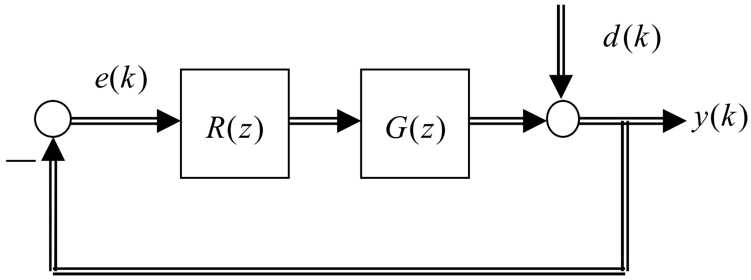
4.1) Si progetti $R(s)$, del minimo ordine possibile, in maniera tale che (i) l'errore a transitorio esaurito sia a media nulla e ampiezza minore di 0.2, (ii) il margine di fase sia almeno di 45 gradi, (iii) la pulsazione critica si almeno di 1 rad/sec.
4.2) Dovendo realizzare un regolatore digitale da R(s), si scelga il periodo di campionamento, discutendone le conseguenze sul sistema di controllo progettato.

SOLUZIONE

$$R(s) = 2.5\frac{s+1}{s} \quad \text{(PI)}$$



5) Si consideri il sistema di controllo a **tempo discreto**



dove $G(z) = \dfrac{z-2}{z(z+1)}$.

5.1 Si ricavi R(z) in maniera tale che l'errore dovuto ad uno scalino sul disturbo sia nullo dopo un numero finito e minimo di passi.

5.2 Si determini la risposta di y(k) allo scalino unitario su d(k).

SOLUZIONE

I vincoli di interpolazione sulla funzione di sensitività complementare $F(z)$ sono:

$F(1) = 1, \quad F(-1) = 1, \quad F(2) = 0$, inoltre grado relativo ≥ 1 e FIR. Quindi, ponendo

$F(z) = \dfrac{(z-2)(az+b)}{z^3}$ risulta $F(z) = -\dfrac{(z-2)(2z+1)}{3z^3}$ da cui $R(z) = -\dfrac{z(2z+1)}{3(z-1)(z+2/3)}$.

(Alternativamente i vincoli di interpolazione sulla funzione di sensitività $S(z)$ *sono* $S(1) = 0, \quad S(-1) = 0, \quad S(2) = 1$*, grado relativo 0 e FIR).*

La funzione di sensitività è: $S(z) = \dfrac{(z^2-1)(z+2/3)}{z^3}$ e quindi y(0)=1, y(1), 2/3, y(2)=-1, y(3)=-2/3, y(4)=0, ……