Fondamenti di Automatica

Allievi in Ingegneria Elettrica - Prof. P. Colaneri

Appello del 6 Luglio 2015

Cognome ____________________________________

Nome _______________________________________

N° di Matricola ______________________________

____

Firma

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni.

Questo fascicolo contiene 5 esercizi.

Si prega di non allegare alcun foglio.

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema non lineare

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_1 x_2 + x_3 u$$
$$\dot{x}_2 = -x_2^3 + x_2 x_3 + x_1 u$$
$$\dot{x}_3 = -x_3^3 + x_3 x_1 + x_2 u$$

1.1 Si determinino gli stati di equilibrio (reali) associati all'ingresso costante $\bar{u} = 0$.
1.2 Si studi la stabilità degli stati di equilibrio ricavati

SOLUZIONE

Abbiamo:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

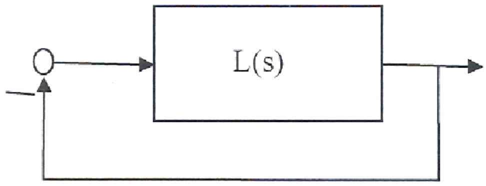
La matrice del sistema linearizzato è

$$A = \begin{bmatrix} -3\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2 & \bar{x}_1 & \bar{u} \\ \bar{u} & -3\bar{x}_2^2 + \bar{x}_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \bar{u} & -3\bar{x}_3^2 + \bar{x}_1 \end{bmatrix}$$

Quindi per lo stato di equilibrio nullo non si può concludere nulla con il metodo della linearizzatione, mentre l'altro stato di equilibrio è asintoticamente stabile essendo. Infatti il polinomio caratteristico della matrice uguale è $s^3 + 6s^2 + 12s + 7$ e le radici hanno tutte parte reale minore di zero (criterio di Routh-Hurvitz).

ESERCIZIO 2

Si consideri lo schema a blocchi seguente



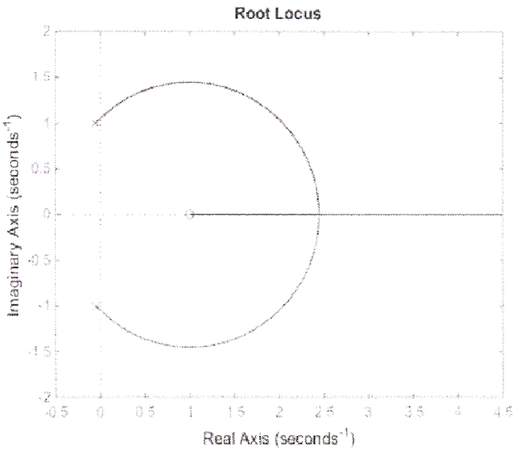
dove $L(s) = \mu \dfrac{1-s}{s^2+1}$.

2.1) Si disegni il luogo delle radici del polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso in funzione di μ .

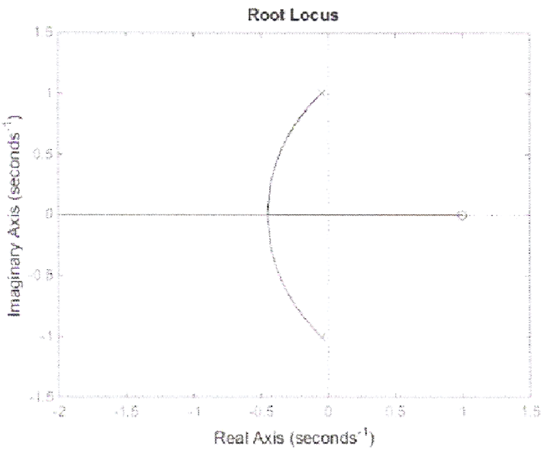
2.2) Si studi la stabilità del sistema retroazionato attraverso il luogo delle radici e il criterio di Nyquist.

SOLUZIONE (sketch)

