Fondamenti di Automatica per Ing. Elettrica

Prof. Patrizio Colaneri, Prof. Gian Paolo Incremona[2]

Esame del 27 Giugno 2018

Cognome ______________________________

Nome ______________________________

Matricola ______________________________

Firma ______________________________

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni. Questo fascicolo contiene 5 esercizi. Si prega di non allegare alcun foglio.

[2] Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingeneria, Politecnico di Milano, 20133 Milano, Italy, `email: patrizio.colaneri@polimi.it, gianpaolo.incremona@polimi.it`

I. Esercizio 1

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = e^{x_1}x_2 - x_1e^{x_2} + u \\ \dot{x}_2 = -e^{x_1}x_1 - x_2e^{-x_2} + u \\ y = e^{x_1} + e^{x_2} \end{cases}$$

- Si trovi l'equilibrio $\bar{x}$ corrispondente a $u = 0$ e si ricavi l'uscita di equilibrio $\bar{y}$.
- Si studi la stabilità di $\bar{x}$.
- Si scriva la funzione di trasferimento del sistema linearizzato rispetto a $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y})$.

SOLUZIONE:

- Ponendo le derivate degli stati a zero si ottiene che il punto di equilibrio è

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{u} = 0, \quad \bar{y} = 2\ .$$

- Per discutere la stabilità asintotica linearizziamo il sistema nell'intorno di $(\bar{x}, \bar{u})$. Le matrici del sistema linearizzato sono

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1\ 1], \quad D = 0\ .$$

  Il polinomio caratteristico è $s^2 + 2s + 2$, quindi $\bar{x}$ è un punto di equilibrio asintonticamente stabile.
- La funzione di trasferimento del sistema linearizzato rispetto a $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y})$ è

$$G(s) = \frac{2(s+1)}{s^2 + 2s + 2}\ .$$

II. Esercizio 2

Si consideri il sistema in figura dove

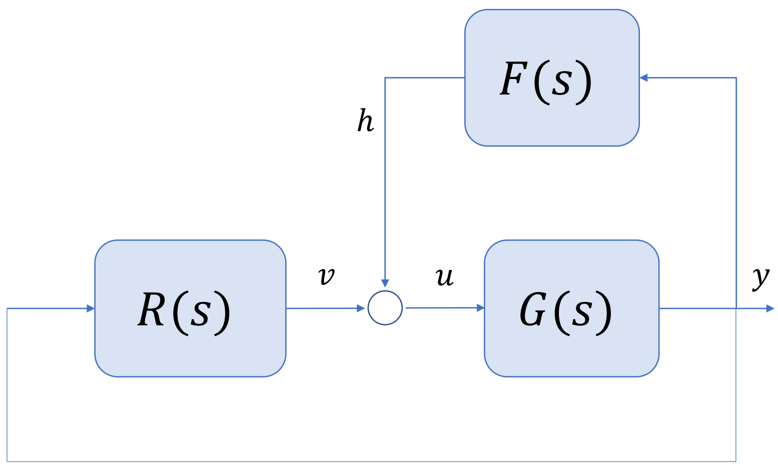

Figura 1. Figura dell'esercizio 2

$$G(s) = \frac{1}{s+1}, \quad F(s) = \frac{-s}{s+\alpha}, \quad R(s) = \frac{\beta}{s}, \quad \beta \neq 0 \,.$$

- Si scriva il sistema in spazio di stato
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \,. \end{cases}$$

- Si studi la stabilità interna in funzione di (α, β).

- Si studi l'osservabilità del sistema in funzione di (α, β).

