Fondamenti di Automatica per Ing. Elettrica

Prof. Patrizio Colaneri[2]

Esame del 18 Luglio 2017

Cognome ____

Nome ____

Matricola ____

Firma ____

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni. Questo fascicolo contiene 5 esercizi. Si prega di non allegare alcun foglio.

[2] Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingeneria, Politecnico di Milano, 20133 Milano, Italy, `email: colaneri@elet.polimi.it`

I. Esercizio 1

Si consideri il sistema lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

con la retroazione (non lineare)

$$u(t) = y(t)\left(y(t)^2 - 1\right)$$

- Si ricavino gli stati di equilibrio.
- Si discuta la stabilità degli stati di equilibrio.

SOLUZIONE:

- Ponendo $\dot{x} = 0$, otteniamo che

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ -2\bar{x}_2 + \bar{x}_1^3 - \bar{x}_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 0, \pm 1 \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$

  per cui gli stati di equlibrio sono $[0,0]^T$, $[1,0]^\top$ e $[-1,0]^\top$.

- Per discutere la stabilità degli stati di equilibrio, linearizziamo il sistema nell'intorno di $[0,0]^T$, $[1,0]^\top$ e $[-1,0]^\top$. Risulta

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3\bar{x}_1^2 - 1 & -2 \end{bmatrix}_{(\bar{x},\bar{u})}$$

  il cui polinomio caratteristico è $\lambda^2 + 2\lambda - 3\bar{x}_1^2 + 1$. Ne risulta che $[0,0]^\top$ è asintoticamente stabile, mentre $[1,0]^\top$ e $[-1,0]^\top$ sono instabili.

II. Esercizio 2

Si consideri il sistema in figura

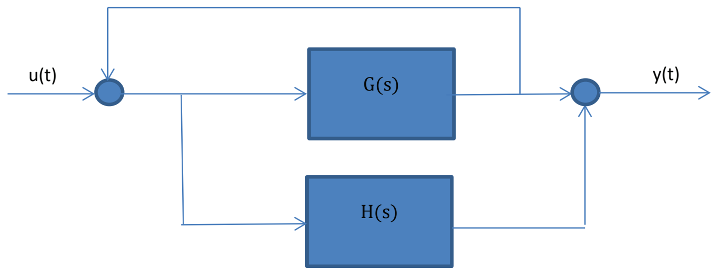

Figura 1. Figura dell'esercizio 2

- Si ricavi la funzione di trasferimento da u a y (si noti che la retroazione ha segno positivo).
- Si studi la stabilità interna ed esterna del sistema retroazionato ponendo

$$G(s) = \frac{1}{s+\alpha}, \quad H(s) = \frac{\alpha}{(s+1)}$$

SOLUZIONE:

- La funzione di trasferimento tra u e y è:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)+H(s)}{1-G(s)} = \frac{\alpha^2+(\alpha+1)s+1}{(s+1)(s+\alpha-1)}$$

- Per $\alpha > 1$ il sistema è asintoticamente stabile. Per vedere se ci sono valori di $\alpha \leq 1$ che rendono il sistema BIBO stabile, poniamo il numeratore uguale a $s = 1-\alpha$. Risulta $\alpha^2+(\alpha+1)(1-\alpha)+1 = 2 \neq 0$. quindi il sistema è BIBO stabile per $\alpha > 1$.

III. Esercizio 3

Si consideri il sistema retroazionato in figura, dove

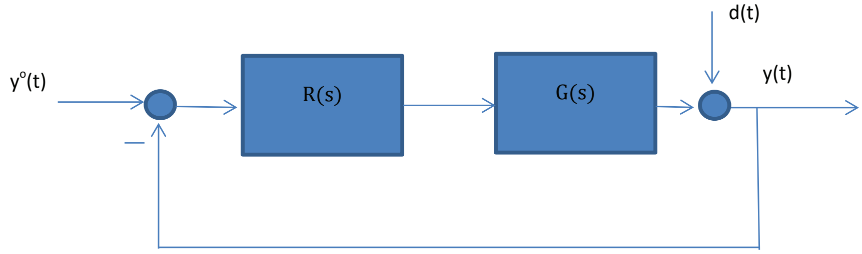

Figura 2. Figura dell'esercizio 3

$$G(s) = \frac{10e^{-0.1s}}{(1+0.1s)(1+s)}, \quad y^o(t) = sca(t), \quad d(t) = sin(0.1t)$$

Si ricavi $R(s)$ (del minimo ordine possibile) in maniera tale che:

- L'errore dovuto a $y^o(t)$ sia in valore assoluto minore di 0.1 a transitorio esaurito.
- L'errore dovuto a $d(t)$ sia attenuato in ampiezza sull'errore di almeno 10 volte.
- $\omega_c \geq 1$ rad/sec.
- $\phi_m \geq 60^o$.

