Fondamenti di Automatica per Ing. Elettrica

Prof. Patrizio Colaneri[2]

Prima prova in itinere del 14 Novembre 2017

Cognome ____

Nome ____

Matricola ____

Firma ____

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni. Questo fascicolo contiene 5 esercizi. Si prega di non allegare alcun foglio.

[2] Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingeneria, Politecnico di Milano, 20133 Milano, Italy, `email: colaneri@elet.polimi.it`

I. Esercizio 1

Si consideri il sistema elettrico in figura.

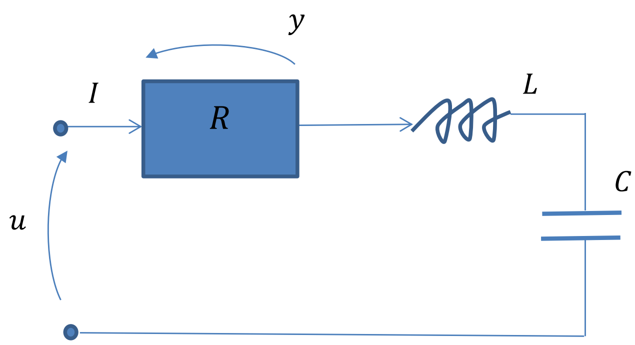

Figura 1. Figura dell'esercizio 1

dove $L > 0$, $C > 0$ sono i valori di induttanza e capacità dell'induttore e capacitore, rispettivamente, mentre R è una resistenza non lineare caratterizzata dall'equazione corrente-tensione $y = I^2 + \alpha I$.

- Si ricavino le equazioni del sistema in forma normale, ingresso u e uscita y.
- Si ricavi lo stato di equilibrio $\bar{x}$ in corrispondenza dell'ingresso costante $\bar{u} = 1$.
- Si studi la stabilità asintotica di $\bar{x}$ in funzione del parametro reale α.

SOLUZIONE:

- Ponendo $x_1 = I$ e x_2 uguale alla tensione sul condensatore, le equazioni del sistema in forma normale sono:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{L}\left(-x_1^2 - \alpha x_1 - x_2 + u\right) \\ \dot{x}_2 = \frac{x_1}{C} \\ y = x_1^2 + \alpha x_1 \end{cases}$$

- Lo stato di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso costante $\bar{u} = 1$ è $\bar{x} = [0,\ 1]^\top$.
- Per discutere la stabilità asintotica linearizziamo il sistema nell'intorno di $[0,\ 1]^\top$. Il polinomio caratteristico risulta $\lambda^2 + \frac{\alpha}{L}\lambda + \frac{1}{LC}$. Ne risulta che $[0,\ 1]^\top$ è asintoticamente stabile per $\alpha > 0$.

II. Esercizio 2

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [2,\, \alpha]$$

- Si studi la raggiungibilità del sistema in funzione di $(\alpha,\, \beta)$.
- Si studi l'osservabilità del sistema in funzione di $(\alpha,\, \beta)$.
- Si studi la BIBO stabilità del sistema in funzione di $(\alpha,\, \beta)$.

SOLUZIONE:

- il sistema è completamente raggiungibile per ogni α e $\beta \neq 1$.
- il sistema è completamente osservabile per ogni β e $\alpha \neq -2$.
- il sistema è BIBO stabile per $\alpha = -2$.

III. Esercizio 3

Si consideri la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+10}{s(s-1)}$$

- Si tracci il diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza associata a $G(s)$.
- Si tracci il diagramma di Bode della fase della risposta in frequenza associata a $G(s)$.
- Si tracci il diagramma polare della risposta in frequenza associata a $G(s)$.

SOLUZIONE:

- I diagrammi di Bode di modulo e fase della risposta in frequenza associata a $G(s)$ sono:

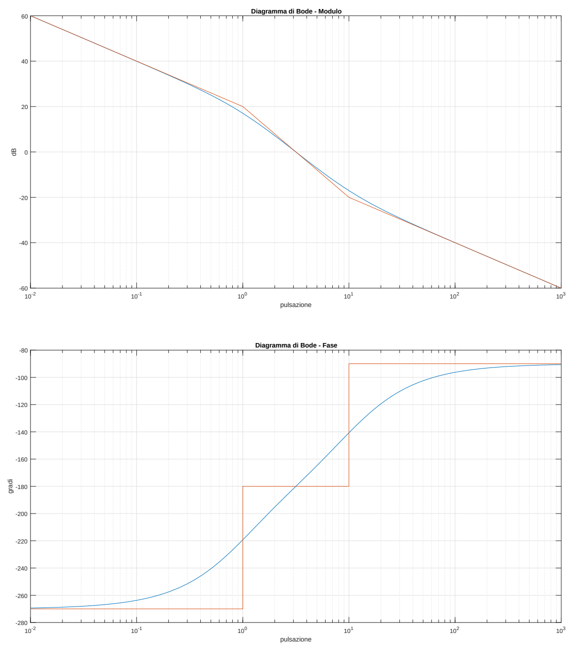

Figura 2. Diagramma di Bode

- Il diagramma polare della risposta in frequenza associata a $G(s)$ è:

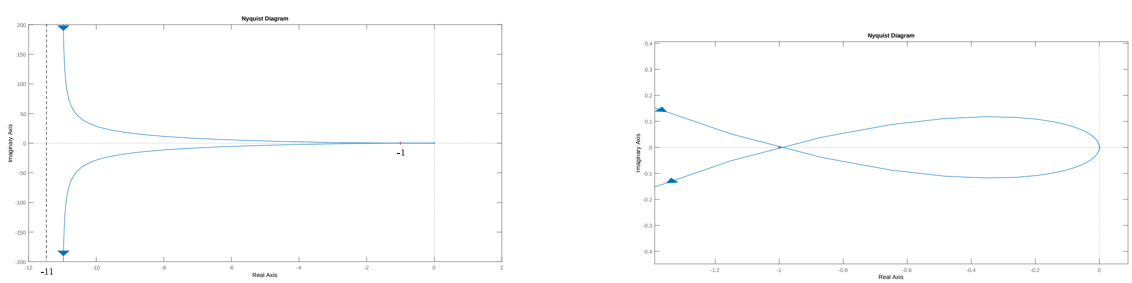

Figura 3. Diagramma polare e zoom nell'intorno del punto -1

IV. Esercizio 4

Con riferimento alla $G(s)$ dell'esercizio precedente, si consideri lo schema del sistema retroazionato.

