Fondamenti di Automatica per Ing. Elettrica

Prof. Patrizio Colaneri[2]

Esame del 26 Giugno 2017

Cognome ____

Nome ____

Matricola ____

Firma ____

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni. Questo fascicolo contiene 5 esercizi. Si prega di non allegare alcun foglio.

[2] Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingeneria, Politecnico di Milano, 20133 Milano, Italy, `email: colaneri@elet.polimi.it`

I. Esercizio 1

Si consideri il sistema nonlineare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t)^2 + 2x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)^2 - 2x_2(t) - x_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -x_3(t)^2 + x_1(t)x_2(t) + u(t) \end{aligned}$$

- Si ricavino i due stati di equilibrio $\bar{x}$ corrispondenti all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 1$.
- Si discuta la stabilità degli stati di equilibrio.

SOLUZIONE:

Ponendo $\dot{x} = 0$ si ottengono:

$$\begin{cases} -\bar{x}_1^2 + 2\bar{x}_2 + 1 = 0 \\ \bar{x}_1^2 - 2\bar{x}_2 - x_1 = 0 \\ -\bar{x}_3^2 + \bar{x}_1\bar{x}_2 + 1 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 1 \\ \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_3 = \pm \end{cases}$$

da cui si ha che gli stai di equilibrio sono $[1, 0, 1]^\top$ e $[1, 0, -1]^\top$. Per discutere la stabilità degli stati di equilibrio, linearizziamo il sistema nell'intorno di $[1, 0, 1]^\top$ e $[1, 0, -1]^\top$. Risulta

$$A = \begin{bmatrix} -2\bar{x}_1 & 2 & 0 \\ 2\bar{x}_1 - 1 & -2 & 0 \\ \bar{x}_2 & \bar{x}_1 & -2\bar{x}_3 \end{bmatrix}_{(\bar{x},\bar{u})}$$

il cui polinomio caratteristico è $(s - \bar{x}_3)(s^2 + 2s(1 + \bar{x}_1) + 2)$. Ne risulta che $[1, 0, 1]^\top$ è asintoticamente stabile mentre $[1, 0, -1]^\top$ è instabile.

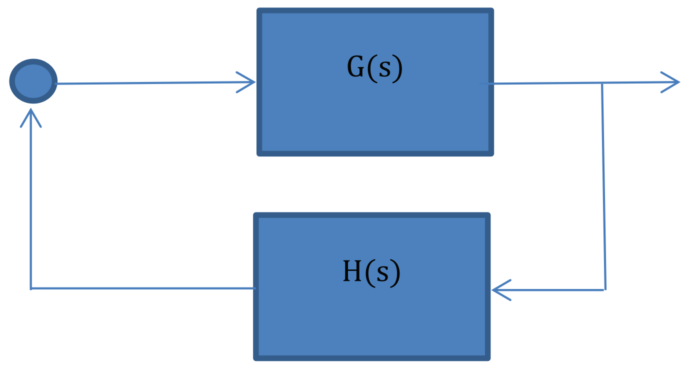

Figura 1. Figura dell'esercizio 2

II. Esercizio 2

Si consideri il sistema in figura (si noti che la retroazione ha segno positivo) dove

$$G(s) = \frac{1}{(s+\alpha)(s+1)}, \quad H(s) = \frac{9\alpha}{(s+1)}$$

- Si scriva il polinomio caratteristico del sistema retroazionato
- Si tracci il luogo delle radici (diretto e inverso) in funzione di α
- Si studi la stabilità del sistema retroazionato in funzione di α

SOLUZIONE:

Trattandosi di un sistema a retroazione positiva la funzione d'anello chiuso è

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)} = \frac{s+1}{s^3 + (2+\alpha)s^2 + (2\alpha+1)s - 8\alpha}$$

