Fondamenti di Automatica

Allievi di Ingegneria Elettrica - Prof. P. Colaneri

Appello del 27 Novembre 2014

Cognome ____

Nome ____

N° di Matricola __________________________________

____

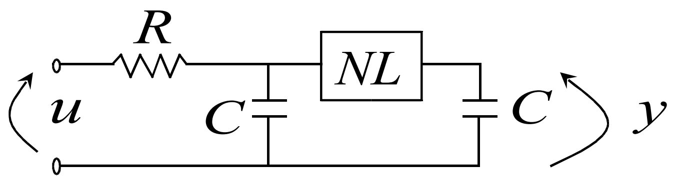
Firma

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni.
Questo fascicolo contiene 5 esercizi.

Si prega di non allegare alcun foglio.

ESERCIZIO 1

Si consideri il circuito in figura, dove l'elemento non lineare NL ha una caratteristica tensione corrente espressa dalla formula **I=V+V²**.



1.1 Si scriva una realizzazione in forma normale del sistema.
1.2 Si ricavino gli stati di equilibrio associati all'ingresso costante u=1, ponendo R=1, C=1.
1.3 Si studi la stabilità degli equilibri trovati.

SOLUZIONE

Siano x_1, x_2 le tensioni ai capi dei due condensatori. Risulta:

$R(C\dot{x}_1 + I) + x_1 = u$, $C\dot{x}_2 = I$, $x_2 + V = x_1$, $I = V + V^2$

da cui

$$\dot{x}_1 = \frac{u - x_1}{RC} - \frac{1}{C}\left((x_1 - x_2) + (x_1 - x_2)^2\right)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}\left((x_1 - x_2) + (x_1 - x_2)^2\right)$$

Gli stati di equilibrio sono: $\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Matrice A del sistema linearizzato

$$A = \begin{bmatrix} -2 + 2(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) & 1 - 2(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \\ 1 - 2(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) & -1 + 2(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \end{bmatrix}$$

Quindi $\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è as. stabile. Viceversa $\bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ è instabile.

ESERCIZIO 2

Si consideri un sistema lineare descritto da:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Si noti che il polinomio caratteristico è $(s+1)(s+2)^2$.

Si ricavi l'espressione analitica della **risposta totale** del sistema all'ingresso a scalino unitario e stato iniziale $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

SOLUZIONE

La trasformata di tale risposta è:

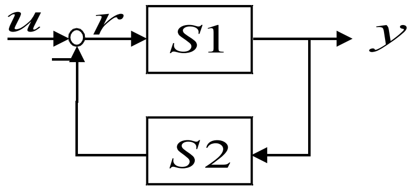
$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} x_0 + G(s)U(s) = \frac{s^2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4} + \frac{s}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4} = \frac{s}{(s+2)^2} = \frac{1}{s+2} - \frac{2}{(s+2)^2}$$

e quindi

$$y(t) = e^{-2t} - 2te^{-2t}$$

ESERCIZIO 3

Si consideri lo schema del sistema retroazionato



dove il sottosistema S1 (ingresso r(t) uscita y(t)) è descritto dalle equazioni di stato

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + r(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

mentre il sistema S2 (ingresso y(t) uscita z(t)) è descritto dalle equazioni di stato

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + 2x_3(t) + y(t)$$
$$\dot{x}_4(t) = -x_3(t) - 3x_4(t)$$
$$z(t) = 5x_3(t) + \alpha x_4(t)$$

3.1 Si discuta la stabilità asintotica in funzione di α.
3.2 Si discuta la stabilità BIBO (ingresso u, uscita y) del sistema in funzione di α.
3.3 Si discuta l'osservabilità del sistema (da y) in funzione di α.
3.4 Si discuta la raggiungibilità del sistema da u) in funzione di α.

SOLUZIONE

S1 ha funzione di trasferimento $G_1(s) = \dfrac{1}{s-1}$ mentre quella di S2 è $G_2(s) = \dfrac{5s+15-\alpha}{s^2+4s+5}$

Il polinomio caratteristico è dunque : $5s+15-\alpha+(s^2+4s+5)(s-1) = s^3+3s^2+6s+10-\alpha$
Per cui si ha asintotica stabilità per $-8 < \alpha < 10$. La funzione di trasferimento da u a y è: $G(s) = \dfrac{s^2+4s+5}{s^3+3s^2+6s+10-\alpha}$. Il numeratore ha radici a parte reale minore di zero e quindi si ha BIBO stabilità per $-8 < \alpha < 10$. Si noti infine che S1 non ha zeri e quindi il sistema è raggiungibile da u ed osservabile da y per ogni α.

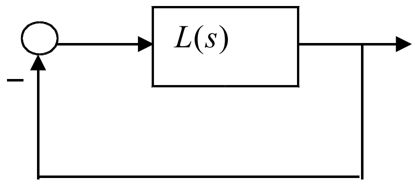
ESERCIZIO 4

Si consideri al funzione di trasferimento di un sistema del second'ordine, $G(s)=\dfrac{s+10}{(s-1)(s-10)}$.

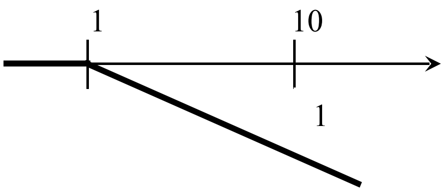
4.1 Si traccino i diagrammi asintotici del modulo e della fase della risposta in frequenza associata a **G(s)**.

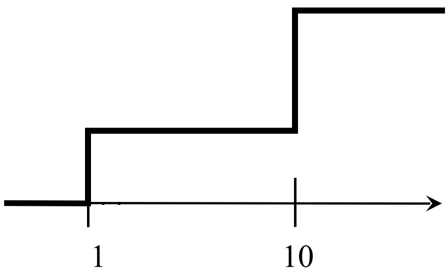
4.2 Si tracci il diagramma polare della risposta in frequenza associata a **G(s)**.

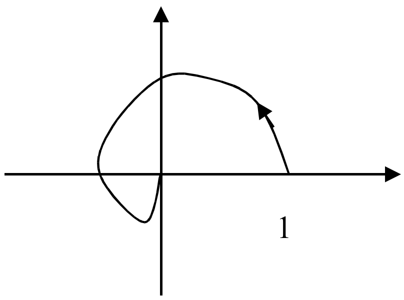
4.3 Si ponga **L(s)=αG(s)** e si consideri lo schema retro azionato. Si studi la stabilità del sistema retroazionato in funzione di α utilizzando il criterio di Nyquist.



SOLUZIONE







Il punto in cui il diagramma polare ha fase uguale a 180 gradi è -1/11. Il numero di giri del diagramma di Nyquist di L(s) intorno al punto -1 in senso antiorario è 2 se e solo se α>11. Questa è la condizione di asintotica stabilità del sistema retro azionato.

ESERCIZIO 5

5.1 Si scriva la realizzazione in **forma canonica di controllo** della funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Si dica se tale realizzazione è minima.

5.2 Si dica in che modo sia possibile ricavare una realizzazione minima della **G(s)** data, nella quale la matrice A risulti in forma diagonale.

SOLUZIONE

$$G(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = -\frac{3s^2 + 9s + 5}{(s+1)(s+2)(s+3)} + 1 = 1 + \frac{1/2}{s+1} - \frac{1}{s+2} - \frac{5/2}{s+3}$$

La realizzazione in forma canonica di controllo e' data da

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -5 & -9 & -3 \end{bmatrix}, D = 1$$

Quella diagonale è:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ -5/2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D = 1$$