SOLUZIONE:

- Si denotino con x_1, x_2, x_3 le variabili di stato di G, F, R, rispettivamente. Notando che
$$F(s) = -1 + \frac{\alpha}{s+\alpha}, \quad u = v + h \,.$$
si ha che
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ y = x_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = -\alpha x_2 + \alpha y \\ h = x_2 - y \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}_3 = \beta y \\ v = x_3 \,. \end{cases}$$
Il sistema si può quindi scrivere come
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ \alpha & -\alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$
$$y = [1\,0\,0]x \,.$$

- Il polinomio caratteristico è $s^3 + (2+\alpha)s^2 + (\alpha - \beta)s - \beta\alpha$, da cui, per il criterio di Routh, si ricava che si ha asintotica stabilità per $-2 < \alpha < 0$, $\beta > 0$.

- Il sistema è osservabile per $\alpha \neq 0$.

III. Esercizio 3

Si consideri il sistema retroazionato in figura dove

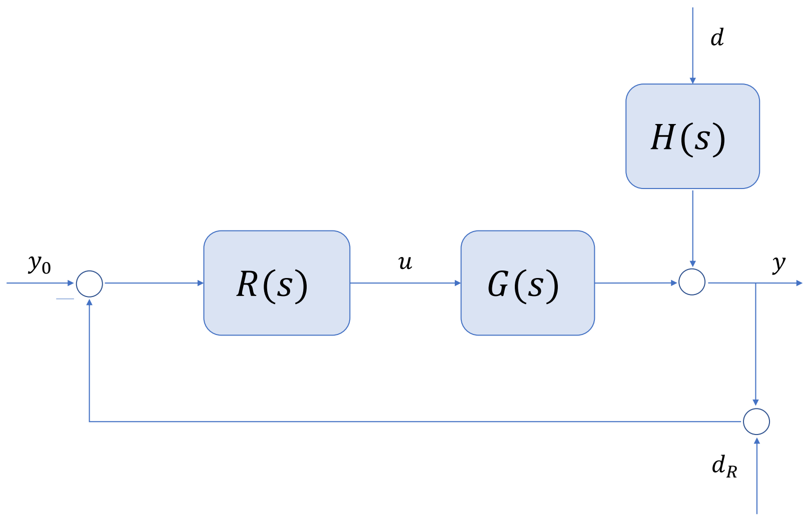

Figura 2. Figura dell'esercizio 3

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+10)}, \quad H(s) = \frac{1}{s}, \quad d(t) = sca(t), \quad y^0(t) = sca(t), \quad d_R(t) = \sin(100t) \; .$$

- Si ricavi $R(s)$ in modo tale che l'errore a transitorio esaurito sia minore in valore assoluto di 0.1, che il margine di fase sia almeno 60 gradi e la pulsazione critica sia non inferiore a 1 rad/s.

SOLUZIONE:

- Si noti che per avere l'errore a transitorio esaurito minore in valore assoluto di 0.1 a fronte dello scalino della rampa e della sinusoide è necessario introdurre un integratore e il guadagno d'anello deve essere

$$\frac{1}{0.1\mu_R} + |L(j100)| < 0.1 \; .$$

Imponendo che $|L(j\omega)| < 0.01$ in $\omega = 100$, si ha $\mu_R > 111.11$. Per soddisfare le specifiche scelgo

$$R(s) = \frac{200(s+1)(1+s10)}{s(1+s100)} \; ,$$

con cui ho

$$L(s) = \frac{20(1+s10)}{s(1+s100)(1+s0.1)}$$

margine di fase $\phi_m = 76.3$ gradi e pulsazione critica $\omega_c = 1.96$ rad/s.

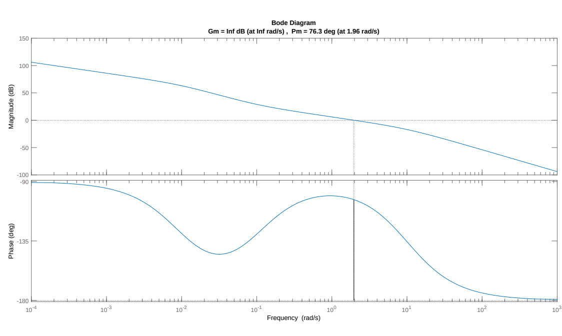

Figura 3. Diagramma di Bode di L(s)

