Fondamenti di Automatica per Ing. Elettrica

Prof. Patrizio Colaneri[2], Prof. Gian Paolo Incremona

Esame del 07 Settembre 2018

Cognome ______________________________

Nome ______________________________

Matricola ______________________________

Firma ______________________________

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni. Questo fascicolo contiene 5 esercizi. Si prega di non allegare alcun foglio.

[2] Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingeneria, Politecnico di Milano, 20133 Milano, Italy, `email: colaneri@elet.polimi.it`

I. Esercizio 1

Si consideri il sistema nonlineare

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -x_1(t)^2 - x_2(t)x_3(t) + u(t) \\
\dot{x}_2(t) &= x_3(t)^2 - 2x_2(t) - x_3(t) \\
\dot{x}_3(t) &= -x_3(t)^2 + 2x_2(t) + u(t)
\end{aligned}$$

- Si ricavino i due stati di equilibrio $\bar{x}$ corrispondenti all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 1$.
- Si discuta la stabilità degli stati di equilibrio.

========================SOLUZIONE==============================

Ci sono due punti di equilibrio, segnatamente

$$\bar{x}^{[1]} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}^{[2]} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ai quali corrispondono le matrici dinamiche del dei sistemi linearizzati

$$A^{[1]} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad A^{[2]} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Quindi $\bar{x}^{[1]}$ è asintotimebnte stabile, mentre $\bar{x}^{[2]}$ è instabile.

II. Esercizio 2

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

- Si ricavi la funzione di trasferimento e si calcolino gli zeri e poli
- Se ne tracci il grafico qualitativo ponendo in evidenza il tempo di assestamento, la pulsazione e smorzamento delle eventuali oscillazioni, il valore iniziale, il valore finale e il valore iniziale della derivata).
- Si calcoli l'espressione analitica della risposta $y(t)$ al punto precedente, e

==========================SOLUZIONE================================

La funzione di trasferimento si calcola facilmente (il sistema è in forma canonica di controllo):

$$G(s) = \frac{1-s}{s^2+2s+2} = \frac{1-s}{(s+1)^2+1}$$

C'è uno zero (finito) in $s = 1$ e due poli complessi coniugati in $s = -1 \pm j$.

Inoltre

$$Y(s) = G(s)/s = \frac{0.5}{s} - \frac{10.5s+2}{(s+1)^2+1} = \frac{0.5}{s} - \frac{1.5}{(s+1)^2+1} - \frac{0.5(s+1)}{(s+1)^2+1}$$

col che

$$y(t) = 0.5 - 1.5e^{-t}sin(t) - 0.5e^{-t}cos(t)$$

Il valore finale è $G(0) = 0.5$, il valore iniziale è $\lim_{s\to\infty} G(s) = 0$ della derivata è $\lim_{s\to\infty} sG(s) = -1$, smorzamento $1/\sqrt{2}$, pulsazione naturale $\sqrt{2}$, pulsazione delle oscillazioni $1r/s$, periodo 2π.

