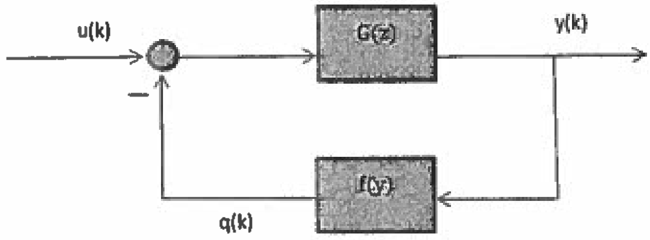
Fondamenti di Automatica per Ing. Elettrica

Prof. Patrizio Colaneri[2]

Esercizio 1

Si consideri il sistema a **tempo discreto** nonlineare



dove

$$G(z) = \frac{1}{z^2}$$

è la funzione di trasferimento di un sistema a tempo discreto lineare del secondo ordine e

$$f(y) = y^2 + \alpha y$$

è una funzione nonlineare.

- Si scrivano le equazioni in spazio di stato del sistema complessivo, con ingresso u e uscita y.
- Si ricavino gli equilibri corrispondenti a $u = 0$.
- Si studi la stabilità degli equilibri con il metodo della linearizzazione.

SOLUZIONI

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) - Bf(y(k)), \quad y(k) = Cx(k)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= -x_1(k)^2 - \alpha x_1(k) + u(k) \\ y(k) &= x_1(k) \end{aligned}$$

Gli equilibri sono:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = -(\alpha+1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico del sistema linearizzato è:

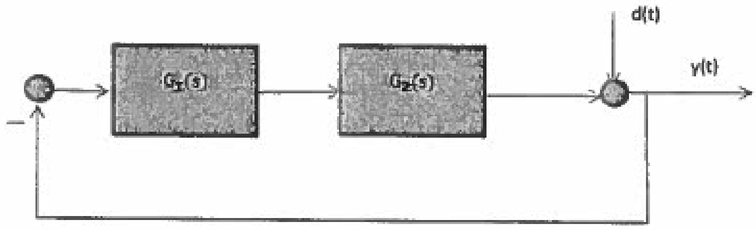
$$z^2 + \alpha + 2\bar{x}_1$$

L'equilibrio nullo è asintoticamente stabile per $|\alpha| < 1$. L'altro è asintticamente stabile per $\alpha \in (-3, -1)$.

[2] Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria, Politecnico di Milano, 20133 Milano, Italy, email: colaneri@elet.polimi.it

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema in figura



dove

$$G_1(s) = \frac{s+2}{s(s+3)}, \quad G_2(s) = \frac{s+3}{(s+1)}$$

sono le funzioni di trasferimento di due sistemi, rispettivamente del secondo e primo ordine.

- Si studi la stabilità asintotica del sistema retroazionato.
- Si studi la stabilità BIBO del sistema con ingresso d e uscita y.
- Si studi la raggiungibiltà da d.
- Si studi l'osservabilità da y.
- Si ricavi l'espressione analitica di $y(t)$ quando $d(t) = sca(t)$
- Si tracci il grafico di $y(t)$

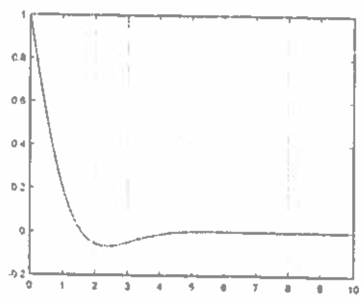
SOLUZIONI Il polinomio caratteristico è

$$(s+3)(s^2+2s+2)$$

e quindi il sistema è asintoticamente stabile. Quindi è anche BIBO stabile. I poli di $G_2(s)$ non sono cancellati da zeri di $G_1(s)$ e quindi il sistema è raggiungibile da d. Un polo di $G_1(s)$ è cancellato da uno zero di $G_2(s)$ e quindi il sistema non è osservabile da y. La funzione di trasferimento da d a y è:

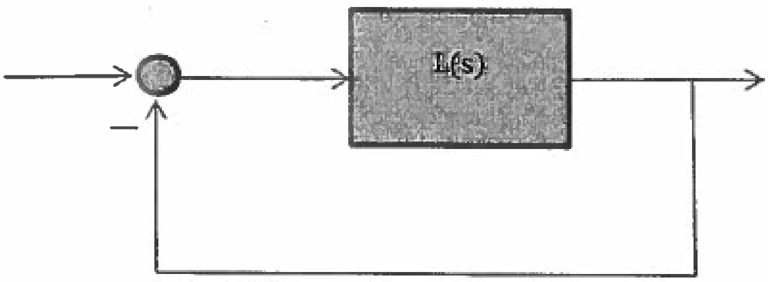
$$S(s) = \frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)} = \frac{s(s+1)}{(s^2+2s+2)}$$

Quindi $Y(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$ che è la trasformata di $y(t) = e^{-t}cos(t)$.



Esercizio 3

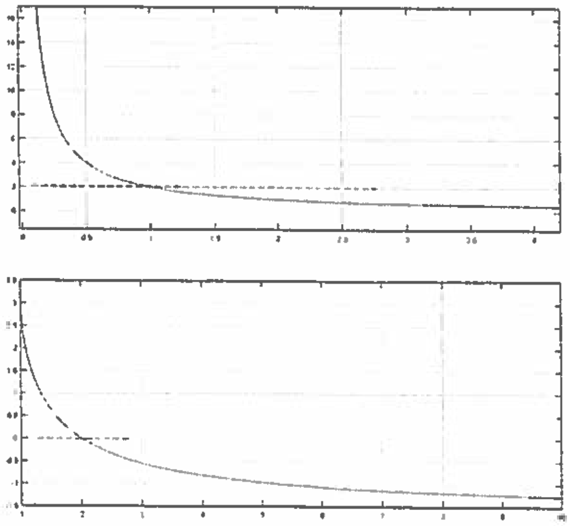
Si consideri il sistema retroazionato in figura, dove



$$L(s) = \frac{\alpha(1-s)}{(1+s)^2}$$

- **Si ricavi l'espressione analitica del margine di guadagno$M_g(\alpha)$ in funzione di $\alpha > 0$ e si tracci il grafico.**
- **Si ricavi l'espressione analitica del margine di fase $\Phi_m(\alpha)$ in funzione di $\alpha > 1$ e si tracci il grafico.**
- **Si dica per quali valori di α il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.**

SOLUZIONI Il valore di ω_π per cui la fase di $L(j\omega)$ è $-\pi$ è $\omega_\pi = \sqrt{3}$ a cui corrisponde $|L(j\omega_\pi)| = \alpha/2$.



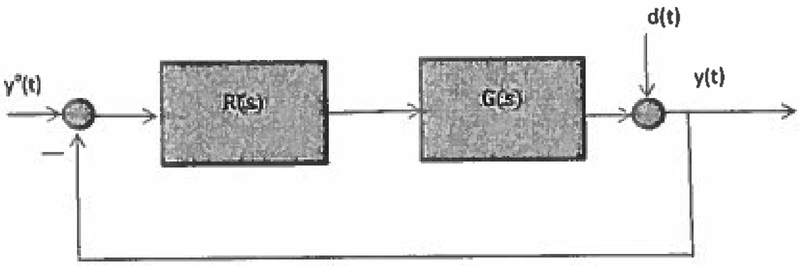
La fase critica è $-3atan(\omega_c)$ dove $\omega_c = \sqrt{\alpha^2 - 1}$. Quindi

$$M_g = \frac{2}{\alpha}, \quad \Phi_m = \pi - 3|atan(\sqrt{\alpha^2 - 1}|$$

Stabilità asitotica per $-1 < \alpha < 2$.

