Fondamenti di Automatica per Ing. Elettrica

Prof. Patrizio Colaneri and Prof. Gian Paolo Incremona

Esame del 13 Febbraio 2018

Cognome ____

Nome ____

Matricola ____

Firma ____

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni. Questo fascicolo contiene 5 esercizi. Si prega di non allegare alcun foglio.

Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingeneria, Politecnico di Milano, Piazza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milan, Italy, e-mail: `patrizio.colaneri@polimi.it`, `gianpaolo.incremona@polimi.it`

I. Esercizio 1

Si consideri il sistema elettrico in figura.

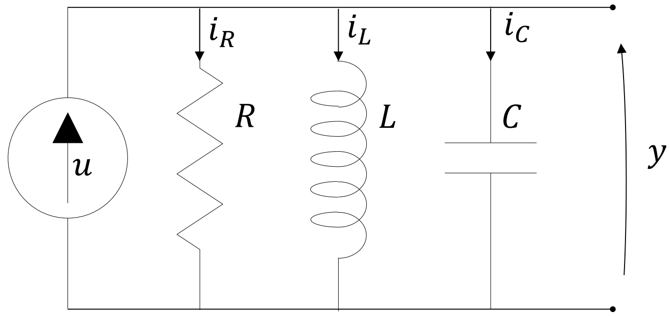

Figura 1. Figura dell'esercizio 1

dove $R > 0$, $L > 0$, $C > 0$ sono i valori di resistenza, induttanza e capacità del resistore, dell'induttore e capacitore, rispettivamente, mentre u è un generatore di corrente caratterizzato dall'equazione $u = \alpha(\sin(y) - \cos(y))$.

- Si ricavino le equazioni del sistema retroazionato.
- Si ricavino gli stati di equilibrio $\bar{x}$ in funzione del parametro reale α.
- Si studi la stabilità asintotica di $\bar{x}$ in funzione del parametro reale α.

SOLUZIONE:

- Ponendo la corrente sull'induttore uguale a x_1 e la tensione sul capacitore uguale a x_2, le equazioni del sistema retroazionato sono:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{L} x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}\left(-x_1 - \frac{1}{R}x_2 + \alpha(\sin(x_2) - \cos(x_2))\right) \end{cases}$$
- Gli stati di equilibrio sono $[-\alpha \;\; 0]^\top$.
- Per discutere la stabilità asintotica linearizziamo il sistema nell'intorno di $[-\alpha \;\; 0]^\top$. Il polinomio caratteristico risulta $\lambda^2 + \left(\frac{1}{RC} - \frac{\alpha}{C}\right)\lambda + \frac{1}{LC}$. Ne risulta che $[-\alpha \;\; 0]^\top$ è asintoticamente stabile per $\alpha < \frac{1}{R}$.

II. Esercizio 2

Si consideri il sistema retroazionato in figura, dove

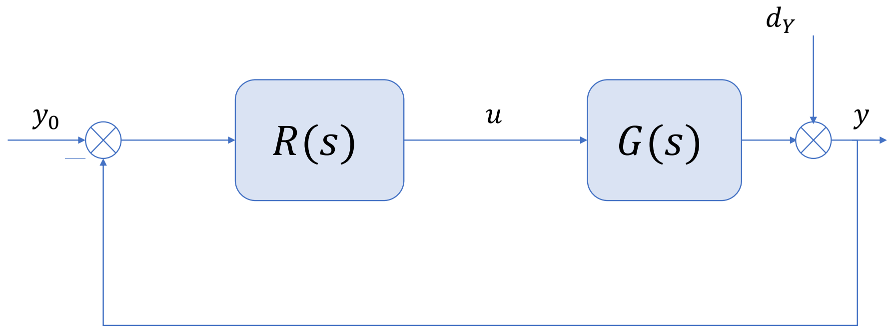

Figura 2. Figura dell'esercizio 2

$$G(s) = 10\frac{(10-s)}{s(s+100)}, \quad y_0(t) = \mathrm{ram}(t), \quad d_Y(t) = \sin(\omega t),\ \omega \leq 0.1 \text{ rad/sec}$$

Si ricavi $R(s)$ (del minimo ordine possibile) in maniera tale che:

- l'errore $|y_0 - y|$ a regime sia minore di 0.01;
- il disturbo sia attenuato in ampiezza di almeno 10 volte;
- $\omega_c \geq 5$ rad/sec;
- $\phi_m \geq 45^o$.