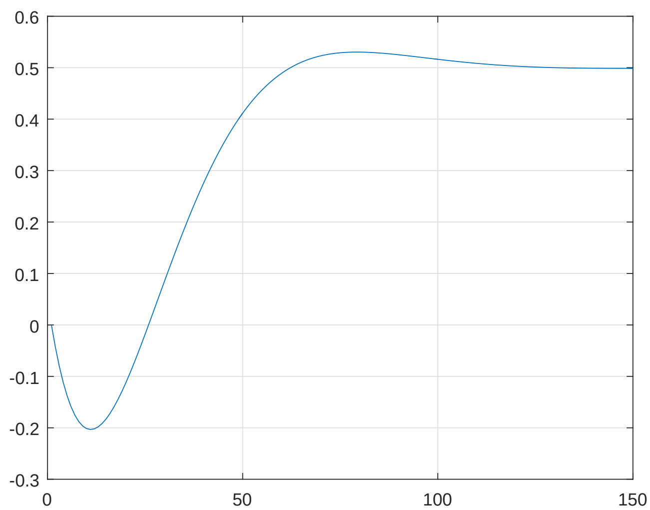

Figura 1. Risposta allo scalino

III. Esercizio 3

Si consideri il sistema retroazionato in figura, dove

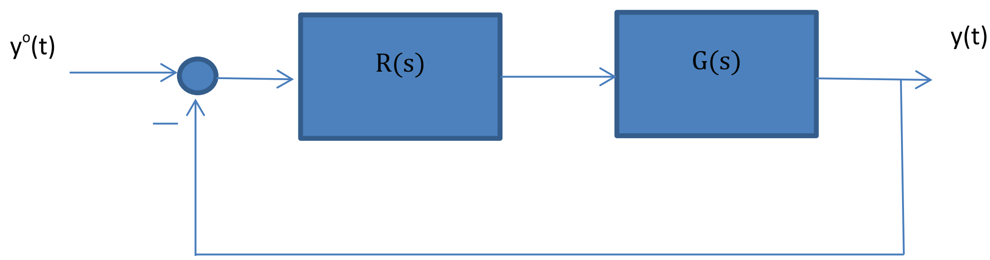

Figura 2. Figura dell'esercizio 3

$$G(s) = \frac{10(1-s)}{(1+s)^2}, \quad R(s) = \frac{\alpha}{s}$$

- Si studi la stabilità del sistema retroazionato in funzione di $\alpha > 0$ utilizzando il criterio di Bode.
- Si disegni il luogo delle radici per $\alpha > 0$.

==========================SOLUZIONE================================

Sia ω_c la pulsazione critica. Il margine di fase è

$$\phi_m = \pi/2 - 2atan(\omega_c)$$

Quindi per la stabilità occorre e basta che $\omega_c < tan(\pi/6)$. D'altra parte ω_c soddisfa

$$\frac{10\alpha}{\omega_c\sqrt{1+\omega_c^2}} = 1$$

e quindi $\alpha < \frac{tan(\pi/6)\sqrt{1+tan(\pi/6)^2)}}{10} = 1/15$.

