Fondamenti di Automatica

Allievi in Ingegneria Elettrica - Prof. P. Colaneri

30 Settembre 2016

Cognome ____

Nome ____

N° di Matricola __________________________________

____

Firma

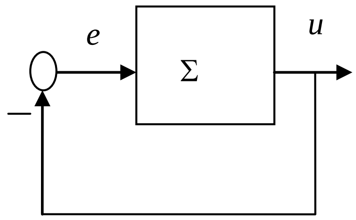
Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni.

Questo fascicolo contiene 5 esercizi.

Si prega di non allegare alcun foglio.

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema non lineare



Dove Σ è un sistema non lineare, descritto dalle equazioni di stato

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2^2 + e^2$$
$$\dot{x}_2 = -2x_1^2 - 2x_2 + e$$
$$u = x_1 + x_2$$

Si studi la stabilità asintotica degli equilibri (reali).

SOLUZIONE

$$0 = -x_1 - x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = x_1(-1 + x_1 + 2x_2)$$
$$0 = -2x_1^2 - 2x_2 - x_1 - x_2$$

Unico equilibrio reale $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Linearizzazione

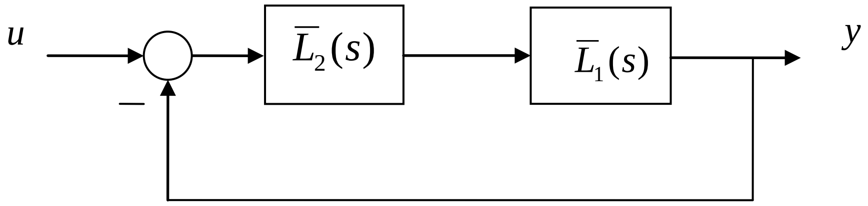
$$\delta\dot{x}_1 = -\delta x_1$$
$$\delta\dot{x}_2 = -\delta x_1 - 3\delta x_2$$

L’equilibrio è asintoticamente stabile.

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema in figura, dove

$$\bar{L}_1(s) = \frac{\alpha - s}{s(10+s)}, \quad \bar{L}_2(s) = \frac{s-10}{s+\alpha}$$



2.1 Si caratterizzino tutti i valori del parametro α tale che il sistema in anello chiuso in figura sia asintoticamente stabile.
2.2 Si caratterizzino tutti i valori del parametro α tale che il sistema in anello chiuso dall'ingresso u all'uscita y in figura sia BIBO stabile

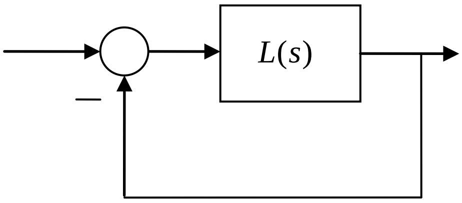
$$F(s) = \frac{\frac{\alpha - s}{s(10+s)}\frac{s-10}{s+\alpha}}{1+\frac{\alpha - s}{s(10+s)}\frac{s-10}{s+\alpha}} = \frac{(\alpha - s)(s-10)}{s(s+10)(s+\alpha)+(\alpha - s)(s-10)} = \frac{(\alpha - s)(s-10)}{s^3 + s(\alpha+9) + s(11\alpha+10) - 10\alpha}$$

Applicando Routh-Hurwitz si ha $\alpha \in (-0.818 \quad 0)$. In tale intervallo si ha asintotica stabilità e BIBO stabilità di F(s). Per $\alpha = 0$ si ha una cancellazione in s=0 tra $\bar{L}_1(s)$ e $\bar{L}_2(s)$ e risulta

$$F(s) = \frac{\frac{-s}{s(10+s)}\frac{s-10}{s}}{1+\frac{-s}{s(10+s)}\frac{s-10}{s}} = \frac{-(s-10)}{s(s+10)-(s-10)} = \frac{10-s}{s^2+9s+10}$$ che è BIBO stabile. Quindi si ha BIBO stabilità per $\alpha \in (-0.818 \quad 0]$.

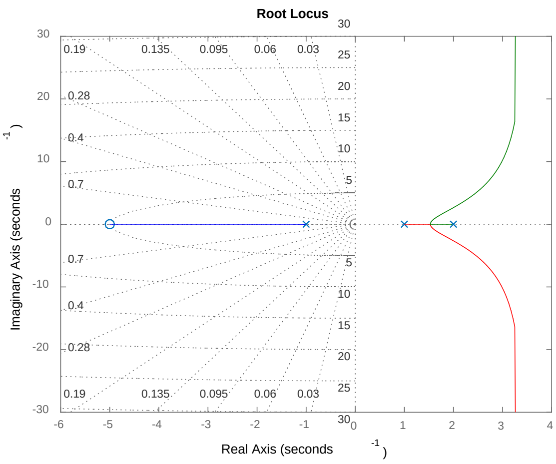
ESERCIZIO 3
Si consideri il sistema in figura, dove

$$L(s) = \alpha \frac{s+5}{(s^2-1)(s-2)}$$

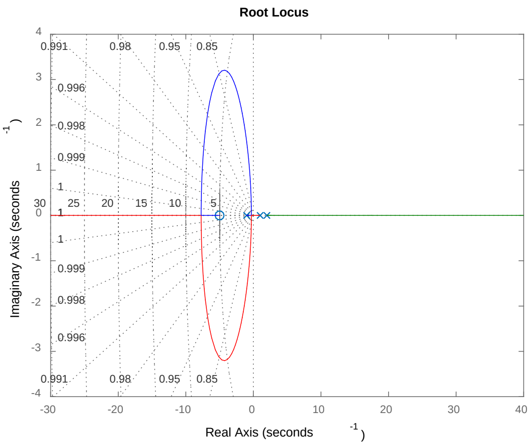


Si disegni il luogo delle radici, diretto e inverso, e si discuta la stabilità del sistema retroazionato in funzione di α.