Il polinomo caratteristico è

$$p_c = s^3 + (2+\alpha)s^2 + (2\alpha+1)s - 8\alpha$$

che corrisponde a

$$1 + \alpha L(s) = 0, \quad L(s) = \frac{(s+4)(s-2)}{s(s+1)^2}$$

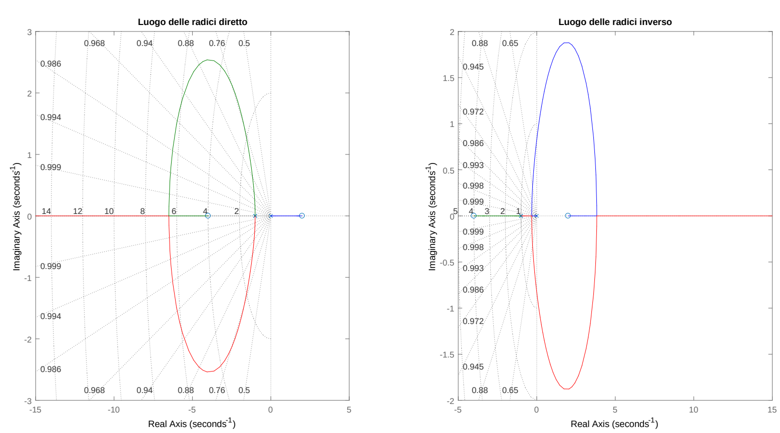

Figura 2. Luogo delle radici

III. Esercizio 3

Si consideri il sistema retroazionato in figura, dove

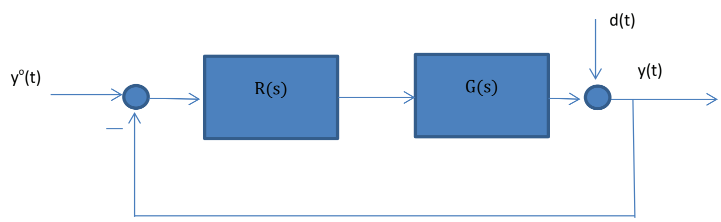

Figura 3. Figura dell'esercizio 3

$$G(s) = \frac{10}{(1+0.1s)(1+s)}, \quad y^o(t) = sca(t), \quad d(t) = sin(0.1t)$$

Si ricavi $R(s)$ (del minimo ordine possibile) in maniera tale che:

- L'errore sia in media nullo a regime permanente
- Il disturbo sia attenuato in ampiezza sull'errore di almeno 10 volte
- $\omega_c \geq 1$ rad/sec
- $\phi_m \geq 60^o$

SOLUZIONE:

- Per avere errore a transitorio esaurito nullo a fronte di un ingresso a scalino $R(s)$ deve avere un polo nell'origine.
- Per avere il disturbo di ampiezza unitaria attenuato di 10 volte sull'errore, guardo la funzione di sensitività e faccio in mode che il guadagno sia maggiore di 20 dB per frequenze minori di 0.1 rad/s.
- Scelgo il regolatore come:

$$R(s) = 0.5\frac{(s+1)}{s}$$

da cui

$$L(s) = \frac{5}{s(1+0.1s)}$$

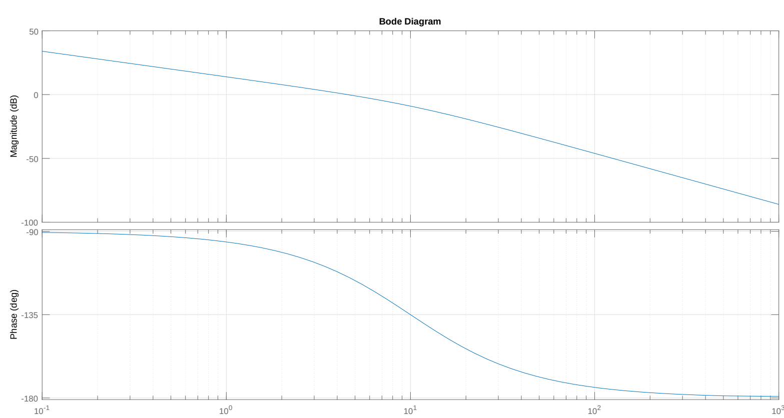

Figura 4. Diagramma di Bode di modulo e fase di $L(s)$

- Si ha $\omega_c = 4.67$ rad/s.
- Si ha $\phi_m = 180 - 115 = 65^o$.

