Fondamenti di Automatica per Ing. Elettrica

Prof. Patrizio Colaneri[2]

Esame del 26 Settembre 2017

Cognome ____________________________________

Nome ____________________________________

Matricola ____________________________________

Firma ____________________________________

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni. Questo fascicolo contiene 5 esercizi. Si prega di non allegare alcun foglio.

[2] Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingeneria, Politecnico di Milano, 20133 Milano, Italy, `email: colaneri@elet.polimi.it`

I. Esercizio 1

Si consideri il sistema non lineare

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \cos(x_1) - \sin(x_2) - x_1 u \\ \dot{x}_2(t) &= \sin(x_1) - \cos(x_2) \\ y(t) &= x_1 + x_2\end{aligned}$$

- Si scrivano le equazioni del sistema linearizzato intorno ad un equlibrio ($\bar{x}$, $\bar{u}$, $\bar{y}$).
- Sia $\bar{u} = 1$. Si calcolino gli stati di equilibrio $\bar{x}$ e si studi la stabilità asintotica.

SOLUZIONE:

- Le equazioni del sistema linearizzato sono:

$$\begin{cases}\delta\dot{x}_1 = -(\sin(\bar{x}_1) + \bar{u})\delta x_1 - \cos(\bar{x}_2)\delta x_2 \\ \delta\dot{x}_2 = \cos(\bar{x}_1)\delta x_1 + \sin(\bar{x}_2)\delta x_2 \\ \delta y = \delta x_1 + \delta x_2\end{cases}$$

- Ponendo $\dot{x} = 0$, e noto che $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)$, si ottiene che

$$\begin{cases}\cos(\bar{x}_1) - \sin(\bar{x}_2) - \bar{x}_1 = 0 \\ \sin(\bar{x}_1) = \cos(\bar{x}_2)\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\cos(\bar{x}_1) - \sin(\bar{x}_2) - \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_1 = \frac{\pi}{2} - \bar{x}_2\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = \frac{\pi}{2}\end{cases}$$

  per cui lo stato di equlibrio è $[0,\ \frac{\pi}{2}]^\top$.

- Per discutere la stabilità asintotica linearizziamo il sistema nell'intorno di $[0,\ \frac{\pi}{2}]^\top$. Il polinomio caratteristico risulta $(\lambda + 1)(\lambda - \sin(\bar{x}_2))$. Ne risulta che $[0,\ \frac{\pi}{2}]^\top$ è instabile.

II. Esercizio 2

Si consideri il sistema retroazionato

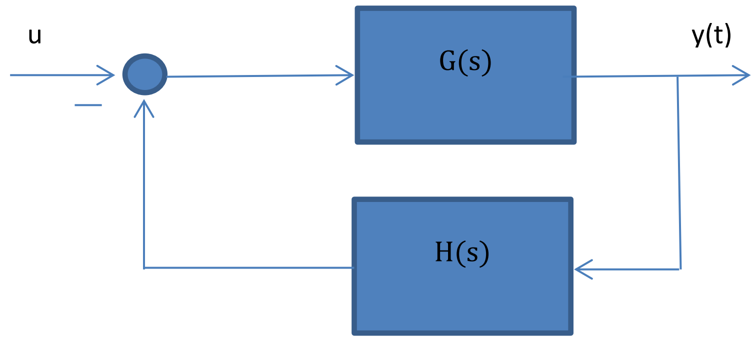

Figura 1. Figura dell'esercizio 2

dove $G(s) = \frac{1}{s}$, mentre la risposta $y(t)$ allo scalino $u(t) = sca(t)$ è data dalla seguente espressione analitica:

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) + 1$$

- Si ricavi $H(s)$.

SOLUZIONE:

Si considerino gli sviluppi di Heaviside e le antitrasformate dei singoli addendi da cui si ottiene

$$Y(s) = \left[-\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{s}\right] = \frac{s+1}{s^3+s^2+s}$$

La risposta allo scalino del sistema retroazionato è

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + sH(s)}$$

Uguagliando le precedenti espressioni si ottiene

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

III. Esercizio 3

Si consideri il sistema retroazionato in figura, dove

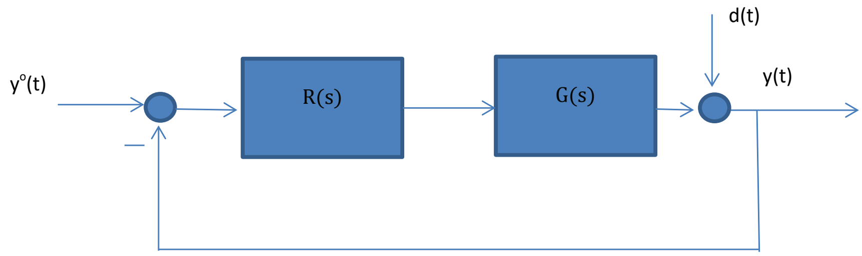

Figura 2. Figura dell'esercizio 3

$$G(s) = \frac{1 - \frac{s}{2}}{s(s+1)}, \quad y^o(t) = sca(t), \quad d(t) = ram(t)$$

Si ricavi $R(s)$ (del minimo ordine possibile) in maniera tale che:

- $|e_\infty| < 0.2$
- $\omega_c \geq 0.5$ rad/sec.
- $\phi_m \geq 30^o$.

