FONDAMENTI DI AUTOMATICA

(Prof. P. Colaneri)

14 Settembre 2016

Da compilarsi ***a penna*** *prima di iniziare la prova d'esame.*

Cognome .... Nome ....

Nato/a a .... il .... Matricola ....

....

(Firma)

ESERCIZIO 1

$$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + y(t) - 1$$
$$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + y(t)$$
$$\dot{x}_3(t) = -2x_3(t) + y(t)$$
$$y(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)$$

1.1 Si ricavino i due stati di equilibrio.
1.2 Si calcolino gli autovalori dei due sistemi linearizzati.
1.3 Si discuta la stabilità dei due stati di equilibrio ricavati.

SOLUZIONE

Dalle equazioni:
$y = 2x_1 + 1 = 2x_2 = 2x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
si ricava
$y^2 - 2y + \frac{1}{3} = 0$ e quindi $(y - 1.8165)(y - 0.1835) = 0$. In corrispondenza ci sono due equilibri $\bar{x} = x^{[1]} = \begin{bmatrix} 0.4083 \\ 0.9082 \\ 0.9082 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = x^{[2]} = \begin{bmatrix} -0.4083 \\ 0.0918 \\ 0.0918 \end{bmatrix}$. La matrice A del sistema linearizzato è:

$$A = -2I_3 + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di A sono dunque $-2, -2, -2 + 2(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)$. L'equilibrio $x^{[1]}$ è dunque instabile mentre l'equilibrio $x^{[2]}$ è asintoticamente stabile.

ESERCIZIO 2

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

2.1 Si dica se il sistema è osservabile
2.2 Si dica se il sistema è raggiungibile
2.3 Si dica se il sistema è asintoticamente stabile
2.4 Si dica se il sistema è BIBO stabile
2.5 Si ricavi l'espressione analitica della risposta **forzata** $y_F(t)$ quando $u(t) = e^t, \quad t \geq 0$.

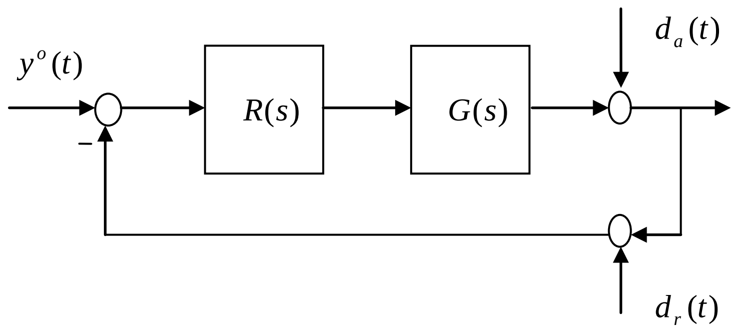
SOLUZIONE
1.1 La funzione di trasferimento del sistema è (non occorre fare conti, il sistema è in forma canonica di osservazione):

$$G(s) = \frac{s^2 - 2s + 1}{s^3 + 2s^2 - s - 2} = \frac{(s-1)^2}{(s-1)(s^2 + 3s + 2)} = \frac{s-1}{s^2 + 3s + 2}$$

Il sistema è osservabile, non raggiungibile, instabile, BIBO stabile. Inoltre $Y_F(s) == \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = -\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1}$ e quindi $y_F(t) = -e^{-2t} + e^{-t}, \quad t \geq 0$

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema di controllo in figura:



Dove $G(s) = \dfrac{1-s}{s(s+0.5)(s+10)}$, $y^o(t) = \pm sca(t)$, $d_r(t) = \pm\sin(20t)$, $d_a(t) = \pm\sin(0.05t)$.

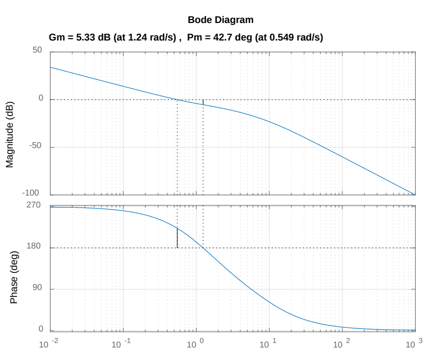
Si progetti $R(s)$, del minimo ordine possibile, in maniera tale che (i) l'errore a transitorio esaurito sia a media nulla e ampiezza minore di 0.2, (ii) il margine di fase sia almeno di 40 gradi, (iii) la pulsazione critica si almeno di 0.5 rad/sec.