SOLUZIONE:

Per avere l'errore a transitorio esaurito minore di 0.01 il guadagno del regolatore deve essere tale che

$$\frac{1}{\mu_R} \leq 0.01$$

cioè $\mu_R \geq 100$. Scelgo il regolatore come

$$R(s) = 100\frac{(\frac{s}{0.5}+1)}{(\frac{s}{0.03}+1)}$$

con cui ho

$$L(s) = \frac{100}{s}\frac{(1-0.1s)\,(\frac{s}{0.5}+1)}{(\frac{s}{0.03}+1)(s0.01+1)}$$

frequenza di taglio 7.49 rad/sec e margine di fase $\phi_m = 45.3^o$

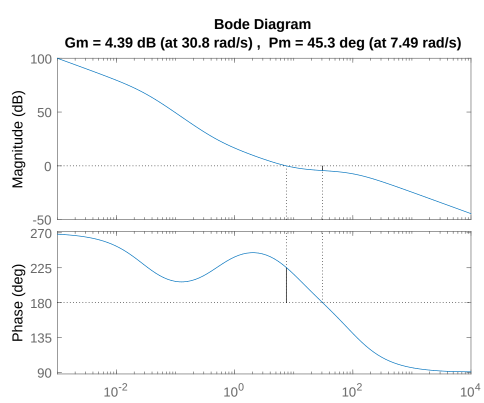

Figura 3. Diagramma di Bode di modulo e fase di $L(s)$

III. Esercizio 3

Si consideri il sistema retroazionato in figura, dove

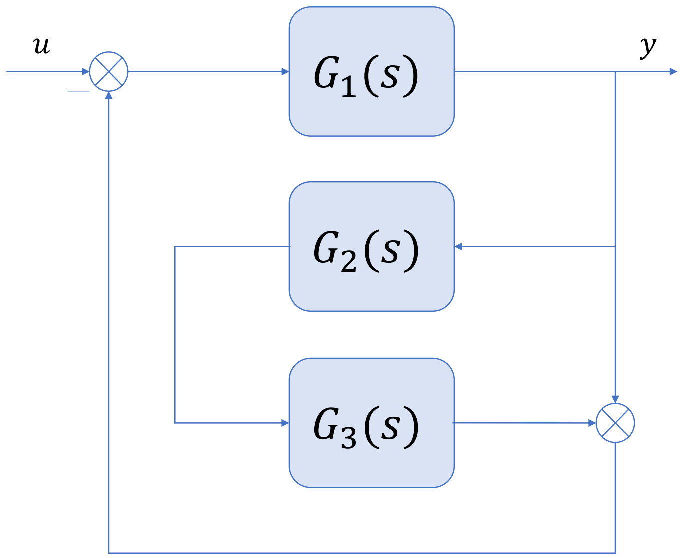

Figura 4. Figura dell'esercizio 3

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+\alpha)}, \quad G_2(s) = \frac{\beta}{s}, \quad G_3(s) = \frac{1}{s+1}\ .$$

- Si calcoli la funzione di trasferimento da u a y.
- Si studi la stabilità interna e BIBO del sistema in funzione di α e β.

SOLUZIONE:

- La funzione di trasferimento da u a y è

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)(1 + G_2(s)G_3(s))} = \frac{s(s+1)}{s^3 + (2+\alpha)s^2 + (1+\alpha)s + \beta}\ .$$

- Il sistema è asintoticamente stabile per $\alpha > \frac{-3+\sqrt{1+4\beta}}{2}$ e $\beta > 0$, e BIBO stabile per $\alpha > -1$ e $\beta = 0$.

IV. Esercizio 4

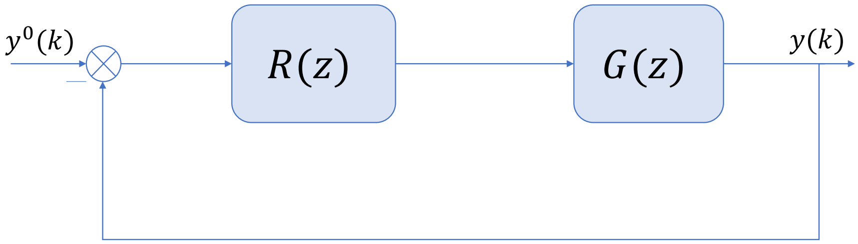

Figura 5. Figura dell'esercizio 4

Si consideri il sistema retroazionato in figura, dove $y^0(k) = \text{sca}^*(k)$,

$$G(z) = \frac{1}{z-3} \ ,$$

e $y(k)$ come in Figura 6, cioé $y(3k) = 0,\ y(3k+1) = (0.5)^k,\ y(3k+2) = (-0.5)^k,\ k \geq 0$. Si ricavi $R(z)$.