SOLUZIONE:

Per avere l'errore a transitorio esaurito minore di 0.2 il guadagno d'anello deve essere tale che

$$\frac{1}{\mu} < 0.2$$

cioè $\mu > 5$. Scelgo il regolatore come

$$R(s) = 10\frac{s20+1}{s300+1}$$

con cui ho

$$L(s) = \frac{10(1-\frac{s}{2})(s20+1)}{s(s300+1)(s+1)}$$

frequenza di taglio 0.6 rad/s e margine di fase $\phi_m = 38^o$

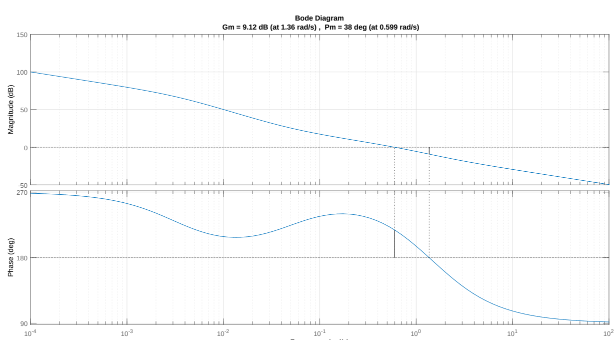

Figura 3. Diagramma di Bode di modulo e fase di $L(s)$

Politecnico di Milano
Dipartimento di Elettronica e Informazione

Politecnico di Milano
Dipartimento di Elettronica e Informazione

IV. Esercizio 4

Si consideri il sistema a segnali campionati retroazionato dove

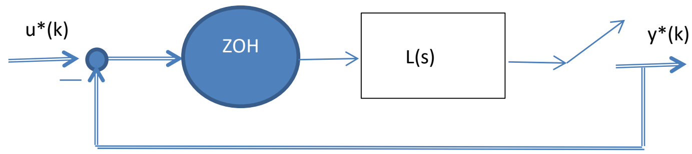

Figura 4. Figura dell'esercizio 4

$$L(s) = \frac{1-s}{(1+s)(2+s)}$$

e i dispositivi di conversione operano in sincronia e in fase con periodo $T = ln(2)$.

- Si ricavi una rappresentazione di stato del sistema a tempo discreto da $u^*(k)$ a $y^*(k)$.
- Si studi la stabilità del sistema in Figura.

SOLUZIONE:

- Consideriamo $L(s)$ scritta come:
$$L(s) = \frac{2}{(1+s)} - \frac{3}{2+s}$$
da cui si ottiene la seguente funzione di trasferimento a tempo discreto da $u^*(k)$ a $y^*(k)$
$$L^*(z) = \frac{2(1-e^{-T})}{z-e^{-T}} - \frac{\frac{3}{2}(1-e^{-2T})}{(z-e^{-2T})}$$
- Per studiare la stabilità del sistema in Figura, consideriamo il polinomio caratteristico
$$(z-e^{-T})(z-e^{-2T}) + 2(1-e^{-T})(z-e^{-2T}) - \frac{3}{2}(1-e^{-2T})(z-e^{-T})$$
Sostituendo $T = ln(2)$, si ottiene $z^2 - 0.875z + 0.4375$. Le radici del polinomio hanno modulo minore di 1, quindi si ha stabilità asintotica.

V. Esercizio 5

Si consideri il sistema a tempo discreto

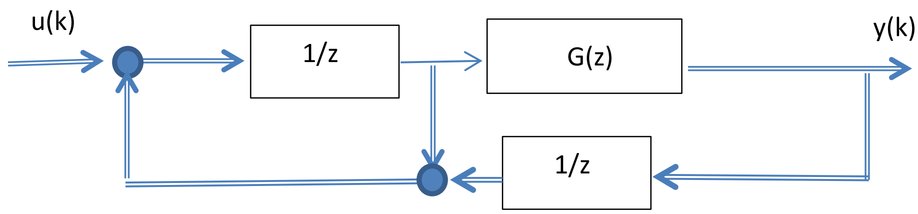

Figura 5. Figura dell'esercizio 5

- Ricavare $G(z)$, se possibile, in maniera che la funzione di trasferimento del sistema da $u(k)$ a $y(k)$ sia quella di un sistema di tipo FIR.

SOLUZIONE:

Calcoliamo la funzione di trasferimento da $u(k)$ a $y(k)$:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{G(z)z}{z^2 - z - G(z)} = \frac{N(z)z}{D(z)(z^2 - z) - N(z)}$$

Per fare in modo che sia una funzione di trasferimento di un sistema di tipo FIR, pongo il numeratore $N(z) = z^2 - z$ e il denominatore $D(z) = 1 + z^3$, da cui:

$$\frac{G(z)z}{z^2 - z - G(z)} = \frac{(z^2 - z)z}{(1 + z^3)(z^2 - z) - (z^2 - z)} = \frac{1}{z^2}$$