Fondamenti di Automatica per Ing. Elettrica
Prima prova in itinere

Prof. Patrizio Colaneri[2]

Esercizio 1

Si consideri il sistema nonlineare

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= e^{x_1(t)}x_2(t) - \alpha x_1(t)e^{x_2(t)} + u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + u(t)\\ y(t) &= x_2(t)\end{aligned}$$

dove α è un parametro reale.

1.1

Si ricavi lo stato di equilibrio $\bar{x}$ corrispondente all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 0$.

1.2

Si scriva la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema linearizzato intorno a $(\bar{x}, \bar{u})$.

1.3

Si discuta la stabilità dello stato di equilibrio in funzione di α.

Soluzione

1.1 Da

$$\begin{aligned}0 &= e^{x_1}x_2 - \alpha x_1 e^{x_2}\\ 0 &= -x_1\end{aligned}$$

si evince che l'unico stato di equilbrio è

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.2 Le equazioni del sistema linearizzato sono

$$\begin{aligned}\delta\dot{x}_1(t) &= -\alpha\delta x_1(t) + \delta x_2(t) + \delta u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -\delta x_1(t) + \delta u(t)\\ y(t) &= \delta x_2(t)\end{aligned}$$

e la funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{s + \alpha - 1}{s^2 + \alpha s + 1}$$

1.3 La matrice A del sistema liearizzato è:

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e il polinomio caratteristico è $s^2 + \alpha s + 1$. Quindi lo stato di equilibrio è asintoticamente stabile per $\alpha > 0$, è instabile per $\alpha < 0$. Per $\alpha = 0$ non possiamo concludere nulla utilizzando il criterio della linearizzazione.

[2] Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria, Politecnico di Milano, 20133 Milano, Italy, `email:` `patrizio.colaneri@polimi.it`

Esercizio 2

Si consideri il sistema retroazionato in figura, dove

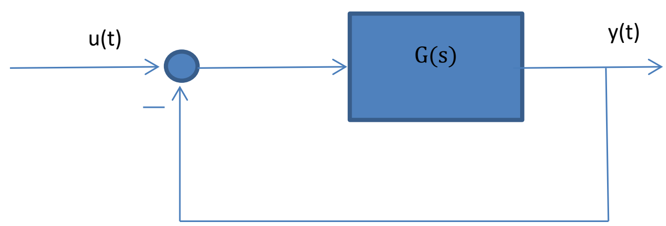


Figura 1. Figura dell'esercizio 2

$$G(s) = \frac{1}{s(s+0.5)}, \quad u(t) = sca(t)$$

2.1

Si scriva l'espressione analitica della risposta $y(t)$.

2.2

Si disegni la funzione $y(t)$, $t \geq 0$.

Soluzione

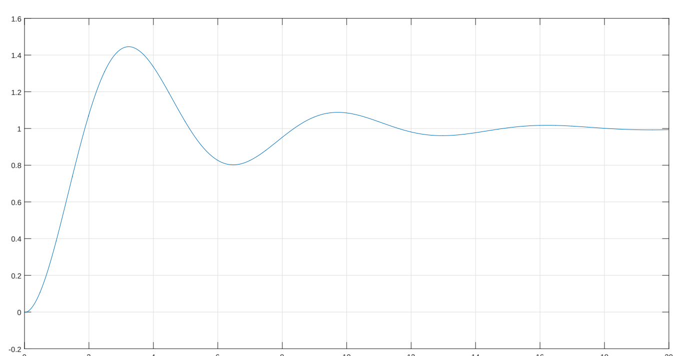
2.1

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{G(s)}{1+G(s)}U(s) = \frac{1}{s(s^2+0.5s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s+0.5}{(s+0.25)^2+0.9375} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+0.25}{(s+0.25)^2+0.9375} - \frac{0.25}{(s+0.25)^2+0.9375} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - e^{-0.25t}\left(cos(0.9682t) + 0.2582sin(0.9682t)\right) \\ &= = 1 - 1.0328e^{-0.25t}\left(0.9682cos(0.9682t) + 0.25sin(0.9682t)\right) \\ &= 1 - 1.0328e^{-0.25t}sin(0.9682t + 1.328) \end{aligned}$$

2.2



Esercizio 3

Si consideri il sistema in figura, dove

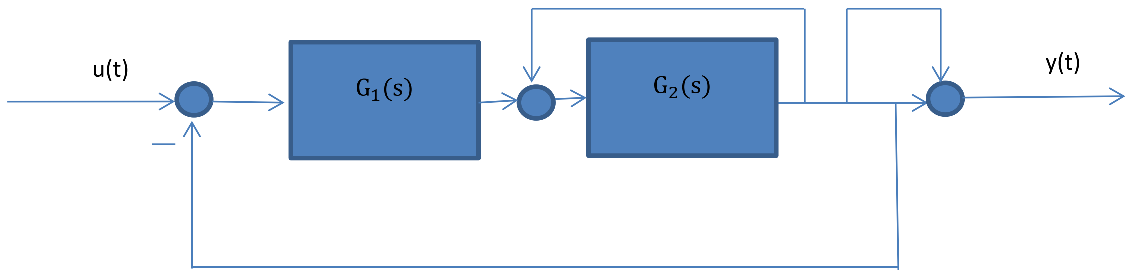


Figura 2. Figura dell'esercizio 3

$$G_1(s) = \frac{1}{s+\alpha}, \quad G_2(s) = \frac{s-2}{(s+1)^2}$$

sono le funzioni di trasferimento di due sistemi, rispettivamente del primo e secondo ordine.

3.1

Si ricavi la funzione di trasferimento $G(s)$ da u a y.

3.2

Si studi la stabilità asintotica del sistema retroazionato in funzione di α.

3.3

Si studi la stabilità BIBO del sistema con ingresso u e uscita y, in funzione di α.

Soluzione

3.1
$$G(s) = 2\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)-G_2(s)} = \frac{2(s-2)}{s^3+(1+\alpha)s^2+(4+\alpha)s+3\alpha-2}$$

3.2 Il sistema è asintoticamente stabile per $\alpha > 2/3$

3.3 Per $\alpha = -2$ si ha
$$G(s) = \frac{2}{s^2+s+4}$$

Il sistema con ingresso u e uscita y è BIBO stabile per $\alpha > 2/3$ e per $\alpha = -2$.

Esercizio 4

Si consideri il sistema descritto dall'equazioni

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)
\end{aligned}
$$

4.1

Di studino le proprietà di raggiungibilità e di osservabilità in funzione di α.

4.2

Si ricavi α e uno stato iniziale $x(0)$ che producono una uscita libera identicamente nulla.

Soluzione

4.1 Il sistema è in forma canonica di contgrollo. Quindi è raggiungibile $\forall \alpha$. Per l'osservabilità si calcola

$$
\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1-\alpha \end{bmatrix}
$$

Il determinante si annulla per $\alpha = 2$. Per questo valore di α il sistema non è osservabile.

4.2 Il movimento libero dell'uscita sarà identicamente nullo quando lo stato iniziale appartiene al sottospazio di non osservabilità

$$
Ker\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}\right) = \| \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \|
$$

Quindi $\alpha = 2$ e $x(0) = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\beta \neq 0$.

Esercizio 5

Si consideri un sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s-1}{s(s+1)(s+10)}$$

5.1

Si tracci il diagramma asintotico del modulo della risposta in frequenza $G(j\omega)$.

5.2

Si tracci il diagramma asintotico della fase della risposta in frequenza $G(j\omega)$.

5.3

Si tracci il diagramma di Nyquist.