IV. Esercizio 4

Si consideri il sistema in figura

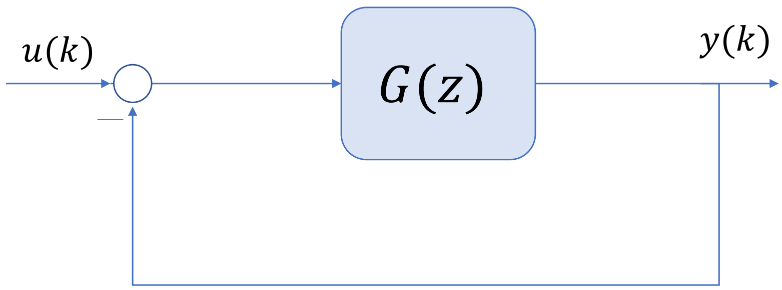

Figura 4. Figura dell'esercizio 4

dove $u(k) = sca^*(k)$ e $y(0) = 0$, $y(1) = 2$, $y(2) = -3$, $y(k) = 1$, $k \geq 3$.

- Si ricavi $G(z)$.

SOLUZIONE:

- Si noti che

$$\begin{aligned} Y(z) =& \frac{2}{z} - \frac{3}{z^2} + \sum_{k=3}^{\infty} z^{-k} \\ =& \frac{2}{z} - \frac{3}{z^2} + \frac{z}{z-1} - 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} \\ =& \frac{2z^2 - 5z + 4}{z^2(z-1)} \,. \end{aligned}$$

Dal momento che $G(z) = \frac{F(z)}{1-F(z)}$ e

$$F(z) = Y(z)\frac{(z-1)}{z} = \frac{2z^2 - 5z + 4}{z^3}$$

allora si ha

$$G(z) = \frac{2z^2 - 5z + 4}{(z-1)(z^2 - z + 4)} \,.$$

V. Esercizio 5

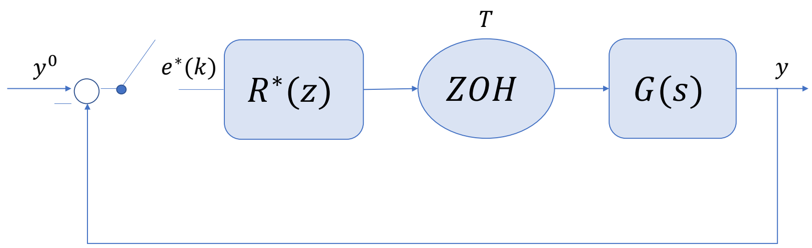

Figura 5. Figura dell'esercizio 5

Si consideri il sistema in figura, dove i convertitori sono in fase e sincroni (periodo T) e inoltre

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \; .$$

- Si ricavi il tempo di campionamento T e il regolatore digitale $R^*(z)$ in modo tale che l'equivalente del sistema di controllo dal punto di vista analogico abbia margine di fase $\phi_m \geq 30$ gradi e pulsazione critica $\omega_c \geq 1$ rad/s.

SOLUZIONE:

- Se scelgo il regolatore analogico

$$R(s) = \frac{s+1}{1+0.1s} \; ,$$

il sistema equivalente dal punto di vista analogico avrà la funzione d'anello

$$L(s) = e^{-s\frac{T}{2}} \frac{s+1}{s^2(1+0.1s)} \; ,$$

e la pulsazione critica con $\omega_c \simeq 1$. Il margine di fase è

$$\phi_m \simeq \frac{\pi}{4} - \frac{T}{2} > \frac{\pi}{6}$$

da cui

$$T < \frac{\pi}{6} \simeq 0.5 \text{ s} \; .$$

Scelgo $T = 0.1$ s (che vuol dire 40 campioni nel tempo di assestamento di circa 4 s) e utilizzando il metodo di Tustin ($s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$) ottengo

$$R^*(z) = \frac{21z - 19}{3z - 1} \; .$$