Fondamenti di Automatica per Ing. Elettrica

Prof. Patrizio Colaneri[2]

I. Esercizio 1

Si consideri il sistema nonlineare

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + x_1(t)x_2(t) + x_2(t) - u(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + x_3(t)x_2(t) + x_3(t) - u(t) \\
\dot{x}_3(t) &= -x_3(t) + x_3(t)x_1(t) + x_1(t) - u(t)
\end{aligned}$$

- Si ricavino i due stati di equilibrio $\bar{x}$ corrispondenti all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 1$.
- Si discuta la stabilità degli stati di equilibrio.

SOLUZIONI Il sistema con $u(t) = 1$ si riscrive come

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= (x_1 + 1)(x_2 - 1) \\
\dot{x}_2(t) &= (x_2 + 1)(x_3 - 1) \\
\dot{x}_3(t) &= (x_3 + 1)(x_1 - 1)
\end{aligned}$$

Quindi i due stati di equilibrio sono

$$\bar{x} = \pm \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Le matrici A dei corrispondenti sistemi linearizzati sono:

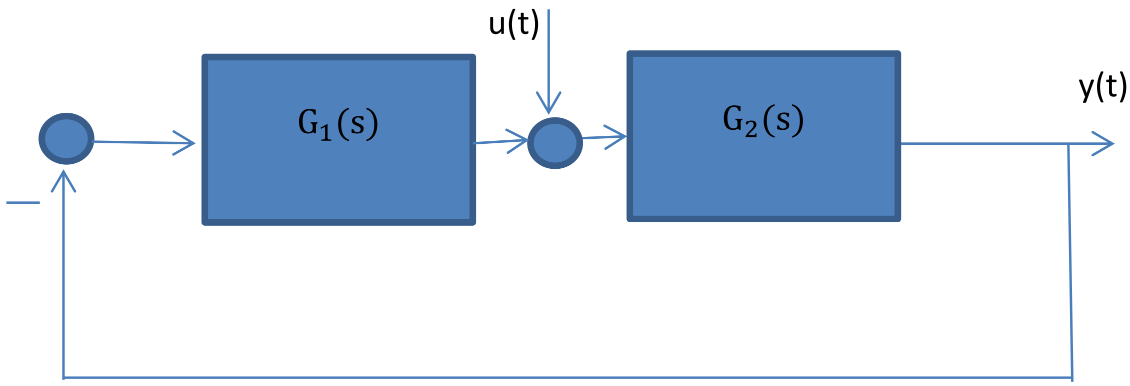
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Il primo equilibrio è instabile, il secondo è asintiticamente stabile.

[2] Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingeneria, Politecnico di Milano, 20133 Milano, Italy, `email: colaneri@elet.polimi.it`

II. Esercizio 2

Si consideri il sistema in figura, dove



$$G_1(s) = \frac{s+1}{s(s+\alpha)}, \quad G_2(s) = \frac{1-s}{(s+1)}$$

sono le funzioni di trasferimento di due sistemi, rispettivamnte del secondo e primo ordine.

- Si studi la stabilità asintotica del sistema retroazionato in funzione di α.
- Si studi la stabilità BIBO del sistema con ingresso u e uscita y in funzione di α..
- Si studi la raggiungibiltà da u in funzione di α.
- Si studi l'osservabilità da y in funzione di α.

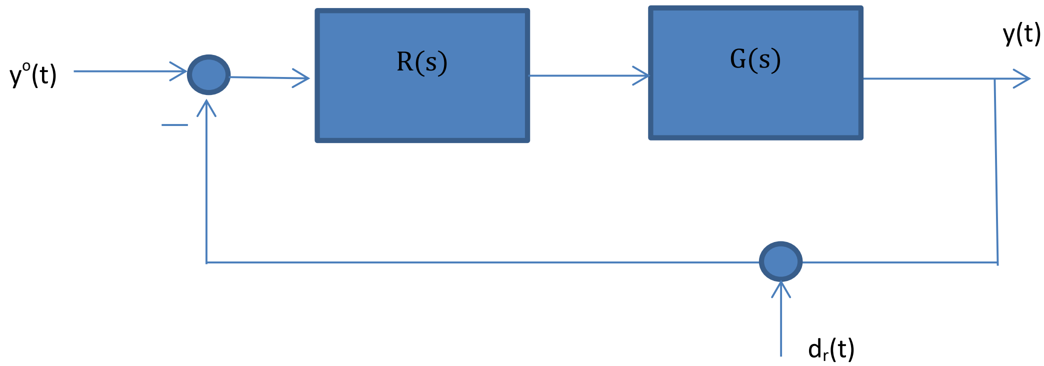
SOLUZIONI La funzione di trasferimento da u a y è:

$$G(s) = \frac{s(1-s)(s+\alpha)}{(s+1)(s^2+(\alpha-1)s+1)}$$

Il sistema retroazionato (del terzo ordine) è asintoticamente stabile per $\alpha > 1$. Il sistema da u a y è BIBO stabile se $\alpha > 1$. Il sistema con ingresso u è raggiungibile per $\alpha \neq -1$. Il sistema con uscita y è osservabile per $\alpha \neq -1$.

III. Esercizio 3

Si consideri il sistema retroazionato in figura, dove



$$G(s) = \frac{0.1}{(1+0.1s)(1+s)}, \quad y^o(t) = sca(t), \quad d_r(t) = sin(10t)$$

Si ricavi $R(s)$ in maniera tale che:

- L'errore sia in media nullo a regime permanente
- L'errore sia attenuato in ampiezza sull'errore di almeno 10 volte
- $\omega_c \geq 1$ rad/sec
- $\phi_m \geq 60^o$

SOLUZIONI Perchè l'errore sia in media nullo occorre che il regolatore sia di tipo 1, quindi

$$R_1(s) = \frac{\mu_r}{s}$$

Scriviamo allora

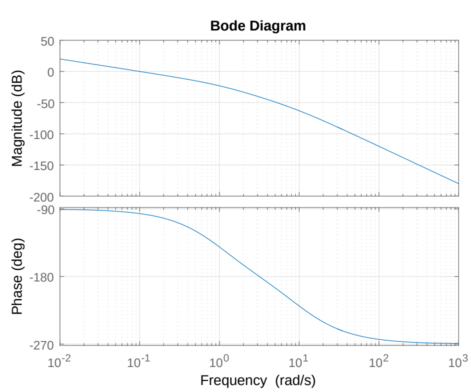
$$L_1(s) = \frac{0.1\mu_r}{s(1+0.1s)(1+s)}$$

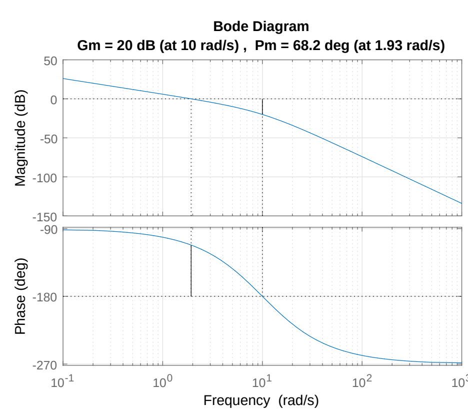
scegliamo $\mu_r = 20$ in maniera da avere $\omega_c \simeq 2$ e usiamo una rete anticipatrice

