Fondamenti di Automatica per Ing. Elettrica

Prof. Patrizio Colaneri[2]

Esame del 9 Settembre 2019

Cognome ____

Nome ____

Matricola ____

Firma ____

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni. Questo fascicolo contiene 5 esercizi.

Si prega di non allegare alcun foglio.

[2] Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingeneria, Politecnico di Milano, 20133 Milano, Italy, `email: colaneri@elet.polimi.it`

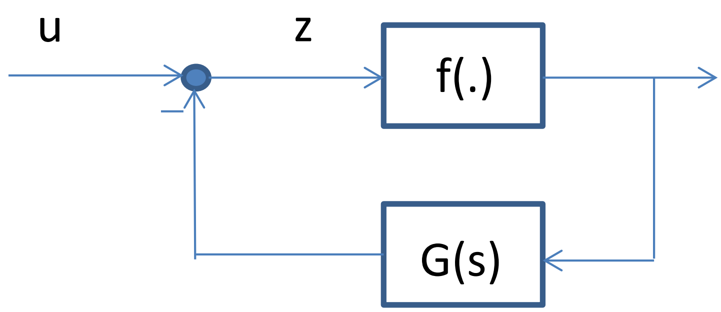


Figura 1. Figura dell'esercizio 1

I. Esercizio 1

Si consideri il sistema nonlineare in Figura dove

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

mentre $f(z) = z^2$.

- Si ricavino gli stati di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso costante $u = 2$ e si studi la stabilità di tali stati di equilibrio.

Soluzioni.

Una realizzazione in spazio di stato è:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y(t), \quad y(t) = (u(t) - x_1(t))^2$$

Quindi

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 2x_2(t) + (u(t) - x_1(t))^2$$

Ponendo $u = 2$ ci sono due stati di equilibrio:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il primo è asintoticamente stabile, il secondo instabile.

