Fondamenti di Automatica

Allievi in Ingegneria Elettrica - Prof. P. Colaneri

Prima prova in itinere del 26 Novembre 2016

Cognome ____________________________________

Nome ____

N° di Matricola _______________________________

____

Firma

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni.

Questo fascicolo contiene 5 esercizi.

Si prega di non allegare alcun foglio.

Esercizio 1

Per il sistema dinamico del secondo ordine,

$$\dot{x}_1(t) = -2\frac{x_1(t)}{x_2(t)+1} + u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2\frac{x_2(t)}{x_1(t)+1} + u(t)$$

$$y(t) = x_1^2 + x_2^2$$

1.1) Si determini l'unico stato di equilibrio $\bar{x}$ e l'uscita di equilibrio $\bar{y}$ corrispondente all'ingresso costante u(t)=1.

1.2) Si scrivano le equazioni in variabili di stato del sistema linearizzato attorno all'equilibrio e la sua funzione di trasferimento.

1.3) Si studi la stabilità asintotica del sistema linearizzato

SOLUZIONE

1.1) L'unico stato di equilibrio è: $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. L'uscita corrispondente di equilibrio è $\bar{y} = 2$.

1.2)
$$\delta\dot{x}_1(t) = -\delta x_1 + 0.5\delta x_2 + \delta u$$
$$\dot{x}_2(t) = 0.5\delta x_1 - \delta x_2 + \delta u$$
$$y(t) = 2\delta x_1 + 2\delta x_2$$

1.3) E' asintoticamete stabile

Esercizio 2

Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + 9x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 7x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_2(t) \end{cases}$$

2.1) Si studi la stabilità del sistema.

2.2) Si ricavi l'espressione analitica della risposta **totale (libera + forzata)** dell'uscita $y(t)$ quando

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(t) = sca(t).$$

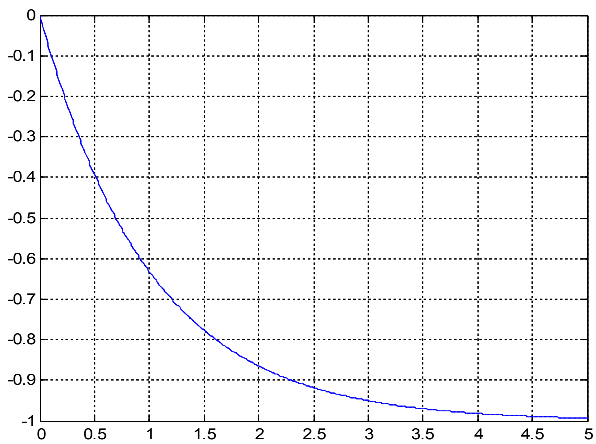
2.3) Si tracci il grafico di $y(t)$.

SOLUZIONE

2.1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}$ autovalori= -1, -4. Il sistema è asintoticamente stabile.

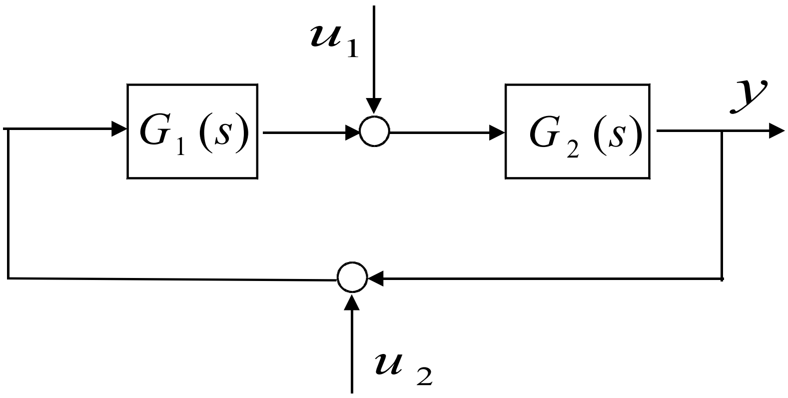
2.2) $Y(s) = C(sI - A)^{-1} x(0) + G(s)U(s) = \dfrac{-2}{(s+1)(s+4)} + \dfrac{s-4}{(s+1)(s+4)} \dfrac{1}{s} = \dfrac{-s-4}{s(s+1)(s+4)} = \dfrac{-1}{s(s+1)}$

$y(t) = -1 + e^{-t}$



Esercizio 3

Si consideri lo schema a blocchi in figura:



dove

$$G_1(s) = \frac{s-1}{s+10},\ \ G_2(s) = \frac{s+10}{s(s+2)}$$

sono le funzioni di trasferimento di due sistemi in forma minima.

3.1) Si studi la stabilità del sistema retroazionato.

3.2) Si studi la raggiungibilità del sistema retroazionato dall'ingresso u_1

3.3) Si strudi la raggiungibilità del sistema retroazionato dall'ingresso u_2

3.4) Si studi l'osservabilità del sistema retroazionato da y

3.5) Ponendo $u_1(t) = sca(t)$ e $u_2(t) = \sin(t)$ si ricavi l'espressione analitica della risposta asintotica di $y(t)$.

SOLUZIONE

3.1) $1 - G_1(s)G_2(s) = 1 - \dfrac{(s+10)(s+10)}{s(s+2)(s+10)} = \dfrac{(s+10)(s^2+s+1)}{s(s+2)(s+10)}$. Il polinomio caratteristico del sistema in anello chiuso è $(s+10)(s^2+s+1)$ e quindi il sistema è asintoticamente stabile.

