Fondamenti di Automatica per Ing. Elettrica

Prof. Patrizio Colaneri[2]

Esame del 5 Luglio 2019

Cognome ____

Nome ____

Matricola ____

Firma ____

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni. Questo fascicolo contiene 5 esercizi.

Si prega di non allegare alcun foglio.

[2] Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingeneria, Politecnico di Milano, 20133 Milano, Italy, email: colaneri@elet.polimi.it

I. Esercizio 1

Si consideri il sistema nonlineare

$$\dot{x}_1(t) = \alpha \log \frac{1}{x_1(t)} - x_1(t)x_2(t) + u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \alpha \log \frac{1}{x_2(t)} - x_1(t)x_2(t) + u(t)$$

dove $\alpha > 0$.

- Si ricavino gli stati di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso costante $u = 1$ e si studi la stabilità di tali stati di equilibrio in funzione di $\alpha > 0$.

==========================SOLUZIONE==============================
Si noti che

$$\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t) = \alpha \log \frac{x_2(t)}{x_1(t)}$$

All'equilibrio, per $\alpha \neq 0$ si ha $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$. Quindi

$$\alpha \log \bar{x}_1 = 1 - \bar{x}_1^2$$

Quindi l'unico equlibrio per $\alpha > 0$ è

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Linearizzando:

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha - 1 & -1 \\ -1 & -\alpha - 1 \end{bmatrix}$$

Quindi $\bar{x}$ è asintoticamente stabile per $\alpha > 0$.

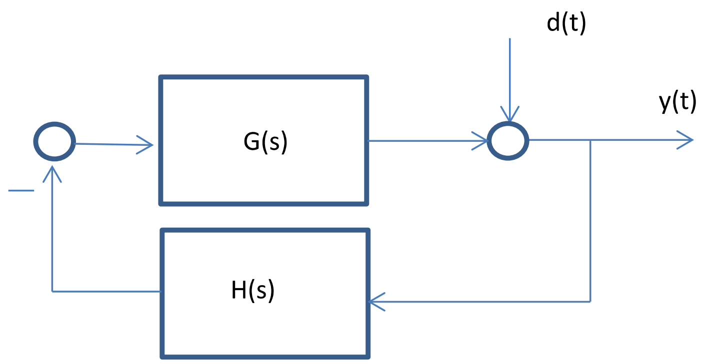


Figura 1. Figura dell'esercizio 2

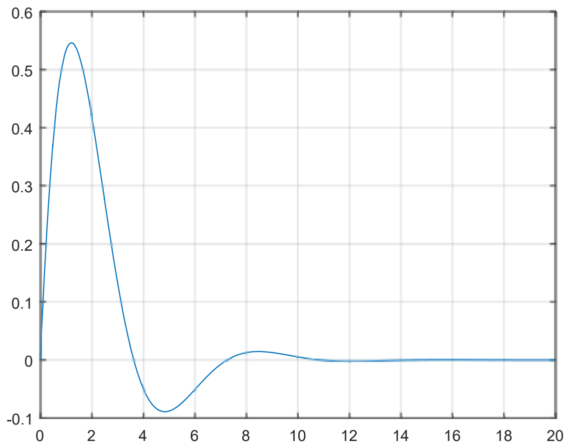


Figura 2. Figura dell'esercizio 2

II. Esercizio 2

Si consideri il sistema dove

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Inoltre si consideri la risposta $y(t)$ in figura, dovuta al segnale di ingresso

$$d(t) = ram(t)$$

- Si ricavi $H(s)$.

=========================SOLUZIONE=============================
La funzione di trasferimenti da $d(t)$ a $y(t)$ è:

$$\frac{1}{1+G(s)H(s)}$$

Tale funzione di trasferimento deve avere due zeri nell'origine (per annullare i due poli del segnale rampa), e due poli complessi coniugati. Considerando il tempo di assestamento (all'uno per cento) di circa 10 sec e un periodo dell'oscillazione smorzata di circa 7 secondi otteniamo

