Fondamenti di Automatica per Ing. Elettrica

Prof. Patrizio Colaneri[2]

Esame del 22 Gennaio 2018

Cognome ________________________________

Nome ________________________________

Matricola ________________________________

Firma ________________________________

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni. Questo fascicolo contiene 5 esercizi. Si prega di non allegare alcun foglio.

[2] Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingeneria, Politecnico di Milano, 20133 Milano, Italy, `email: colaneri@elet.polimi.it`

I. Esercizio 1

Si consideri il sistema elettrico in figura.

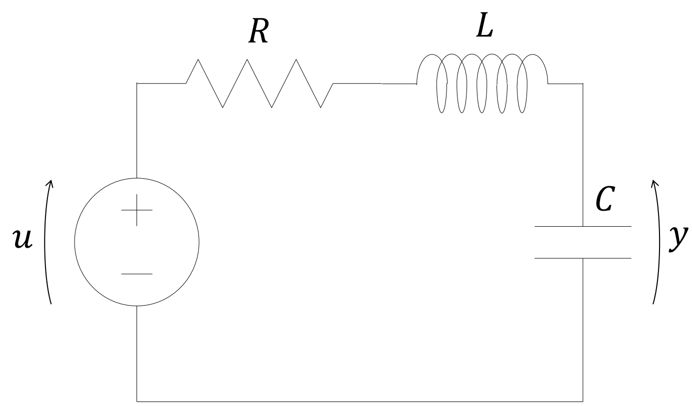

Figura 1. Figura dell'esercizio 1

dove $R > 0$, $L > 0$, $C > 0$ sono i valori di resistenza, induttanza e capacità del resistore, dell'induttore e capacitore, rispettivamente, mentre u è un generatore di tensione caratterizzato dall'equazione $u = y^2 - \alpha y$.

- Si ricavino le equazioni del sistema retroazionato.
- Si ricavino gli stati di equilibrio $\bar{x}$ in funzione del parametro reale α.
- Si studi la stabilità asintotica di $\bar{x}$ in funzione del parametro reale α.

SOLUZIONE:

- Ponendo la tensione sul capacitore uguale a x_1 e la corrente uguale a x_2, le equazioni del sistema retroazionato sono:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{C} x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{L}\left(x_1^2 - \alpha x_1 - x_1 - R x_2\right) \end{cases}$$
- Gli stati di equilibrio sono $[0\ 0]^\top$ e $[(1+\alpha)\ 0]^\top$.
- Per discutere la stabilità asintotica linearizziamo il sistema nell'intorno di $[0\ \ 0]^\top$ e $[(1+\alpha)\ \ 0]^\top$. Il polinomi caratteristici risultano $\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda \pm \frac{\alpha+1}{LC}$, rispettivamente. Ne risulta che $[0\ 0]^\top$ è asintoticamente stabile per $\alpha > -1$, mentre $[(1+\alpha)\ \ 0]^\top$ è asintoticamente stabile per $\alpha < -1$. Per $\alpha = -1$ non si può dire nulla sulla stabilità dell'equilibrio nullo.

II. Esercizio 2

- Dato un segnale $v(t)$, a spettro razionale, definito per $t \geq 0$, si denoti con $V(s)$ la sua trasformata monolatera di Laplace. Si enunci la condizione necessaria e sufficiente su $V(s)$ perchè $v(t)$ sia limitato per $t > 0$.

- Si enunci la definizione di BIBO stabilità del sistema

$$\Sigma\ :\ \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

- Si dimostri che Σ è BIBO stabile se e solo se la funzione di trasferimento $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale strettamente negativa.

SOLUZIONE:

- La condizione necessaria e sufficiente su $V(s)$ perchè $v(t)$ sia limitato per $t > 0$ è che $V(s)$ abbia poli con parte reale strattamente negativa o al più poli semplici sull'asse immaginario.

- Il sistema Σ si dice BIBO stabile se produce un movimento forzato dell'uscita limitato in corrispondenza di ogni ingresso limitato.

- Si consideri la trasformata di Laplace dell'uscita $Y(s) = G(s)U(s)$, dove $U(s)$ è la trasformata di Laplace dell'ingresso $u(t)$. Se il segnale $u(t)$ è limitato allora $U(s)$ ha poli con parte reale strettamente negativa o al più poli semplici sull'asse immaginario. Allora, affinché $Y(s)$ abbia poli con parte reale strettamente negativa o al più poli semplici sull'asse immaginario, cioè $y(t)$ sia limitato, condizione necessaria e sufficiente è che $G(s)$ abbia tutti poli a parte reale strettamente negativa.

III. Esercizio 3

Si consideri il sistema in figura,

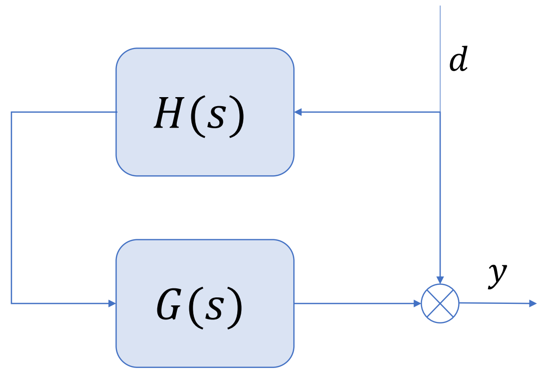

Figura 2. Figura dell'esercizio 3

dove $d(t) = \alpha \sin(t)$ e

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \ .$$

.