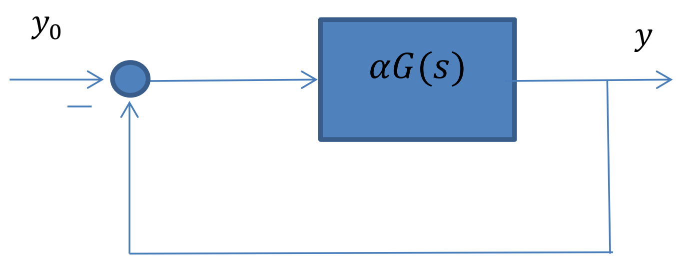

Figura 4. Figura dell'esercizio 4

- Si studi la stabilità del sistema in funzione di α applicando il criterio di Nyquist.
- Sia $\mathcal{A}$ l'insieme dei valori di α per cui il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Si studino le caratteristiche qualitative (regime, oscillazioni, tempo di assestamento, derivata nell'origine, etc.) della risposta $y(t)$ quando $y_0(t)$ è uno scalino unitario, in funzione di $\alpha \in \mathcal{A}$. A tale scopo si disegnino dei diagrammi qualitativi di $y(t)$ in funzione di α.

SOLUZIONE:

- Il sistema è asintoticamente stabile per $\alpha > 1$.
- Le caratteristiche qualitative della risposta $y(t)$ quando $y_0(t)$ è uno scalino unitario sono le seguenti per $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$.

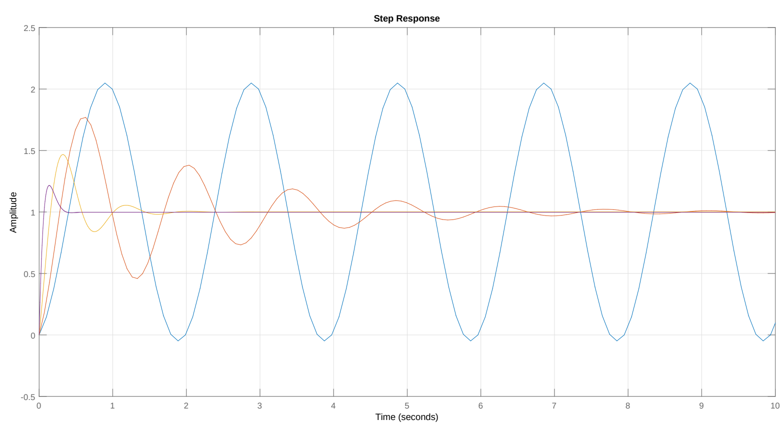

Figura 5. Risposte allo scalino unitario per $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$

V. Esercizio 5

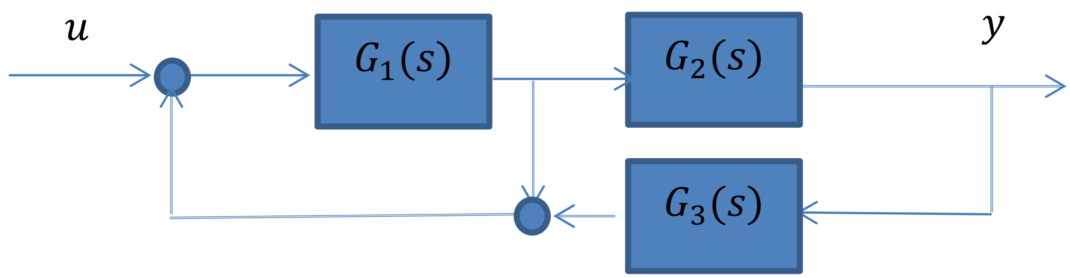

Figura 6. Figura dell'esercizio 4

- Si ricavi la funzione di trasferimento da u a y.
- Sia poi $G_1(s) = G_2(s) = \frac{1}{s}$, $G_3 = \frac{\alpha s+\beta}{s+2}$. Si studi la stabilità asintotica del sistema retroazionato e la stabilità BIBO da u a y in funzione di (α, β).
- Per i valori $\beta = -1$ e $\alpha = -3$, si ricavi l'espressione analitica della risposta y quando $u(t) = imp(t)$.

SOLUZIONE:

- La funzione di trasferimento da u a y è

$$G(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 - G_1(s) - G_1(s)G_2(s)G_3(s)} = \frac{(s+2)}{s^3 + s^2 - (\alpha+2)s - \beta}$$

- Si ha stabilità asintotica e BIBO stabilità per $\alpha < -2 + \beta$ e $\beta < 0$.
- Per i valori $\beta = -1$ e $\alpha = -3$, quando $u(t) = imp(t)$ si ha

$$G(s) = \frac{(s+2)}{(s^2+1)(s+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{(s+1)} + \frac{-\frac{1}{2}s + \frac{3}{2}}{(s^2+1)}$$

L'espressione analitica è pertanto

$$y(t) = \left[\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{3}{2}\sin(t)\right] sca(t)$$