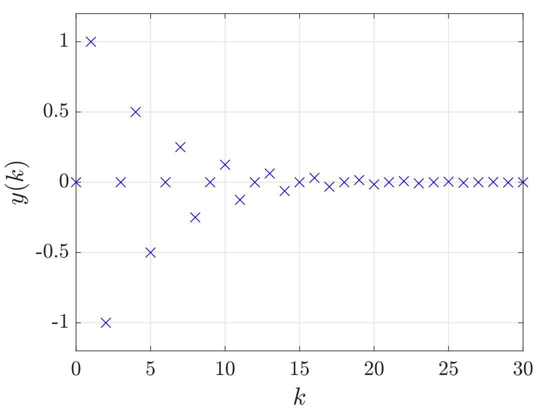

Figura 6. Grafico di $y(k)$

SOLUZIONE:

Si consideri l'espressione di $y(z)$,

$$\begin{aligned} y(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} y(3k+1)z^{-(3k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} y(3k+2)z^{-(3k+2)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (0.5)^k z^{-(3k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} (-0.5)^k z^{-(3k+2)} \\ &= \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z^3}\right)^k + \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2z^3}\right)^k \\ &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{2z^3}} + \frac{1}{z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{2z^3}} = \frac{4z^5+4z^4+2z^2-2z}{4z^6-1} \ . \end{aligned}$$

Considerando che $y(z) = \frac{RG}{1+RG}\frac{z}{z-1}$, si ricava

$$R(z) = \frac{1}{G(z)}\frac{y(z)(z-1)}{(z+y(z)-y(z)z)} = \frac{4z^6-12z^5-4z^4+14z^3-10z^2+14z-6}{4z^6-4z^5+3z^4+z^3-2z^2+3z-2}$$

V. Esercizio 5

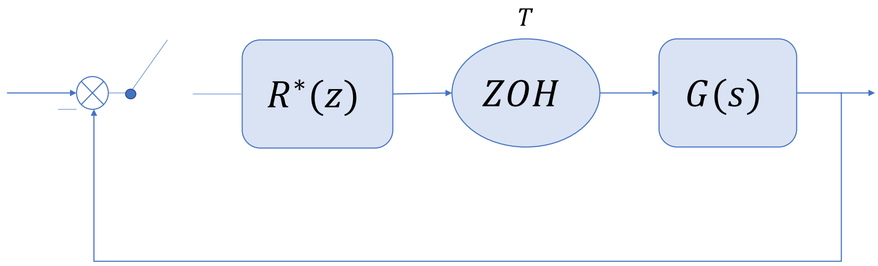

Figura 7. Figura dell'esercizio 5

Si consideri il sistema in figura, dove i convertitori sono in fase e sincroni (periodo T) e inoltre

$$G(s) = \frac{1}{s}, \quad R(z) = \frac{\alpha}{z^2}\ .$$

- Si studi la stabilità del sistema dal punto di vista digitale in funzione di $\alpha > 0$, $T > 0$.
- Si discuta la soluzione ottenuta attraverso l'equivalente analogico del sistema.

SOLUZIONE:

- Il sistema equivalente a tempo discreto è
$$G^*(z) = \frac{T}{z-1}, \quad R^*(z) = \frac{\alpha}{z^2}$$
Il sistema in anello chiuso a tempo discreto ha polinomio caratteristico $z^3 - z^2 + \alpha T$. Quindi, applicando la trasformazione bilineare, si ha stabilità asintotica per $\alpha T < 0.618$.
- Dal punto di vista analogico, noto il ritardo introdotto dal mantenitore ($e^{-s\frac{T}{2}}$), la funzione d'anello è
$$L(s) = \frac{\alpha}{s} e^{-s\frac{5}{2}T}$$
dove la frequenza di taglio $\omega_c = \alpha$, mentre il margine di fase è $\phi_m = \pi - \pi/2 - 5/2\alpha T$, da cui si ricava che
$$\alpha T < \frac{\pi}{5} = 0.628$$