Fondamenti di Automatica per Ing. Elettrica

Prof. Patrizio Colaneri, Prof. Gian Paolo Incremona[2]

Esame del 20 Luglio 2018

Cognome ____

Nome ____

Matricola ____

Firma ____

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni. Questo fascicolo contiene 5 esercizi. Si prega di non allegare alcun foglio.

[2] Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingeneria, Politecnico di Milano, 20133 Milano, Italy, `email: patrizio.colaneri@polimi.it, gianpaolo.incremona@polimi.it`

I. Esercizio 1

Si consideri il sistema in figura, dove

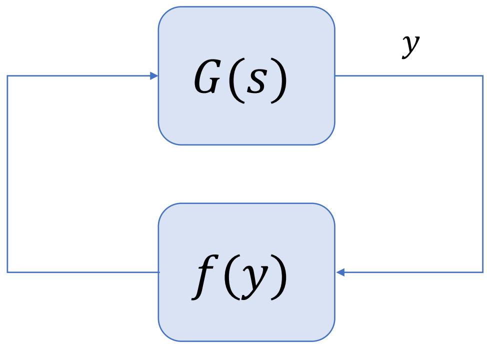

Figura 1. Figura dell'esercizio 1

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{s+1}{s^3+4s^2+6s+4} \\
f(y) &= y^2 - y
\end{aligned}
$$

- Si scrivano le equazioni del sistema in variabili di stato.
- Si ricavino gli equilibri e si studi la loro stabilità.

SOLUZIONE:

- Ponendo $u = y^2 - y$, le equazioni del sistema in spazio di stato sono:

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 \\
\dot{x}_2 = x_3 \\
\dot{x}_3 = -5x_1 - 7x_2 - 4x_3 + 2x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2 \\
y = x_1 + x_2
\end{cases}
$$

- Ponendo le derivate degli stati a zero si ottiene che gli stati equilibrio sono $[0\ 0\ 0]^\top$ e $[5\ 0\ 0]^\top$. Per discutere la stabilità degli stati di equilibrio, linearizziamo il sistema nell'intorno di $[0\ 0\ 0]^\top$ e $[5\ 0\ 0]^\top$. Risulta

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5+2\bar{x}_1+2\bar{x}_2 & -7+2\bar{x}_1+2\bar{x}_2 & -4 \end{bmatrix}_{(\bar{x})}
$$

il cui polinomio caratteristico è $s^3+4s^2+(7-2\bar{x}_1-2\bar{x}_2)s+5-2\bar{x}_1-2\bar{x}_2$. Ne risulta che $[0\ 0\ 0]^\top$ è asintoticamentre stabile, mentre $[5\ 0\ 0]^\top$ è instabile.

II. Esercizio 2

Si consideri il sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [0\ 1]x$$

dove $u(t) = \sin(t) + \sin(2t) + 1$.

- Ricavare la risposta asintotica di $y(t)$.
- Dire (giustificando la risposta) se cambia la risposta asintotica di cui sopra in funzione dello stato iniziale $x(0)$.

SOLUZIONE:

- La funzione di trasferimento del sistema è
$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 3}$$
Il sistema è asintoticamente stabile e applicando il principio di sovrapposizione degli effetti e il teorema fondamentale della risposta in frequenza si ha che la risposta asintotica $y_{as}(t)$ di $y(t)$ è:
$$y_{as}(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin(t + 0.7854) + \frac{2}{\sqrt{17}} \sin(2t - 0.245)$$
- La risposta asintotica non cambia in funzione dello stato iniziale $x(0)$. Infatti, per via dell'asintotica stabilità, l'effetto sull'uscita di qualsiasi condizione iniziale $x(0)$ tende ad annularsi.

III. Esercizio 3

Si consideri il sistema retroazionato in figura dove

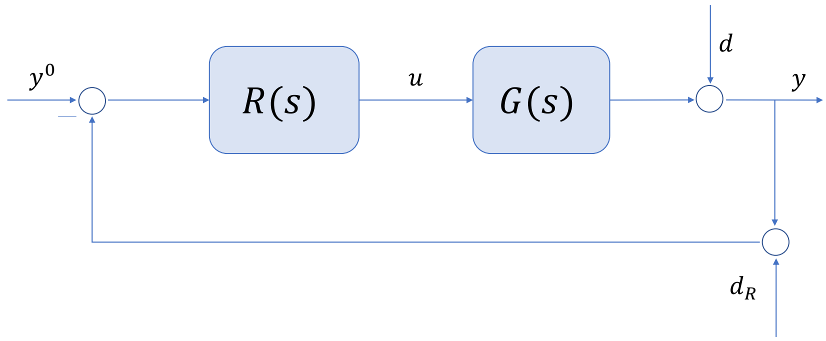

Figura 2. Figura dell'esercizio 3

$$G(s) = \frac{10e^{-0.1s}}{(s+1)(0.1s+1)}$$

- Con $y^0 = sca(t)$ e $d = 0$ e $d_R = 0$, determinare $R(s)$ di tipo PI in modo tale che il margine di fase sia almeno 60 gradi e la pulsazione critica non inferiore a 1 rad/s.
- Valutare l'errore a transitorio esaurito quando $d = \sin(0.05t)$ e $d_R = \sin(50t)$.