IV. Esercizio 4

Si consideri il sistema in figura, dove

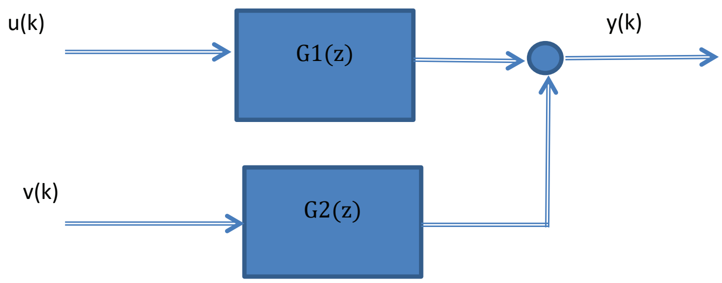

Figura 5. Figura dell'esercizio 4

$$G_1(z) = \frac{z-1}{z^2+0.5}, \quad G_2(z) = \frac{1}{z^2+0.5}$$

sono le funzioni di trasferimento di due sistemi a tempo discreto, e

$$u(k) = sca^*(k), \quad v(k) = imp^*(k)$$

- Si studi la stabilità del sistema
- Si determini l'espressione analitica di $y(k)$

SOLUZIONE:

- Per studiare la stabilità del sistema osservo i poli di G_1 e G_2: i poli di G_1 e G_2 sono complessi coniugati pari a $\pm 0.7071j$. Vale il principio di sovrapposizione degli effetti e tutti i poli sono dentro il cerchio di raggio unitario, quindi il sistema è asintoticamete stabile.
  Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti e noto che $sca^*(k) = z/(z-1)$ e $imp^*(k) = 1$, si ha che $Y(z) = Y_1(z) + Y_2(z)$. Si ha che:
  $$Y_1(z) = \frac{z}{z^2+0.5}, \quad Y_2(z) = \frac{1}{z^2+0.5}$$
  da cui
  $$Y(z) = \frac{z+1}{z^2+0.5} = \frac{A}{z+j\sqrt{0.5}} + \frac{A^*}{z-j\sqrt{0.5}}, \quad A = \frac{j\sqrt{2}+1}{2}$$
  Quindi $y(0) = 0$ e, per $k \geq 1$
  $$y(k) = 2(\sqrt{0.5})^{k-1} Re(A^*(j)^{k-1}) = 2(\sqrt{0.5})^{k-1} Re(A^* e^{j(\pi(k-1)/2)}) = (\sqrt{0.5})^{k-1}\left(cos(\pi(k-1)/2) + \sqrt{0.5} sin(\pi(k-1)/2)\right)$$

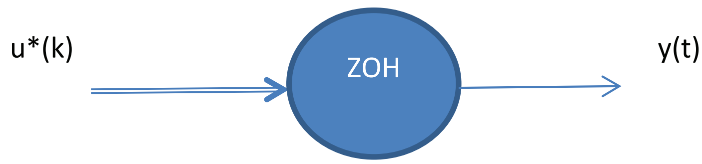

Figura 6. Figura dell'esercizio 5

V. Esercizio 5

Si consideri il sistema in figura, dove ZOH rappresenta un mantenitore ideale di ordine zero con periodo T. Siano $U^*(z)$ e $Y(s)$ la trasformata Zeta dell'ingresso e quella di Laplace dell'uscita, rispettivamente.

- Si precisi il modo di funzionamento del mantenitore, cioé il legame temporale tra $u^*(k)$ e $y(t)$
- Si dimostri la formula nelle trasformate (Zeta di $u^*(k)$ e Laplace di $y(t)$)

$$Y(s) = \frac{1-e^{sT}}{s} U^*(e^{sT})$$

SOLUZIONE:

- Il mantenitore ha il compito di trasformare un segnale a tempo discreto in un segnale a tempo continuo secondo la relazione:

$$y(t) = u^*(k), \quad kT < t < (k+1)T$$

- Per valutare la relazione tra $u^*(k)$ e $y(t)$, si consideri la relazione tra $U^*(z)$ e $Y(s)$, ovvero la trasformata Zeta dell'ingresso e quella di Laplace dell'uscita, rispettivamente. Assumiamo un ingresso a impulso $u^*(k) = imp^*(k)$, tale che $U^*(z) = 1$. L'uscita è un impulso rettangolare $y(t) = sca(t) - sca(t-T)$, con trasformata di Laplace uguale a

$$H_0 = \frac{1-e^{sT}}{s}$$

Poiché

$$U^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u^*(k) z^{-k}$$

e $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u^*(k) y(t-kT)$, la cui trasformata di Laplace è

$$Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u^*(k) e^{-skT} H_0(s) = H_0(s) U^*(e^{sT})$$

con $z = e^{sT}$, che dimostra a formula nelle trasformate (Zeta di $u^*(k)$ e Laplace di $y(t)$)

$$Y(s) = \frac{1-e^{sT}}{s} U^*(e^{sT})$$