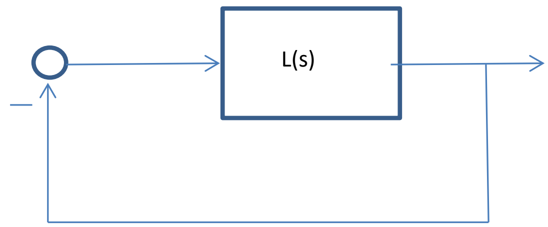


Figura 2. Figura dell'esercizio 2

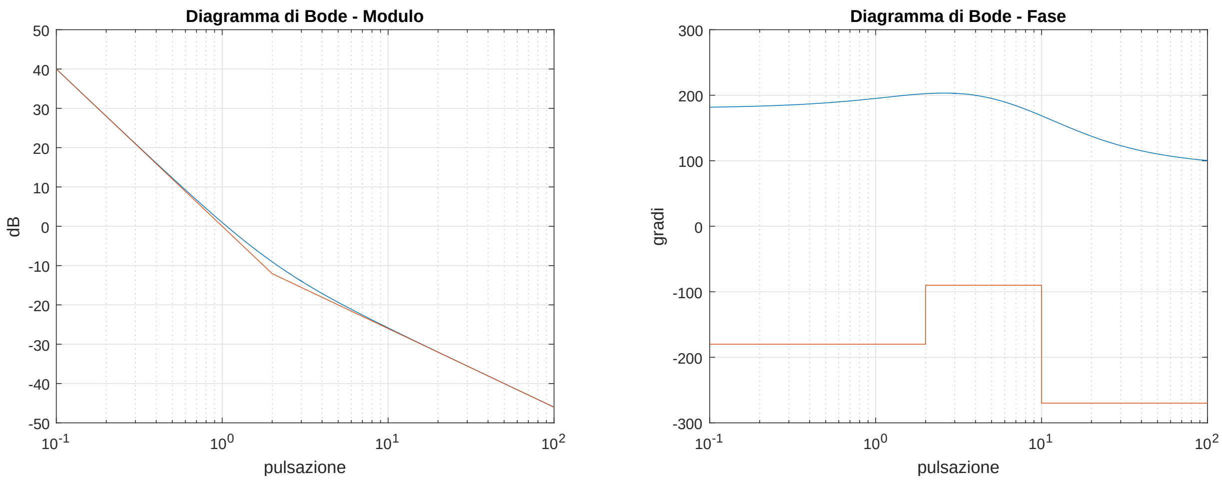


Figura 3. Figura dell'esercizio 2

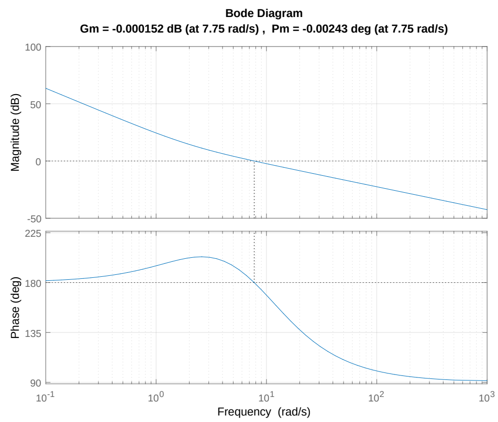
II. Esercizio 2

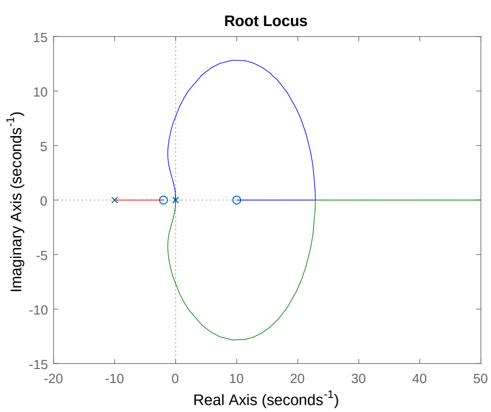
Si consideri lo schema a blocchi retroazionato nella prima figura, dove

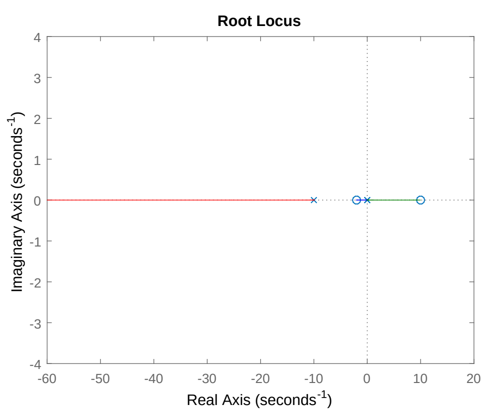
$$L(s) = \mu G(s)$$

e $G(s)$ ha gli andamenti del modulo e della fase (sia asintotici che precisi) nelle due figure sopra riportate.

- Si studi la stabilità del sistema retroazionato in funzione di μ utilizzando il luogo delle radici (con grafico del luogo), il criterio di Bode, e la tabella di Routh Hurwitz.







Soluzioni:

$$G(s) = \frac{(1-0.1s)(0.5s+1)}{s^2(0.1s+1)}$$

Il polinomio caratteristico del sistema retroazionato è:

$$s^3 + (10-\mu/2)s^2 + 4\mu s + 10\mu$$

e quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per

$$0 < \mu < 15$$

Per il criterio di Bode si veda il grafico del modulo e fase di $15G(j\omega)$. Per il luogo delle radici si vedano i luoghi per $\mu > 0$ e $\mu < 0$.

III. Esercizio 3

Si consideri il sistema retroazionato in figura, dove

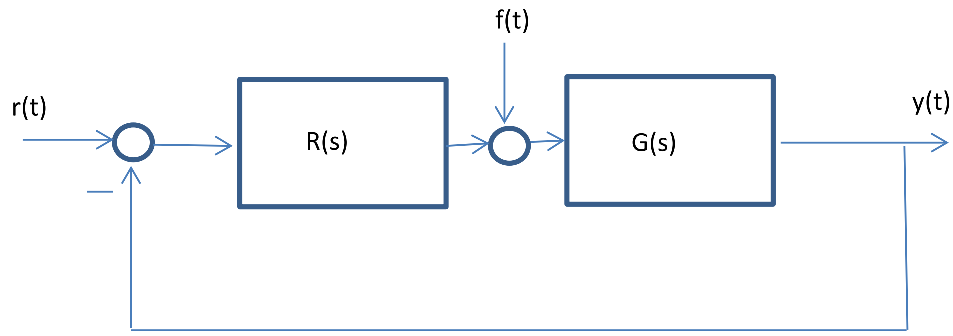


Figura 4. Figura dell'esercizio 3

$$G(s) = \frac{1 - 0.1s}{s(s+1)}, \quad r(t) = ram(t), \quad f(t) = \pm sca(t)$$

Si ricavi un regolatore tale che

- $\omega_c \geq 1 rad/s$
- $\phi_m \geq 30^o$
- a regime $|r(t) - y(t)|$ sia minore di 0.1.

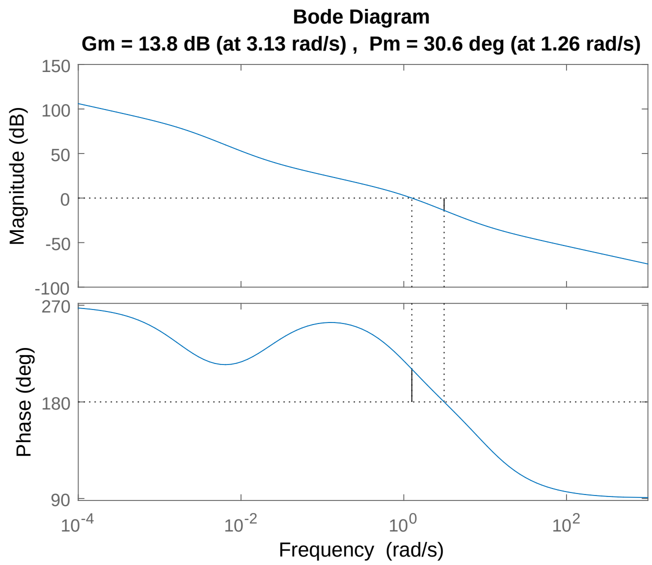
Soluzioni:

Il guadagno di anello deve essere ≥ 20. Basta una rete ritardatrice:

$$R(s) = 20\frac{1+50s}{1+500s}$$

In figura sono mostrati i diagrammi del modulo e fase di $L(j\omega)$, dove

$$L(s) = 20\frac{(1+50s)(1-0.1s)}{s(1+500s)(1+s)}$$



IV. Esercizio 4

Si consideri il sistema retroazionato a tempo discreto in figura, dove

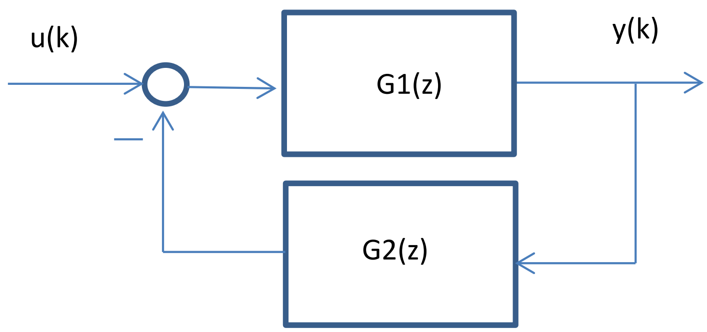


Figura 5. Figura dell'esercizio 4

$$G_1(z) = \frac{z-\alpha}{z+1}, \quad G_2(z) = \frac{1}{z}$$

sono le funzioni di trasferimento di due sistemi del primo ordine a tempo discreto.

- Si studino le proprietà del sistema in funzione del parametro α e cioè: raggiungibilità da u, osservabilità da y, stabilità asintotica, stabilità BIBO (da u a y), proprietà FIR.

Soluzioni:

La funzione di trasferimento da u a y è;

$$G(z) = \frac{z(z-\alpha)}{z^2+2z-\alpha}$$

Per la stabilità asintica (radici di $z^2+2z-\alpha$ all'interno del cerchio di raggio uno) si ha: $\alpha < -1$ e $\alpha > -1$. Il sistema non è asintoticamente stabile per nessun valore di α.

Per la stabilità BIBO da u a y consideriamo $\alpha = 0$ e $\alpha = -1$. nel primo caso abbiamo

$$G(z) = \frac{z}{z+2}$$

e nel secondo caso

$$G(z) = \frac{z}{z+1}$$

In conclusione il sistema non è BIBO stabiule per nessun valore di α.

Per la raggiungibilità da u consideriamo le cancellazioni tra zeri di $G_1(z)$ e poli di $G_2(z)$, che si hanno per $\alpha = 0$. Per tale valore di α il sistema non è raggiungibile da u.

Per l'osservabilità da y abbiamo lo stesso risultato.

V. Esercizio 5

Si consideri il sistema retroazionato in figura, dove i convertitori A/D e D/A operano in fase e sincronia con intervallo temporale $T > 0$. Si studi la stabilità del sistema retroazionato (in funzione di T) sia adottando il punto di vista analogico sia quello digitale.

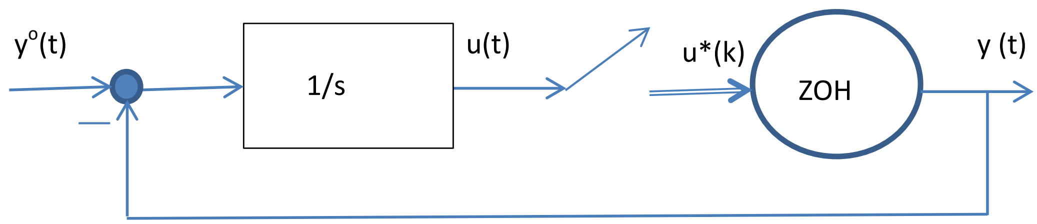


Figura 6. Figura dell'esercizio 5

Soluzioni:

Si noti che $\dot{u} = -y$ e che y è costante a tratti. Quindi l'equivalente a tempo discreto è dato dall'equazione:

$$u^\star(k+1) = (1-T)u^\star(k)$$

che è asintoticamente stabile per $0 < T < 2$.

Per l'equivalente analogico, la funzione di trasferimento d'anello è approssimata da

$$L(s) = \frac{e^{-sT/2}}{s}$$

Con tale funzione approssimante (essendo $\omega_c = 1$) la stabilità si ha per $0 < T < \pi$. Va da sè che il sistema ibrido in figura è stabile per $T < 2$.