SOLUZIONE:

- Noto che il ritardo causa una riduzione del margine di fase di $0.1\omega_c \frac{180}{\pi}$, per avere margine di fase di almeno 60 gradi e la pulsazione critica non inferiore a 1 rad/s, il controllore di tipo PI scelto è

$$R(s) = \frac{0.1(s+1)}{s}$$

con cui si ha

$$L(s) = \frac{e^{-0.1s}}{s(1+s0.1)}$$

margine di fase $\phi_m = 78.62$ gradi e pulsazione critica $\omega_c = 1$ rad/s.

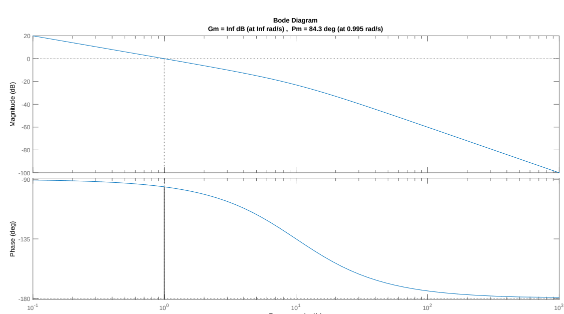

Figura 3. Diagramma di Bode di $L(s)$

- In presenza dei disturbi $d = \sin(0.5t)$ e $d_R = \sin(50t)$, l'errore a transitorio esaurito è

$$|e_\infty| \simeq \left|\frac{1}{L(j0.05)}\right| + |L(j50)| = 0.05 + 0.004 = 0.054$$

IV. Esercizio 4

Si consideri il sistema in figura

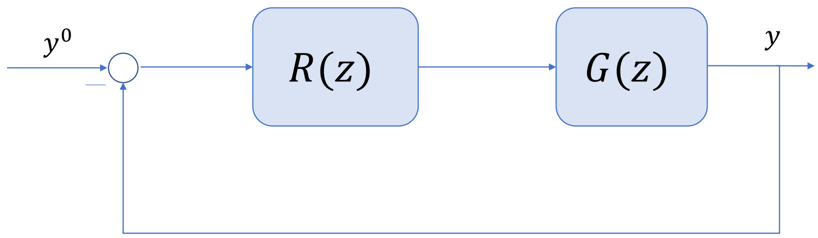

Figura 4. Figura dell'esercizio 4

dove

$$G(z) = \frac{z+\frac{1}{2}}{z(z+2)}$$

- Si ricavi $R(z)$ in modo tale che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile e che $y(k)$ sia nullo dopo un numero finito di passi quando $y^0(k)$ è uno scalino.

SOLUZIONE:

- Utilizzando il metodo di Ragazzini, per avere $y(k)$ nullo dopo un numero finito di passi quando $Y^0(z) = \frac{z}{z-1}$, scegliamo la funzione di sensitività complementare come

$$F^o(z) = \frac{R(z)G(z)}{1+R(z)G(z)} = \frac{(z-1)\alpha}{z^2}$$

da cui, imponendo la condizione sulla non cancellazione del polo in 2, si ha che $\alpha = -\frac{4}{3}$. Il regolatore si ricava dunque come

$$R(z) = \frac{F^o(z)}{(1-F^o(z))G(z)} = -\frac{4}{3}\frac{z(z-1)}{(z-\frac{2}{3})(z+\frac{1}{2})}$$

da cui a fronte di un ingresso $y^0(k)$ a scalino si ha

$$Y(z) = -\frac{4}{3}\frac{1}{z}$$

V. Esercizio 5

Un sistema a tempo discreto del terzo ordine è descritto dall'equazione ingresso-uscita:

$$y(k) = -y(k-1) + \alpha y(k-2) + \alpha y(k-3) + u(k) + \beta u(k-1)$$

- Ricavare la funzione di trasferimento $G(z)$ da u a y.
- Discutere la stabilità interna ed esterna in funzione dei parametri α e β.

SOLUZIONE:

- La funzione di trasferimento $G(z)$ da u a y è

$$G(z) = \frac{z^2(z+\beta)}{z^3 + z^2 - \alpha z - \alpha} = \frac{z^2(z+\beta)}{(z+1)(z^2-\alpha)}$$

- Il sistema non è mai asintoticamente stabile (presenza di $z = -1$), ed è BIBO stabile per $-1 < \alpha < 1$ e $\beta = 1$.