Esercizio 4

Si consideri il sistema retroazionato in figura, dove



$$G(s) = \frac{0.1(1-0.2s))}{(1+0.2s)(1+0.5s)}, \quad y^o(t) = sca(t), \quad d(t) = sin(0.1t)$$

Si ricavi $R(s)$ in maniera tale che:

- L'errore sia in media minore di 0.1 a regime permanente
- L'errore sia attenuato in ampiezza sull'errore di almeno 10 volte
- $\omega_c \geq 2$ rad/sec
- $\phi_m \geq 45^o$

SOLUZIONI Perchè l'errore si ain media minore di 0.1 occorre che la $L(s)$ abbia un guadagno μ che soddisfi $1/(1+\mu) < 0.1$. Per il disturbo, si deve assicurare che $|L(j0.1)| > 10$. Prendiamo $\mu = 20$,il che significa $\mu_r = 200$. Quindi $R_1(s) = 100$. Scriviamo allora

$$L_1(s) = \frac{10(1-0.2s)}{(1+0.2s)(1+0.5s)}$$

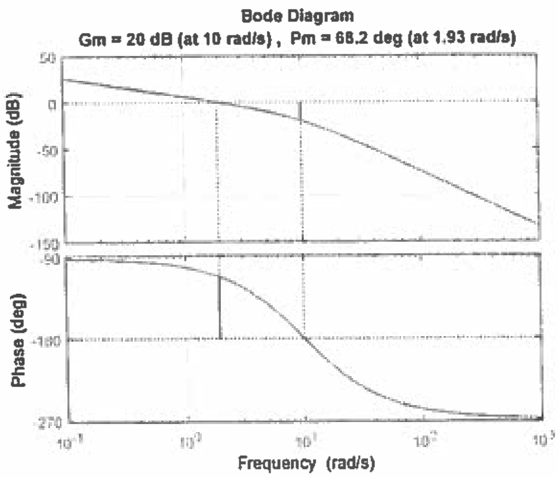
Come si vede in figura le specifiche non sono rispettate. Usiamo la rete ritardatrice

$$R_2(s) = \frac{1+0.5s}{1+10s}$$

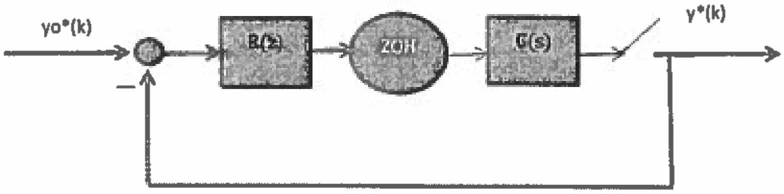
Quindi

$$L(s) = \frac{20(1-0.2s)}{(1+10s)}$$

e tutte le specifiche sono rispettate.



Esercizio 5



Si consideri il sistema di controllo digitale in figura, dove i convertitori operano in sincronia e in fase, $y^{0*}(k) = sca^*(k)$ e

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Sia T il periodo di campionamento.

- Si sintetizzi $R(z)$ in maniera tale che $y^*(k) = 1$, $k \geq N$ (minimo).
- Si valuti la banda passante e il margine di fase del sistema così ottenuto
- Si calcolino i valori di $y^*(0), y^*(1), y^*(2), \cdots, y^*(N-1)$.

SOLUZIONI Il sistema a segnali campionati è

$$G^*(z) = \frac{T}{z-1}$$

I vincoli di interpolazione sono:

$$F^0(1) = 1$$

In più $F^(z)$ deve essere FIR. Si ha

$$F^o(z) = \frac{1}{z}$$

e quindi

$$R(z) = \frac{1}{G^*(z)} \frac{F^o(z)}{1 - F^0(z)} = \frac{z-1}{T} \frac{1}{z-1} = \frac{1}{T}$$

Per cui $N = 1$, $y(0) = 0$, $y(k) = 1$, $k \geq 1$. Il sistema, dal punto di vista analogico ha una funzione di anello $L(s) = \frac{e^{-sT/2}}{Ts}$ e quindi $\omega_c = \frac{1}{T}$ e $\phi_m = 0.5 rad$