3.2) Ai fini della raggiungibilità da u_1: $\xrightarrow{u_1} \boxed{G_2} \longrightarrow \boxed{G_1}$ Non è raggiungibile

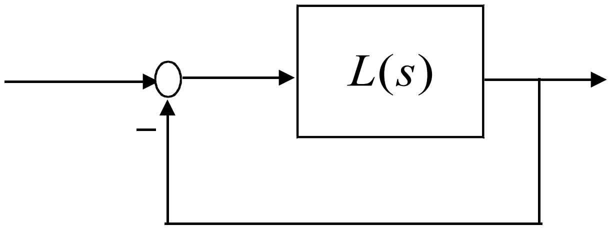
3.3) Ai fini della raggiungibilità da u_2: $\xrightarrow{u_2} \boxed{G_1} \longrightarrow \boxed{G_2}$ E' raggiungibile

3.4) Ai fini dell'osservabilità da y: $\boxed{G_1} \longrightarrow \boxed{G_2} \xrightarrow{y}$ Non è osservabile

3.5) $y(t) \to \dfrac{G_2(0)}{1 - G_1(0)G_2(0)} + \left|\dfrac{G_1(j)G_2(j)}{1 - G_1(j)G_2(j)}\right| \sin(t + \arg \dfrac{G_1(j)G_2(j)}{1 - G_1(j)G_2(j)}) = 10 + \sqrt{2}\sin(t + \pi/4)$

Esercizio 4

Si consideri il sistema retroazionato



dove

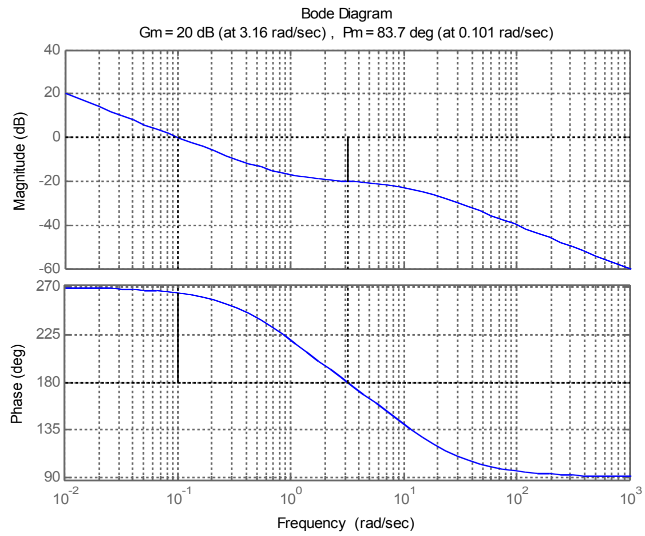
$$L(s) = \frac{1-s}{s(s+10)}$$

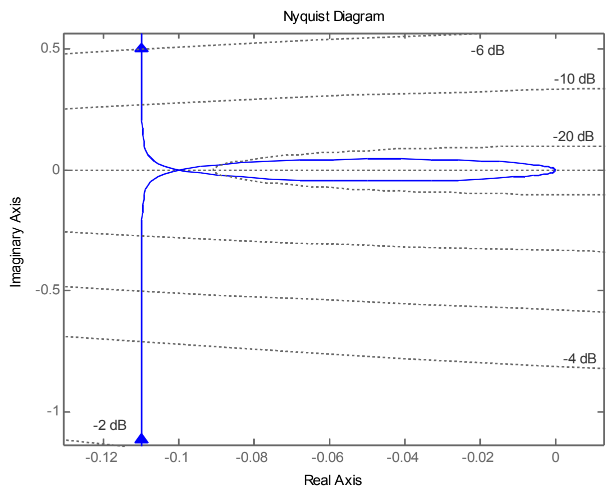
4.1) Si tracci il diagramma di Bode asintotico del modulo della risposta in frequenza associata a L(s).

4.2) Si tracci il diagramma di Bode asintotico della fase della risposta in frequenza associata a L(s).

4.3) Si tracci il diagramma di Nyquist di L(s).

4.4) Si calcolino il margine di fase e il margine di guadagno.





Esercizio 5
Si enunci con precisione il criterio di Michajlov che stabilisce una condizione necessaria e sufficiente perché un polinomio di grado n a coefficienti reali

$$p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-1} + \cdots + a_n$$

abbia radici nel semipiano sinistro aperto. Si dia una giustificazione ragionata del risultato.

SOLUZIONE
Condizione necessaria e sufficiente perché il polinomio abbia tutte le radici nel semipiano sinistro aperto è che il diagramma di p(jω), con ω che varia da 0 all'infinito, non passi per l'origine e abbia una variazione di fase di $n\pi/2$ radianti in senso antiorario.

La dimostrazione consiste nello scrivere $p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-1} + \cdots + a_n = \prod_i (s - p_i)$ e verificare che: 1) ogni radice reale nel semipiano destro aperto contribuisce alla fase con $\pi/2$ in senso orario, 2) ogni coppia di radici nel semipiano destro aperto contribuisce con π in senso orario, 3) ogni radice reale nel semipiano sinistro chiuso contribuisce con $\pi/2$ in senso antiorario, 4) ogni coppia di radici nel semipiano sinistro chiuso contribuisce con π in senso antiorario, 5) l'assenza di radici sull'asse immaginario equivale al non passaggio di p(jω) dall'origine.