SOLUZIONE:

- Per $\omega = 1$, il ritardo di fase è di 0.1 rad (circa 6^o). Per avere l'errore a transitorio esaurito minore di 0.1 il guadagno d'anello μ deve essere tale che
$$\frac{1}{1+\mu} < 0.1$$
cioè $\mu > 9$.
- Per avere il disturbo di ampiezza unitaria attenuato di 10 volte sull'errore dobbiamo imporre $|L(j0.1)| > 10$. Per avere inoltre pulsazione critica circa uguale a 1 rad/s, scelgo il regolatore come:
$$R(s) = \frac{(s+1)}{(10s+1)}$$
con cui ho
$$L(s) = \frac{10e^{-0.1s}}{(1+0.1s)(1+10s)}$$
e margine di fase $\phi_m = \pi - \arctan(10) - \arctan(0.1) - 0.1 = 1.47$ (circa 84^o).

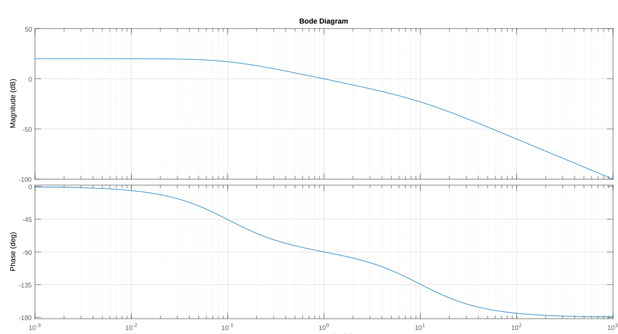

Figura 3. Diagramma di Bode di modulo e fase di $L(s)$

Politecnico di Milano
Dipartimento di Elettronica e Informazione

Politecnico di Milano
Dipartimento di Elettronica e Informazione

IV. Esercizio 4

Si consideri il sistema in figura, dove

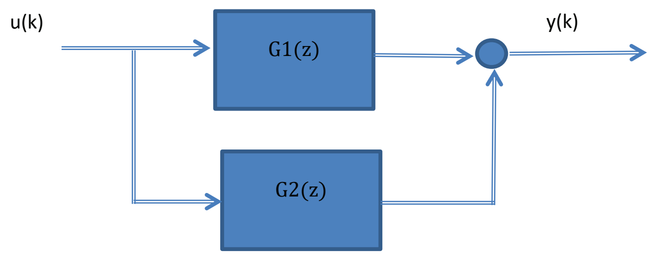

Figura 4. Figura dell'esercizio 4

$$G_1(z) = \frac{z-1}{z^2+z+0.25}, \quad G_2(z) = \frac{1}{z+0.5}$$

sono le funzioni di trasferimento di due sistemi a tempo discreto e $u(k) = sca^*(k)$.

- Si determini l'espressione analitica della risposta $y(k)$ dell'uscita.
- Si calcoli il valore iniziale e finale dell'uscita.

SOLUZIONE:

- Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti e noto che $U(z) = z/(z-1)$, si ha che $Y(z) = Y_1(z)+Y_2(z)$. Si ottiene quindi:

$$Y_1(z) = \frac{z}{(z+0.5)^2}, \quad Y_2(z) = \frac{z}{(z+0.5)(z-1)}$$

da cui

$$Y(z) = \frac{z(2z-0.5)}{(z-1)(z+0.5)^2}$$

Quindi, applicando lo sviluppo di Heaviside, si ha che per $k \geq 0$

$$y(k) = \frac{2}{3}sca^*(k) - \frac{2}{3}(-0.5)^k sca^*(k) - 2(-0.5)^k ramp^*(k)$$

- Il valore iniziale dell'uscita è

$$\lim_{z\to\infty} Y(z) = 0$$

Il valore finale dell'uscita è

$$\lim_{z\to 1}(z-1)Y(z) = \frac{2}{3}$$

V. Esercizio 5

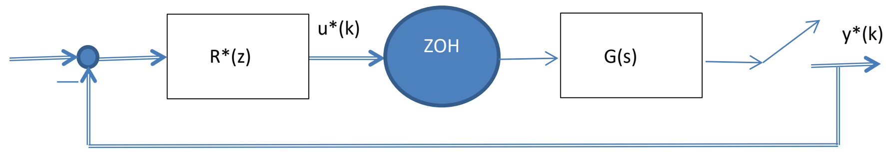

Figura 5. Figura dell'esercizio 5

Si consideri il sistema in figura, dove i convertitori sono in fase e sincroni (periodo T) e inoltre

$$G(s) = \frac{\alpha}{s}, \quad R^*(z) = \frac{1}{z}$$

- Si studi la stabilità del sistema dal punto di vista digitale in funzione di $\alpha > 0$, $T > 0$.
- Si discuta la soluzione ottenuta attraverso l'equivalente analogico del sistema.

SOLUZIONE:

- Il sistema equivalente a tempo discreto è

$$G^*(z) = \frac{\alpha T}{z-1}, \quad R^*(z) = \frac{1}{z}$$

Il sistema in anello chiuso a tempo discreto ha polinomio caratteristico $z^2 - z + \alpha T$. Quindi si ha stabilità asintotica per $\alpha T < 1$.

- Dal punto di vista analogico, noto il ritardo introdotto dal mantenitore ($e^{-s\frac{T}{2}}$), la funzione d'anello è

$$L(s) = \frac{\alpha}{s} e^{-s\frac{3}{2}T}$$

dove la frequenza di taglio $\omega_c = \alpha$, mentre il margine di fase è $\phi_m = \pi - \pi/2 - 3/2\alpha T$, da cui si ricava che

$$\alpha T < \frac{\pi}{3} = 1.047$$