- Si ricavi $H(s)$ tale che $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

SOLUZIONE:

- La funzione di trasferimento da d a y è $1 + G(s)H(s)$. Allora $|1 + G(j\omega)H(j\omega)|_{\omega=1} = 0$ affinché $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$. Questo implica

  $$H(j) = -\frac{1}{G(j)} = -(j+1) \ .$$

  Per interpolazione, si consideri $H(s) = \frac{-\alpha s}{1+sT}$, da cui

  $$\frac{\alpha j}{1+jT} = j+1$$
  $$j + 1 + T(j-a) = \alpha j \ .$$

  Si ricava $\alpha = 2$ e $T = 1$, per cui risulta

  $$H(s) = \frac{-2s}{1+s}$$

IV. Esercizio 4

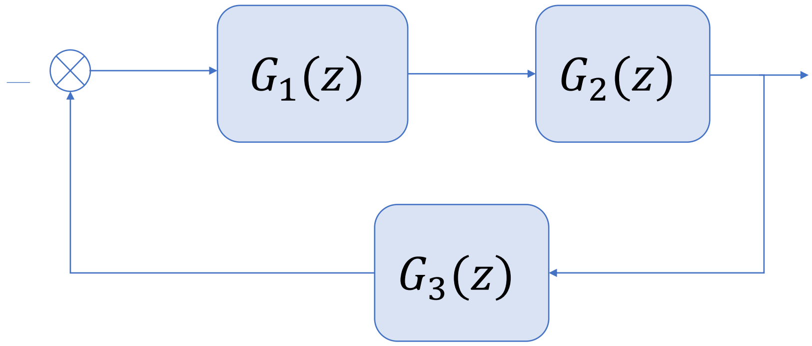

Figura 3. Figura dell'esercizio 4

Si consideri il sistema in figura, dove

$$G_1(z) = \frac{1}{z}, \quad G_2(z) = \frac{1}{(z-1)z}, \quad G_3(z) = \alpha \ .$$

- Si studi la stabilità del sistema al variare del parametro reale α.

SOLUZIONE:

- Si consideri il polinomio caratteristico del sistema, $\chi(z) = z^3 - z^2 + \alpha$. Si consideri ora la trasformazione bilineare $z = \frac{s+1}{1-s}$, da cui si ricava $\chi(s) = (2-\alpha)s^3 + (4+3\alpha)s^2 + (2-3\alpha)s + \alpha$. Applicando il criterio di Routh-Hurvitz, il sistema è asintoticamente stabile per $0 < \alpha < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

V. Esercizio 5

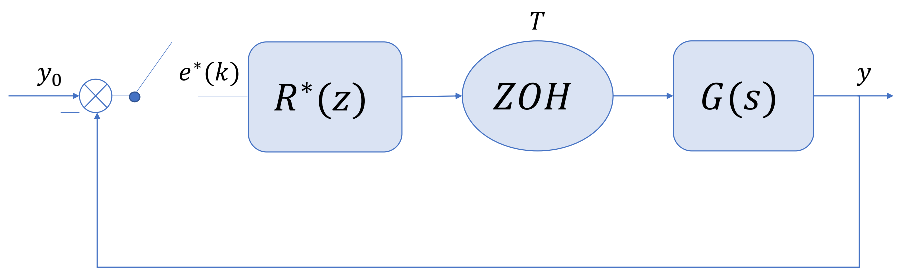

Figura 4. Figura dell'esercizio 5

Si consideri il sistema in figura, dove i convertitori sono in fase e sincroni (periodo T) e inoltre

$$G(s) = \frac{1}{(s+10)(s+2)},$$

e $y_0 = \text{sca}(t)$.

- Trovare T e $R^*(z)$ tale che $e(t)$ tende a zero a regime con un tempo di assestamento di 1 secondo, e si abbia margine di fase maggiore o uguale a 45^o, seguendo il punto di vista analogico e adottando la transformazione di Tustin.

SOLUZIONE:

- Il sistema ad anello chiuso ha un modo dominante che è circa uguale alla pulsazione critica ω_c e il tempo di assestamento è $t_a = \frac{2\pi}{\omega_c}$. Per $t_a = 1$ s, scegliamo $\omega_c \simeq 6$ rad/s. Imponiamo la pulsazione di campionamento $\Omega_c = 10\omega_c = 60$ rad/s. Il tempo di campionamento risulta $T \simeq 0.1$ s. La presenza del mantenitore genera un deterioramento del margine di fase di $\phi_{ZOH} = \omega_c \frac{T}{2} = 0.3$ rad $\simeq 17^o$. Scegliamo il regolatore come

  $$R(s) = \frac{6(s+2)}{s}$$

  da cui ho

  $$L(s) = \frac{6}{s(s+10)} ,$$

  e margine di fase $\phi_m = 180^o - |\phi_c| - \phi_{ZOH} = 180^o - 116.6^o - 17^o = 46.4^o$. Applicando la trasformazione di Tustin $s = \frac{2}{T}\frac{(z-1)}{(z+1)}$, il regolatore digitale è

  $$R^*(z) = \frac{66z - 54}{10(z-1)} .$$