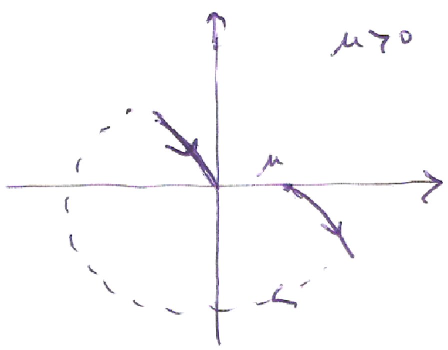
$\mu>0$

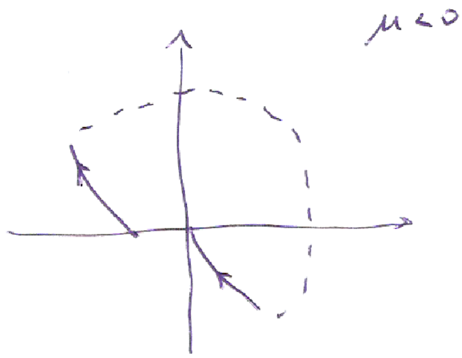


$\mu<0$



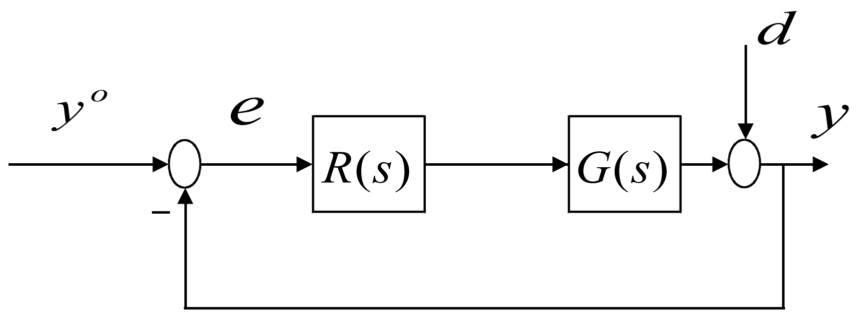
Polar plot





ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema di controllo

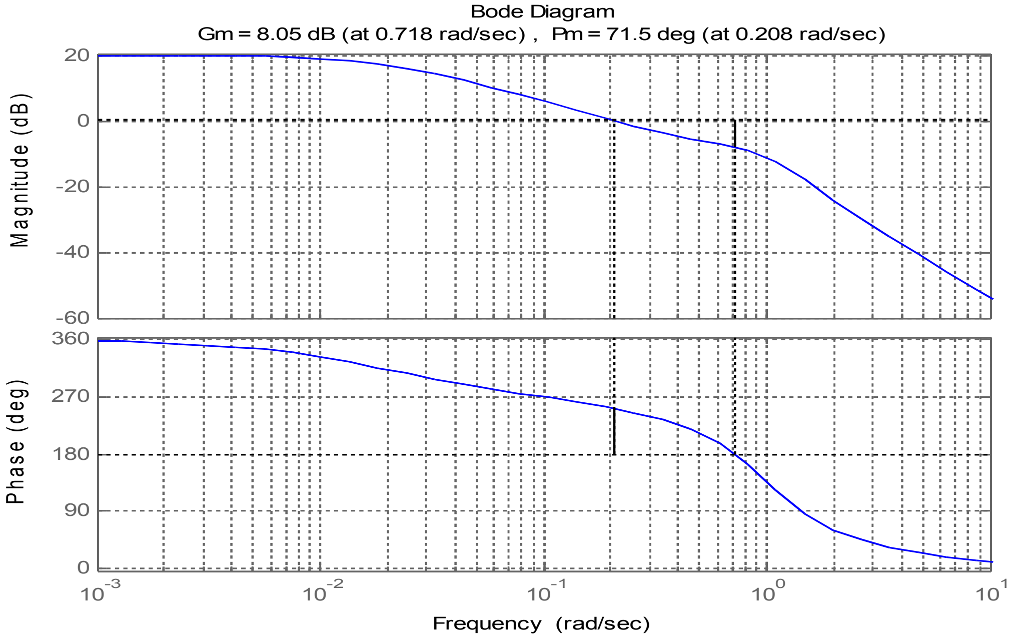


dove $G(s) = \dfrac{10(1-s)}{s^2+s+1}$, $d(t) = \pm sca(t)$, $y^o(t) = \pm sca(t)$. Si ricavi un regolatore (il più semplice possibile) tale che:

L'errore $e(t)$ a transitorio esaurito sia minore di 0.2.
Il margine di fase sia almeno di 60 gradi.
Il tempo di assestamento all'1% sia al massimo di 50 sec.

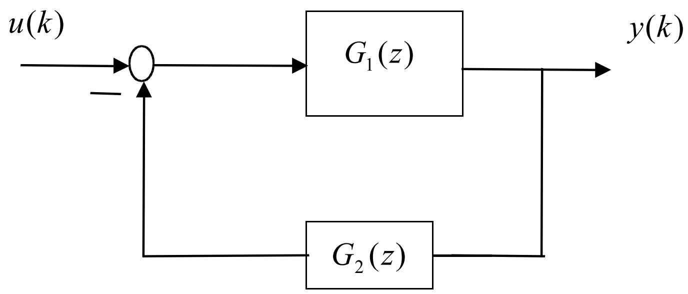
SOLUZIONE
Per il requisito sull'errore, il guadagno d'anello deve essere maggiore di 9. Scegliendo poi una rete ritardatrice si ha, ad esempio:

$R(s) = \dfrac{1}{(50s+1)}$ che assicura guadagno d'anello uguale a 10, circa 70 gradi di margine di fase e una pulsazione critica di 0.2 radianti/sec (e quindi un tempo di assestamento all1% di circa 25 sec).



