Fondamenti di Automatica

Allievi in Ingegneria Elettrica - Prof. P. Colaneri

11 Febbraio 2015

Cognome ________________________________

Nome ___________________________________

N° di Matricola __________________________

____

Firma

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni.

Questo fascicolo contiene 4 esercizi.

Si prega di non allegare alcun foglio.

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema nonlineare con ingresso u e uscita y descritto dall'equazione differenziale

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 2y\frac{d^2y}{dt^2} + 4y^2\frac{dy}{dt} + y^3 = u$$

1.1 Scegliendo opportunamente le variabili di stato si scriva il sistema in forma normale.
1.2 Si ponga $u = 1$ e si ricavi l'equilibrio reale $\bar{x}$.
1.3 Si studi la stabilità dell'equilibrio $\bar{x}$.
1.4 Si scriva la funzione di trasferimento del sistema linearizzato.
1.5 Si ricavi l'espressione analitica della risposta allo scalino unitario del sistema linearizzato.
1.6 Si disegni il grafico di tale risposta

SOLUZIONE
Scegliendo

$$x_1 = y, \quad x_2 = \frac{dy}{dt}, \quad x_3 = \frac{d^2y}{dt^2}$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= -2x_1x_3 - 4x_1^2x_2 - x_1^3 + u \\
y &= x_1
\end{aligned}$$

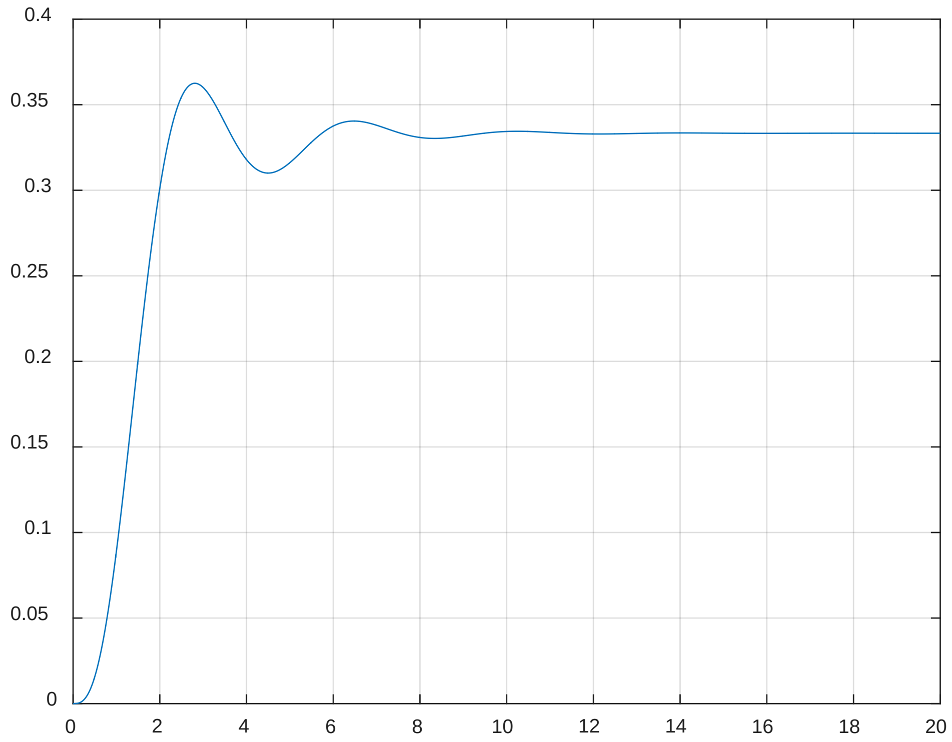
Con u=1, si ha $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

La matrice A del sistema linearizzato è: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ che ha polinomio caratteristico $s^3 + 2s^2 + 4s + 3 = (s+1)(s^2 + s + 3)$, quindi il punto di equlibrio è asintoticamente stabile.

La funzione di trasferimento del sistema linearizzato si ricava da A, $B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ ed è:

$G(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s^2+s+3)}$ e la trasformata della risposta $Y(s)=\dfrac{1/3}{s}-\dfrac{1/3}{s}-\dfrac{1/3}{s^2+s+3}$ e quindi

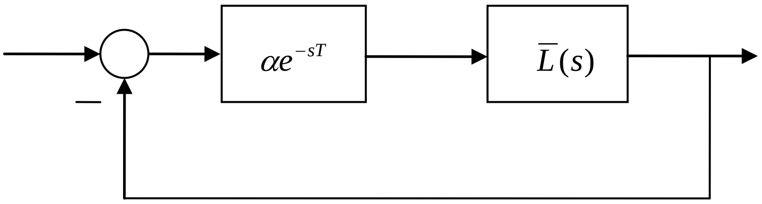
$y(t)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}e^{-t}-\dfrac{2\sqrt{11}}{33}\sin(\dfrac{\sqrt{11}}{2}t),\ t\geq 0$.



ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema in figura, dove

$$\bar{L}(s) = \frac{10 - s}{s(10 + s)}$$



Si caratterizzino tutti i valori (positivi) dei parametri (α,T) tali che il sistema in anello chiuso in figura sia asintoticamente stabile.

SOLUZIONE

Essendo $\omega_c = \alpha$, la fase critica è:

$\phi_c = -\pi/2 - \alpha T - 2\arctan(\alpha/10)$

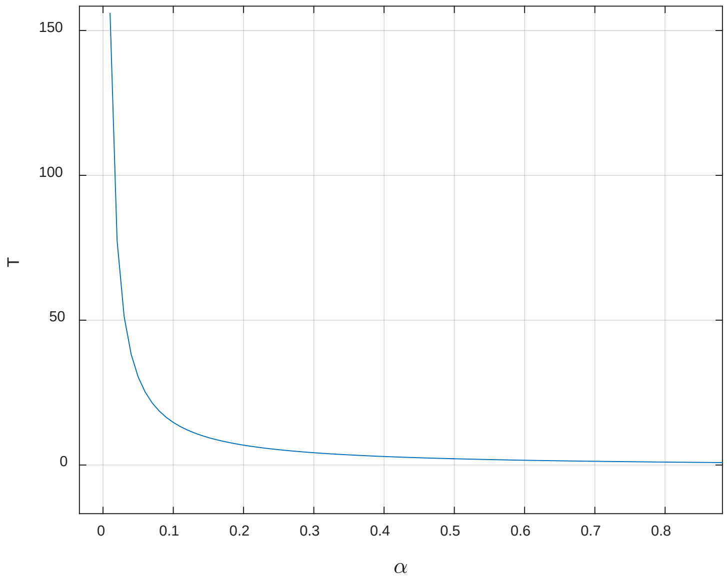
Quindi il margine di fase è:

$\phi_m = \pi/2 - \alpha T - 2\arctan(\alpha/10)$

e risulta positivo per

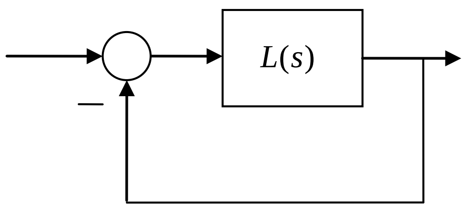
$$\boxed{\alpha T + 2\arctan(\alpha/10) < \pi/2}$$

cioè per i valori di (α,T) al di sotto della curva in figura.



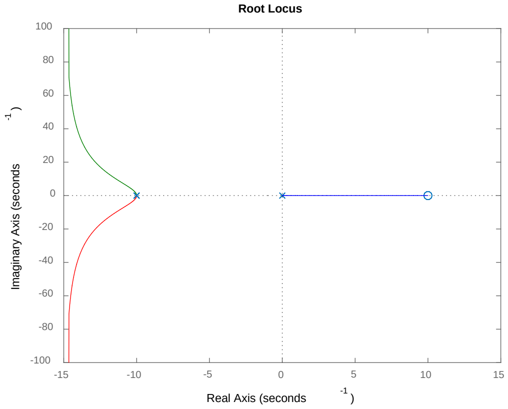
ESERCIZIO 3
Si consideri il sistema in figura, dove

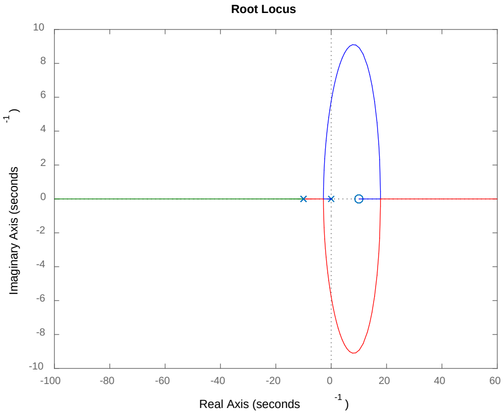
$$L(s) = \alpha \frac{s-10}{s(10+s)^2}$$