$$\frac{1}{1+G(s)H(s)} = \frac{s^2}{s^2+s+1}$$

Quindi

$$H(s) = \frac{s+1}{s}$$

III. Esercizio 3

Si consideri il sistema retroazionato in figura, dove

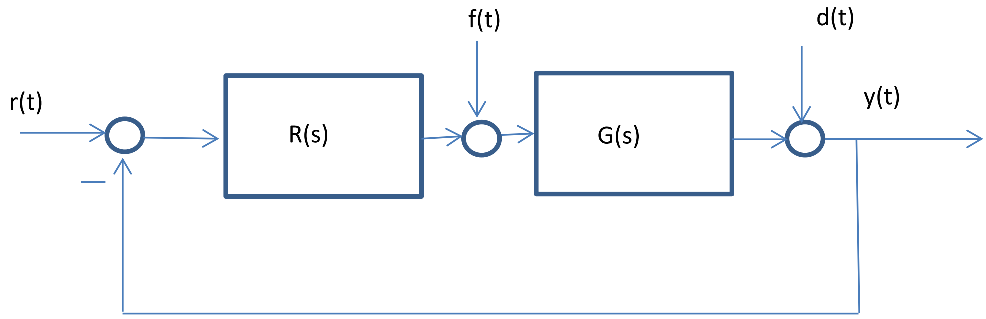


Figura 3. Figura dell'esercizio 3

$$G(s) = \frac{1-s}{s(s+1)}, \quad d(t) = sin(0.01t), \quad r(t) = ram(t), \quad f(t) = sca(t)$$

Si ricavi un regolatore tale che

- $\omega_c \geq 0.1rad/s$
- $\phi_m \geq 60^o$
- a regime $r(t) - y(t)$ abbia valor medio minore di 0.1 e ampiezza minore di 0.1

==========================SOLUZIONE===============================

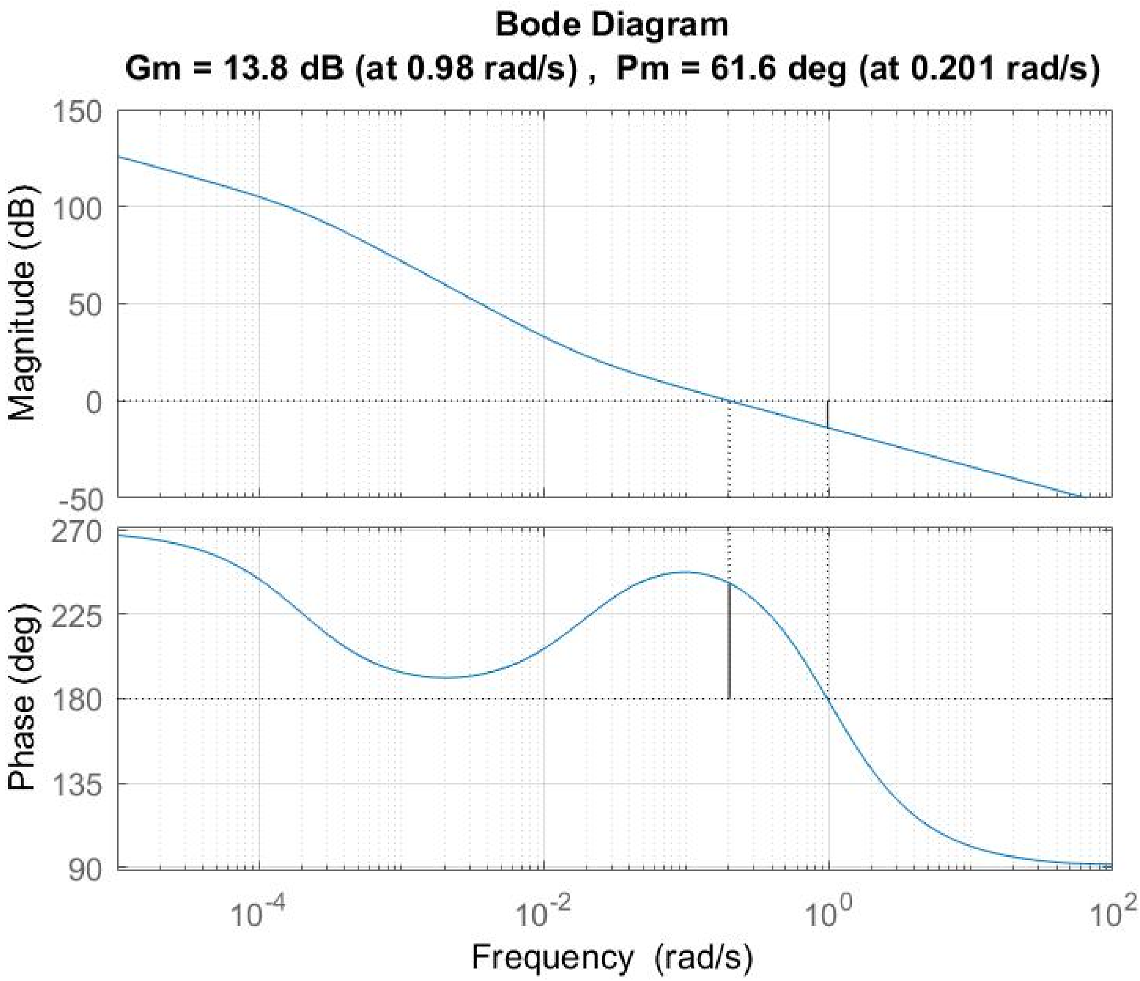
L'ingresso a rampa contribuisce sull'errore come $1/\mu$. L'ingresso a scalino come $-1/\mu$ (si noti che riportato a valle di $G(s)$ tale ingresso è di fatto una rampa). Quindi il guadagno di anello deve essere non minore di 20. Poniamo