$$R_2(s) = \frac{1+s}{1+0.1s}$$

in modo da avere un'attenuazione di circa 20db a 10 radianti al secondo. Quindi

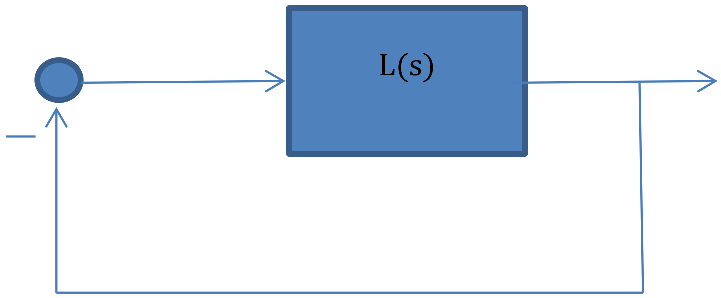
$$L(s) = \frac{2}{s(1+0.1s)^2}$$





IV. Esercizio 4

Si consideri il sistema in figura

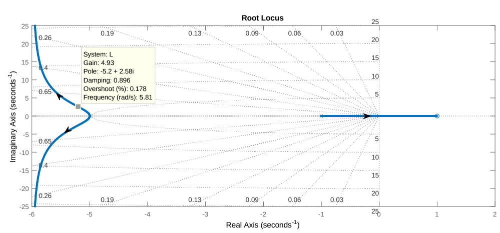


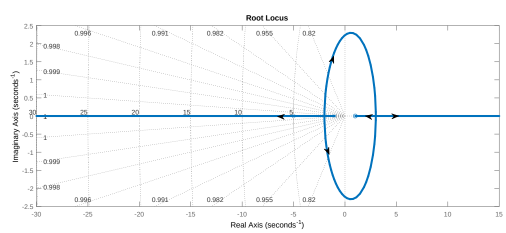
dove

$$L(s) = \rho \frac{s-1}{(s+1)(s+5)^2}$$

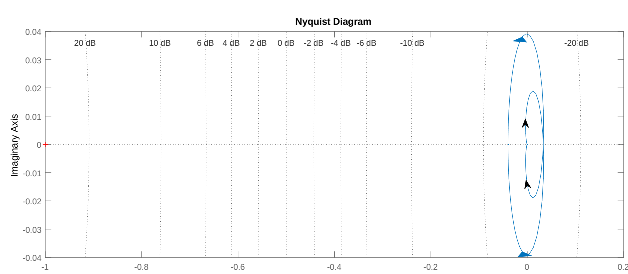
- Si tracci il luogo delle radici (diretto e inverso) e si studi la stabilità del sistema retroazionato in funzione di ρ
- Si disegni il diagramma di Nyquist di $L(s)$ e si confermino i risultati ottenuti al punto precedente.

SOLUZIONI Si ha stabilità per $-30 < \rho < 25$.Per $\rho = -30$ il polinomio caratteristico del sistema in anello



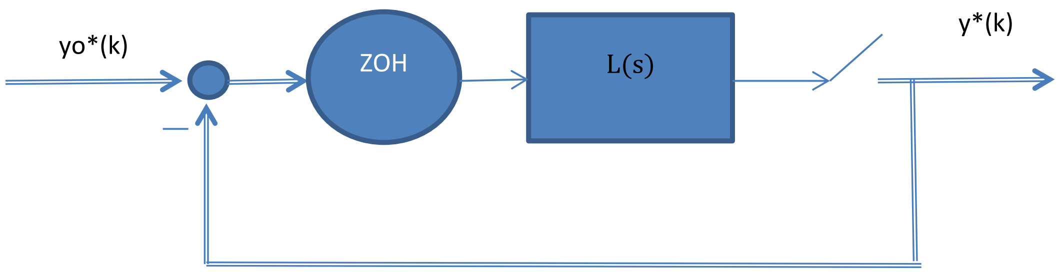


chiuso è: $(s+11)(s^2+5)$. Il diagramma di $L(s)$ con $\rho = 1$ è disegnato in figura. Il diagramma passa sull'asse



reale nei punti $-1/25$ (per $\omega = 0$) e in $1/30$ (per $\omega = \sqrt{5}$).

V. Esercizio 5



dove i convertitori operano in sincronia e in fase con periodo $T = ln(2)$.

$$L(s) = \frac{1}{(s+2)(1+s)}$$

- Si studi la stabilità del sistema retroazionato a tempo discreto (segnali campionati).
- Si ricavi il valore di $y*(0)$, $y^*(1)$ e $y^*(\infty)$ quando $y^{o*}(k) = sca^*(k)$.

SOLUZIONI

$$L(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Quindi

$$L^*(z) = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}} - \frac{0.5(1-e^{-2T})}{z-e^{-2T}} = \frac{0.5}{z-0.5} - \frac{3/8}{z-0.25} = \frac{1/8(z+0.5)}{(z-0.5)(z-0.25)}$$

e il polinomio caratteristico del sistema in anello chiuso è:

$$z^2 - 5/8z + 3/16$$

che ha radici all'interno del cerchio di raggio 1. Il sistema è asintoticamente stabile. La funzione di sensitività complementare è:

$$F(z) = \frac{1/8(z+0.5)}{z^2 - 5/8z + 3/16}$$

e quindi $y^*(0) = 0, y^*(1) = 1/8, y^*(\infty) = 1/3$.