Luogo diretto

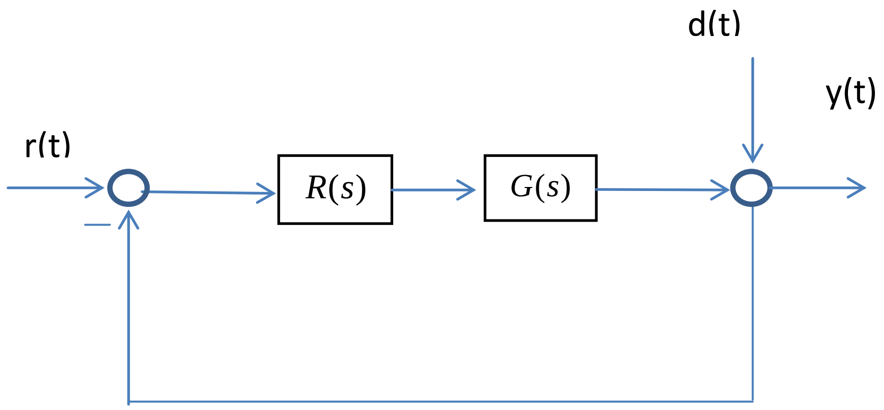


Luogo inverso



Il polinomio caratteristico è: $L(s) = s^3 - 2s^2 + (\alpha - 1)s + 2 + 5\alpha$. Il secondo segno è sempre negative e quindi il Sistema retroazionato è instabile per tutti I valori di α.

ESERCIZIO 4
Si consideri lo schema a blocchi seguente



dove $G(s) = \dfrac{1}{(1+10s)(1+0.1s)}$, $d(t) = \sin(0.1t)$, $r(t) = sca(t)$.

Si ricavi $R(s)$ in modo tale che

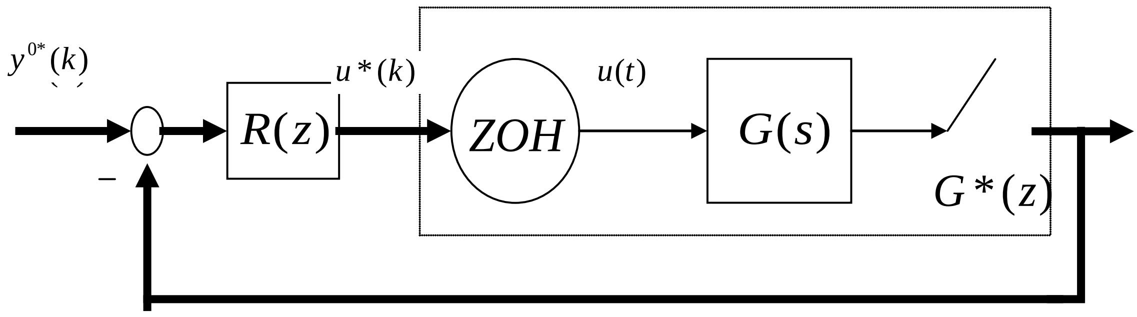
1) Il valore assoluto dell'errore (sinusoidale) a transitorio esaurito sia minore di 0.1 in media e minore di 0.1 in ampiezza.
2) La pulsazione critica sia maggiore o uguale a 1 rad/sec.
3) Il margine di fase sia maggiore o uguale a 40 gradi.

SOLUZIONE

Il guadagno di $L(s)$ deve essere più grande di 9 e inoltre $|L(i\omega)| > 10$. Ad esempio, con il semplice guadagno

$R(s) = k$ si ha $L(s) = \dfrac{k}{(1+10s)^2(1+0.1s)}$ che soddisfa le specifiche con 15<k<190 (circa)

ESERCIZIO 5



Si faccia riferimento al sistema di controllo digitale riportato in figura (il campionatore - ideale a cadenza uniforme - e il mantenitore ideale - di ordine zero – operano in sincronia e in fase con periodo T>0), $G(s)=\frac{1+s}{s^2}$ e $R(z)=1$.

5.1 Si studi la stabilità del sistema "dal punto di vista digitale", in funzione di T.
5.2 Si studi la stabilità del sistema "dal punto di vista analogico", in funzione di T.
5.3 Si confrontino criticamente i risultati.

SOLUZIONE

Una realizzazione di $G(s)=\frac{1+s}{s^2}$ è data da $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$ e quindi

$$G^*(z)=C(zI-e^{AT})^{-1}\int_0^T e^{A\tau}d\tau B=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z-1 & -T\\ 0 & z-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}T^2/2\\ T\end{bmatrix}=\frac{(z-1)T^2/2+T(z-1+T)}{(z-1)^2}$$

Il polinomio caratteriztico è:

$$z^2+z(-2+T+T^2/2)+1+T^2/2-T$$

e quindi 1<T<2.

La $L(s)$ equivalente è: $L(s)=e^{-sT/2}\frac{1+s}{s^2}$. La pulsazione di taglio è $w_c=1.272$ e il margine di fase è $\arctan(w_c)-w_cT/2$ e quindi $T<\frac{2}{w_c}\arctan(w_c)=1.4222$.