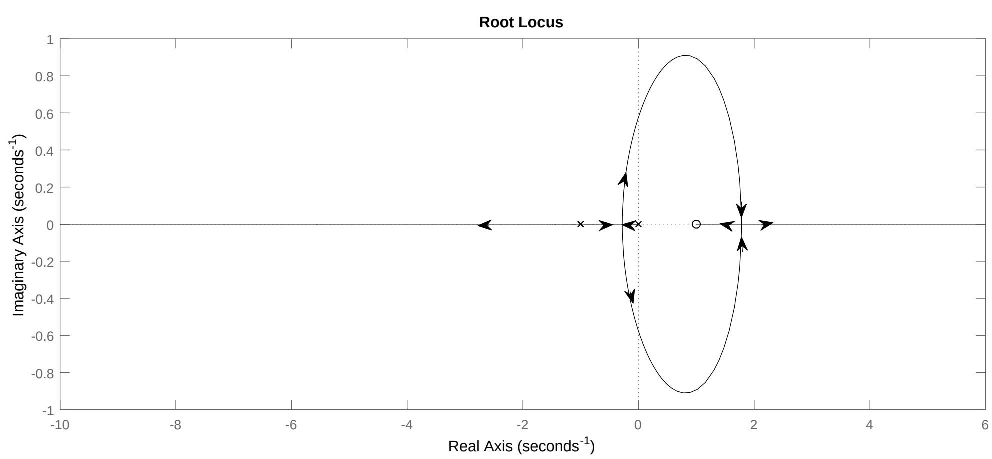

Figura 3. Luogo delle radici per $\alpha > 0$

IV. Esercizio 4

Si consideri il sistema in figura, dove

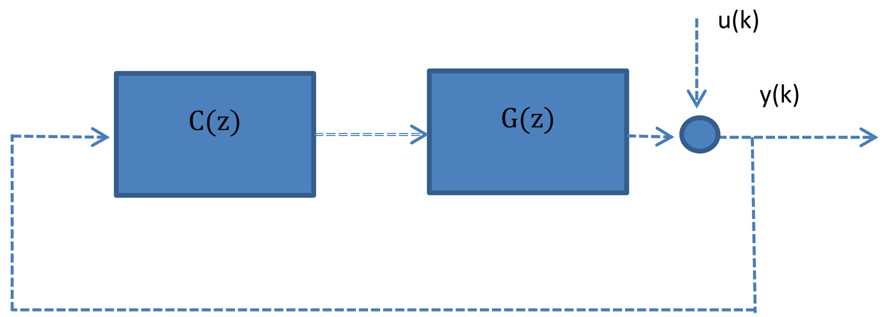

Figura 4. Figura dell'esercizio 4

$$G(z) = \frac{1}{z}, \quad C(z) = \frac{z-\alpha}{z}$$

sono le funzioni di trasferimento di due sistemi a tempo discreto.

- Si studi la stabilità asintotica del sistema in funzione di α.
- Si studi la stabilità BIBO (da u a y) in funzione di α.
- Si studi la raggiungibilità da u in funzione di α.
- Si studi l'osservabilità da y in funzione di α.

========================SOLUZIONE============================

Il polinomio caratteristico è:

$$z^2 - z + \alpha$$

e quindi il sistema è asintoticamente stabile per $\alpha \in (0, 1)$.

La funzione di trasferimento è:

$$G(z) = \frac{z^2}{z^2 - z + \alpha}$$

Eventuali cancellazioni si hanno solo per $z = 0$, chè è un punto di stabilità, quindi il sistema è BIBO stabile per $\alpha \in (0, 1)$. Per la raggiungibilità dobbiamo vedere se ci sono zeri di $C(z)$ che cancellano poli di $G(z)$. In effetti ciò avviene per $\alpha = 0$. Il sistema + raggiungibile da u per $\alpha \neq 0$.

Per l'osservabilità dobbiamo vedere se ci sono zeri di $G(z)$ che cancellano poli di $C(z)$. Ciò non avviene. Il sistema è osservabile da y per ogni α.

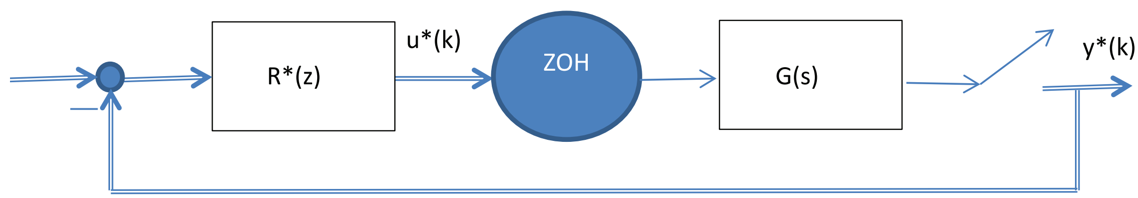

Figura 5. Figura dell'esercizio 5

V. Esercizio 5

Si consideri il sistema in figura, dove i due convertitori operano in fase e sincronia con periodo $T = 1$ e

$$G(s) = \frac{\mu}{s}, \quad R^*(z) = \frac{1}{z}$$

- Si studi la stabilità del sistema ibrido retroazionato in funzione di $\mu > 0$.
- Ponendo $\mu = 0.25$ si ricavi l'espressione analitica della risposta $y^*(k)$ quando il segnale di riferimento è uno scalino unitario.

=========================SOLUZIONE==============================

Il sistema a segnali campionati corrispondente a $G(s)$ è

$$G^*(z) = \frac{T}{z-1} = \frac{1}{z-1}.$$

Quindi il polinomio caratteristico del sistema retroazionato è:

$$z^2 - z + \mu$$

C'è stabilità per $\mu \in (0, 1)$.

Ponendo $\mu = 0.25$ la funzione di trasferimento dal riferimento all'uscita è:

$$F^*(z) = \frac{0.25}{(z-0.5)^2}$$

Quindi

$$Y^*(z) = \frac{0.25z}{(z-1)(z-0.5)^2} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5} - \frac{0.5z}{(z-0.5)^2}$$

e

$$y^*(k) = 1 - (0.5)^k - 0.5k(0.5)^k, \quad k \geq 0$$