$$R_1(s) = 20$$

Per avere ampiezza dell'errore (dovuto alla sinusoide) minore di 0.1 bisogna imporre $L(j0.01)| > 10$. Ad esempio la rete ritardatrice

$$R(s) = 20\frac{50s+1}{5000s+1}$$

garantisce tali requisiti, un margine di fase circa di 60 gradi e una pulsazione critica di cira $0.2 rad/sec$.



IV. Esercizio 4

Si consideri il sistema a tempo discreto

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\
y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)
\end{aligned}
$$

- Si studino le proprietà del sistema in funzione dei parametri $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$. Raggiungibilità, osservabilità, stabilità asintotica, stabilità BIBO, proprietà FIR.
- Si ponga $\alpha = -0.5$, $\beta = 1$ e si ricavi l'espressione analitica della risposta $y(k)$ del sistema all'ingresso $u(k) = sca(k)$.

=========================SOLUZIONE==============================
La funzione di trasferimento è:

$$G(z) = \frac{z\beta}{z^3 - \alpha\beta z} = \frac{\beta}{z^2 - \alpha\beta}$$

Il sistema è asintoticamente stabile per $|\alpha\beta| < 1$. Il sistema è BIBO stabile per $|\alpha\beta| < 1$. Il sistema non è FIR per alcun valore di $\alpha\beta \neq 0$. Il sistema non è raggiungibile (per ogni α, β). Il sistema non è osservabile (per ogni α, β).

Ponendo $\alpha = -0.5$, $\beta = 1$ si ha

$$G(z) = \frac{1}{z^2 + 0.5}$$

e

$$\begin{aligned} Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z^2+0.5)} &= \frac{2z}{3(z-1)} - \frac{2}{3}\left(\frac{z^2}{z^2+0.5} + \frac{z}{z^2+0.5}\right) \\ &= \frac{2z}{3(z-1)} - \frac{2}{3}\left(\frac{(z/\gamma)^2}{(z/\gamma)^2+1} + 2\gamma\frac{z/\gamma}{(z/\gamma)^2+1}\right) \end{aligned}$$

con $\gamma = \sqrt{2}$. Quindi

$$y(k) = \frac{2}{3} - \frac{2\gamma^k}{3}\left(cos(0.5\pi k) + 2\gamma sin(0.5\pi k)\right)$$

V. Esercizio 5

Si consideri il sistema retroazionato in figura, dove i convertitori A/D e D/A operano in fase e sincronia con intervallo temporale T e

$$G(s) = \frac{e^{-s/2}}{s}$$

Si ricavi $T > 0$ e $R^*(z)$ in modo tale che l'equivalente analogico del sistema di controllo abbia un margine di fase superiore a 60 gradi, un errore a regime minore di 0.1 a fronte di un riferimento a rampa e un tempo di assestamento all'uno per cento minore di 10 secondi.

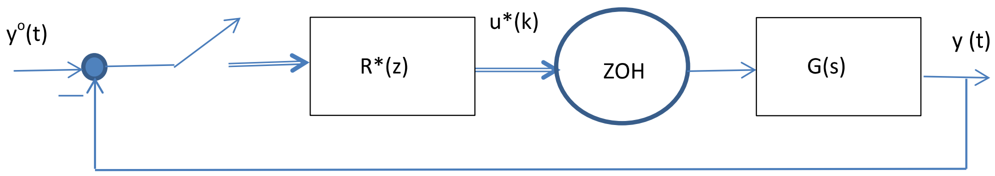


Figura 5. Figura dell'esercizio 5

========================== SOLUZIONE =====================

Per il tempo di assestamento poniamo $\omega_c = 1$. Scegliamo $T = 0.1$ (degrado di margine di fase pari a circa $0.05 rad = 2.8$ gradi. Il guadagno d'anello deve essere maggiore di 10. Prendiamo

$$R(s) = 10\frac{10s+1}{100s+1}$$

col che

$$L(s) = \frac{10e^{-s/2}(10s+1)}{s(100s+1)}$$

soddisfa le specifiche. Il regolatore digitale si trova applicando la trasformazione di Tustin:

$$R^\star(z) = 10\frac{201z-199}{2001z-1999}$$