ESERCIZIO 4

Si consideri lo schema blocchi del sistema a tempo discreto in figura



dove $G_1(z) = \dfrac{3}{z-1}$. La risposta y(k) allo scalino unitario su u(k) è

$y(0) = 0, y(1) = 3, y(2) = 3, y(3) = 6$

$y(k) = 0,\ k \geq 4.$

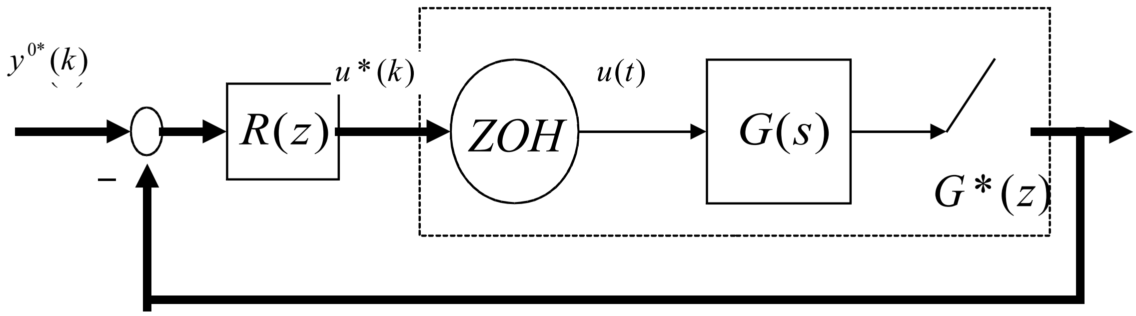
Si ricavi $G_2(z)$.

SOLUZIONE

La funzione di trasferimento da u a y è $H(z) = \dfrac{3}{z} + \dfrac{3}{z^3} - \dfrac{6}{z^4} = \dfrac{G_1(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)}$

da cui $G_2(z) = \dfrac{z^3 - z^2 + 3z - 2}{3z^3 + 3z - 6}$

ESERCIZIO 5



Si faccia riferimento al sistema di controllo digitale riportato in figura (il campionatore - ideale a cadenza uniforme - e il mantenitore ideale - di ordine zero – operano in sincronia e in fase con periodo T>0), $G(s)=\frac{1}{s}$ e $R(z)=\frac{1}{z}$.

5.1 Si studi la stabilità del sistema "dal punto di vista digitale", in funzione di T.
5.2 Si studi la stabilità del sistema "dal punto di vista analogico", in funzione di T.
5.3 Si confrontino criticamente i risultati.
5.4 Si ricavi l'andamento di u(t) quando il riferimento $y^{o}*(k)$=sca(k) e T=0.21.

SOLUZIONE

La funzione $G^*(z)=\frac{T}{z-1}$ rappresenta il sistema a segnali campionati corrispondente a $G(s)$. Il sistema in anello chiuso a tempo discreto ha polinomio caratteristico z^2-z+T. Quindi c'è stabilità per T<1.

Dal punto di vista analogico il Sistema si approssima con la funzione di anello $L(s)=e^{-sT}e^{-sT/2}G(s)=\frac{e^{-s3T/2}}{s}$. Applicando il criterio di Bode si ha stabilità per T<π/3.
Il secondo risultato non vale esattamente.

Per trovare u(t), si trova prima u*(k), che è l'uscita della sensitività del controllo che è

$$\frac{1/z}{1+\frac{T}{z(z-1)}}=\frac{z-1}{z^2-z+T}=\frac{z-1}{z^2-z+0.21}=\frac{z-1}{(z-0.7)(z-0.3)}$$. Quindi

$$U^*(z)=\frac{z-1}{(z-0.7)(z-0.3)}\frac{z}{z-1}=\frac{z}{(z-0.7)(z-0.3)}=\frac{7/4}{z-0.7}-\frac{3/4}{z-0.3}$$ e

$u^*(k)=7/4(0.7)^{k-1}-3/4(0.3)^{k-1}, k\geq 1, \quad u^*(0)=0$. Infine,
$u(t)=u^*(k), \quad t\in[0.21k, \quad 0.21(k+1))$