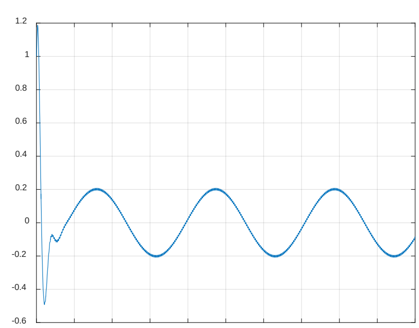
SOLUZIONE

Con la rete anticipatrice

$$R(s) = \frac{10(s+0.5)}{s+2}$$

si ottiene $L(s) = \dfrac{10(1-s)}{s(s+2)(s+10)}$ che è tale che $\omega_c = 0.549$, $\varphi_m = 42.7^o$, $\left|L(j0.05)\right|_{db} = 20$, $\left|L(j10)\right|_{db} = -30$. In figura i diagrammi di Bode di $L(j\omega)$ e l'andamento dell'errore con $y^o(t) = sca(t)$, $d_r(t) = \sin(20t)$, $d_a(t) = \sin(0.05t)$.

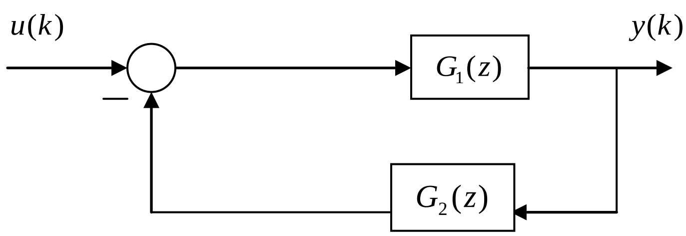




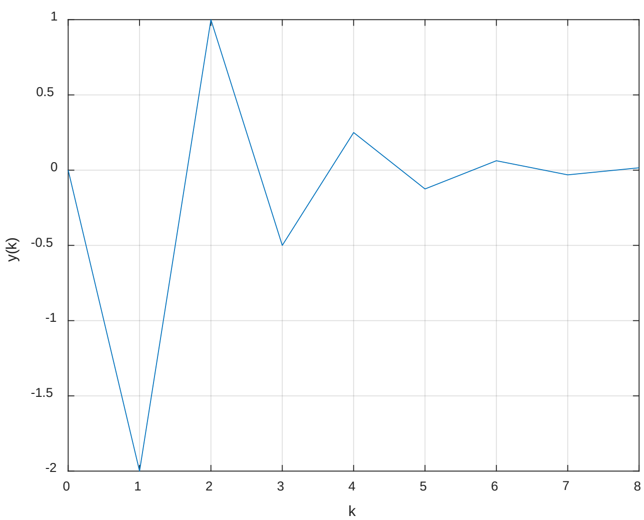
Politecnico di Milano
Dipartimento di Elettronica e Informazione

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema retroazionato a tempo discreto



dove $G_2(z)=1$. Si ricavi una descrizione in variabili di stato del sistema $G_1(z)$ compatibile con la risposta y(k) ad uno scalino u(k) riportata nella figura seguente:



SOLUZIONE

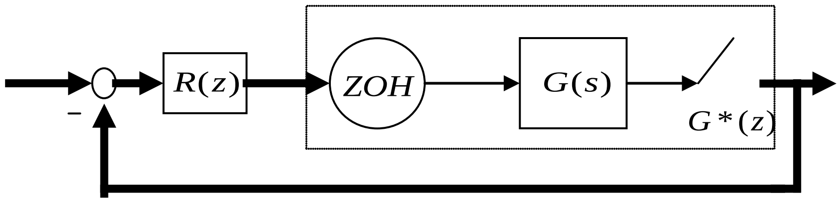
Il grafico mostra che a partire da k=1 la y(k+1)=-y(k)/2 con segno cambiato. Quindi

$$y(k) = 4(-0.5)^k, \quad k = 1,2,.....$$
$$y(0) = 0$$

Quindi $Y(z) = -\frac{2}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(-0.5)^k z^{-k} = -\frac{2}{z+0.5} = \frac{G_1(z)}{1+G_1(z)G_2(z)}U(z)$

e infine $G_1(z) = \frac{Y(z)}{U(z)-Y(z)G_2(z)} = -2\frac{z-1}{z^2+2.5z-2}$

ESERCIZIO 5



Si faccia riferimento al sistema di controllo digitale riportato in figura (il campionatore - ideale a cadenza uniforme - e il mantenitore ideale - di ordine zero – operano in sincronia e in fase con periodo T=1), $G(s)=\frac{e^{-s}}{s}$ e $R(z)=\frac{\alpha}{z}$.

5.1 Si studi la stabilità del sistema "dal punto di vista digitale", in funzione di $\alpha>0$.
5.2 Si studi la stabilità del sistema "dal punto di vista analogico", in funzione di $\alpha>0$.
5.3 Si confrontino criticamente i risultati.

SOLUZIONE

5.1 $G^*(z)=\frac{1}{z(z-1)}$ → $L^*(z)=\frac{\alpha}{z^2(z-1)}$ → $z^3-z^2+\alpha=0$. Stabilità per $0<\alpha<0.618$

5.2 $L(s)\approx\frac{\alpha e^{-2.5s}}{s}$ → quindi $0<\alpha<\pi/5=0.6283$