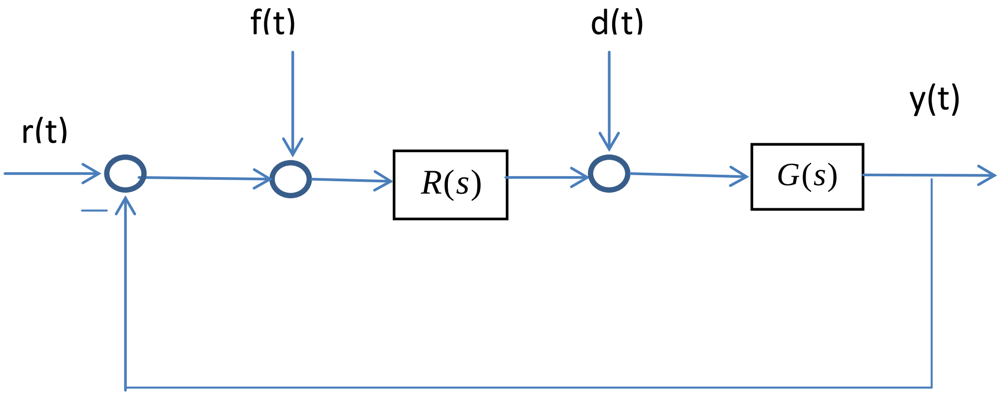
Si disegni il luogo delle radici, diretto e inverso, e si discuta la stabilità del sistema retroazionato in funzione di α.

SOLUZIONE
I luoghi (qualitativi) diretto e inverso sono raffigurati nelle figure seguenti. Si ha stabilità asintotica per **-200/3<a<0.**





ESERCIZIO 4
Si consideri lo schema a blocchi seguente



dove $G(s)=\frac{1}{s}$, $f(t)=\sin(t)$, $r(t)=sca(t)$, $d(t)=sca(t)$.

3.1 Si ricavi $R(s)$ in modo tale che

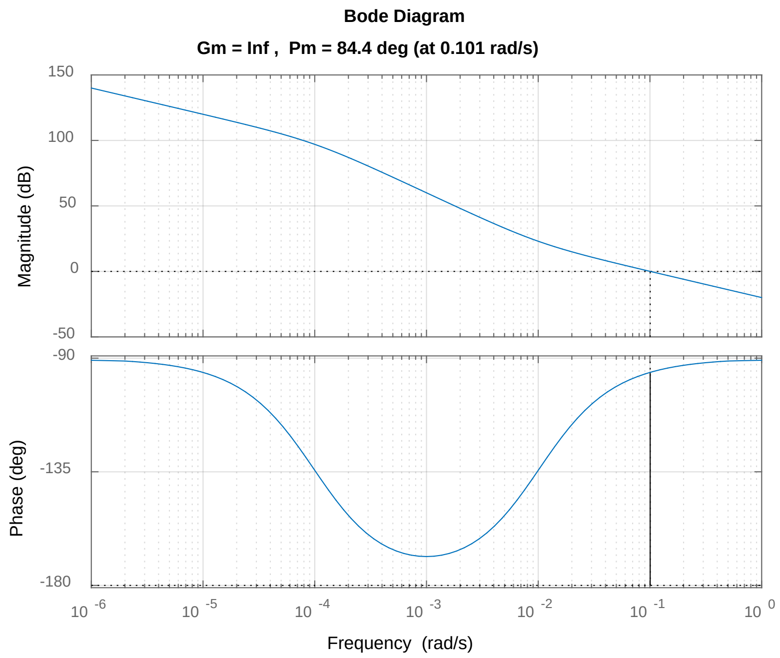
1) Il valore assoluto dell'errore (sinusoidale) a transitorio esaurito sia minore di 0.1 in media e minore di 0.1 in ampiezza.
2) La pulsazione critica sia maggiore o uguale a 0.1 rad/sec.
3) Il margine di fase sia maggiore o uguale a 70 gradi.

3.2 Si discretizzi $R(s)$ ricavato precedentemente con il metodo di Tustin, lasciando indeterminato il tempo di campionamento T>0. Si ricavi quindi $R^*(z)$.

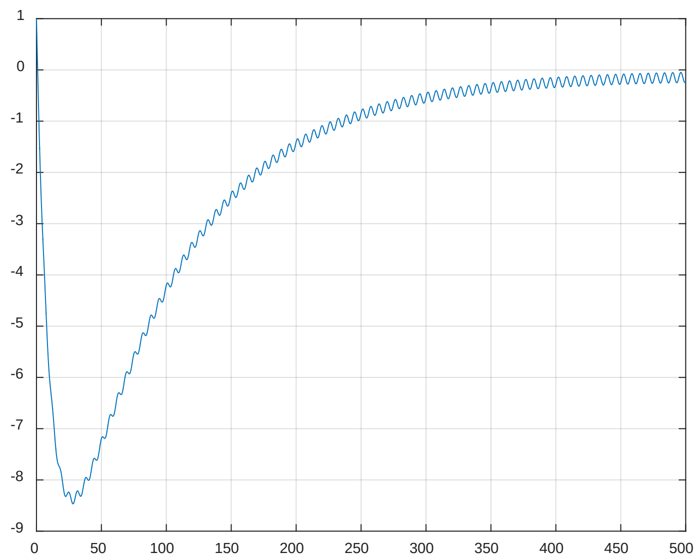
3.3) Si discutano le proprietà di stabilità (del sistema di controllo digitale corrispondente con il campionatore e il mantenitore in fase e sincroni) in funzione di T, "dal punto di vista analogico".

3.4 Si discutano le proprietà di stabilità stabilità (del sistema di controllo digitale corrispondente con il campionatore e il mantenitore in fase e sincroni) in funzione di T, "dal punto di vista digitale".

SOLUZIONE
E' sufficiente considerare un guadagno uguale a 10 con la rete ritardatrice
$R(s)=\frac{10(1+100s)}{1+10000s}$. Quindi $L(s)=\frac{10(1+100s)}{s(1+10000s)}$. Il diagrammi di Bode sono di seguito riportati.



Si vede che il margine di fase è di circa 85 gradi, la pulsazione critica di circa 0.1 rad/sec, l'attenuazione a 1 rad/sec di circa 20 decibel. Essendo il guadagno generalizzato di L uguale a 10 tutte le specifiche sono verificate. Nella figura seguente si trova la risposta dell'errore e(t) ai segnali r,f,d indicati.



3.2 Il degrado di margine di fase massimo possibile per il sistema "equivalente" dal punto di vista analogico è ϕm=ωcT/2, quindi T<π/10.

3.3 Con la trasformazione di Tustin $s \rightarrow \dfrac{2(z-1)}{T(z+1)}$ si ha $R^*(z) = \dfrac{10(z(T+200)+T-200)}{z(T+20000)+T-20000}$

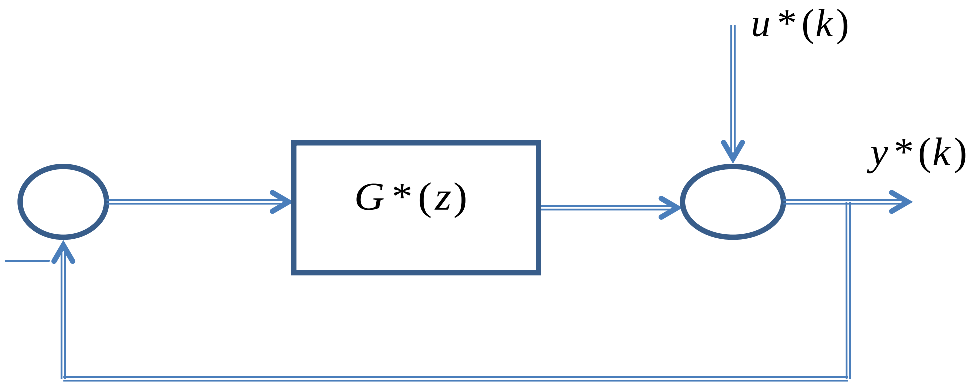
Inoltre $G^*(z) = \dfrac{T}{z-1}$ e quindi $L^*(z) = \dfrac{10T(z(T+200)+T-200)}{(z-1)(z(T+20000)+T-20000)}$.

L'equazione caratteristica del sistema in anello chiuso è

$z^2(T+20000)+z(10T^2+2000T-40000)+10T^2-2001T+20000=0$ da cui si conclude T<20.

ESERCIZIO 5

Si consideri il sistema di controllo



dove $G^*(z) = \frac{0.25}{z(z-1)}$, $u^*(k) = sca^*(k)$. Si calcoli l'espressione analitica di $y^*(k)$, insieme ai campioni $y^*(0), y^*(1), y^*(2), y^*(3), y^*(\infty)$.

SOLUZIONE

La FDT da u* a y* è $\frac{1}{1+G^*(z)} = \frac{z(z-1)}{(z-0.5)^2}$. Quindi $Y^*(z) = \frac{z^2}{(z-0.5)^2} = 2z\frac{0.5z}{(z-0.5)^2}$. Infine $y^*(k) = (k+1)(0.5)^k$, $k \geq 0$, e quindi $y^*(1) = 0, y^*(1) = 1, y^*(2) = 1, y^*(3) = 0.75, y^*(\infty) = 0$.