Fondamenti di Automatica per Ing. Elettrica

Prof. Patrizio Colaneri[2]

Esame del 17 Aprile 2019

Cognome ____

Nome ____

Matricola ____

Firma ____

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni. Questo fascicolo contiene 5 esercizi.

Si prega di non allegare alcun foglio.

[2] Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingeneria, Politecnico di Milano, 20133 Milano, Italy, email: patrizio.colaneri@polimi.it

I. Esercizio 1

Si consideri un sistema nonlineare con ingresso u e uscita y, descritto dall'equazione differenziale ingresso-uscita:

$$\dddot{y}(t) + (\ddot{y}(t) + 1)^2 + (\dot{y}(t) + 1)^2 + (y(t) + 1)^2 = u(t)$$

- Si scrivano le equazioni del sistema in variabili di stato in forma normale
- Si ricavino i due stati di equilibrio $\bar{x}$ corrispondenti all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 3$.
- Si discuta la stabilità degli stati di equilibrio.

========================SOLUZIONE==============================

Si ponga:

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ x_3 &= \ddot{y} \end{aligned}$$

Risulta

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)$$

dove

$$f(x,u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -(x_1+1)^2 - (x_2+1)^2 - (x_3+1)^2 + u \end{bmatrix}$$

Ponendo $u = 3$ ed annullando le derivate, si ricavano i due stati di equilibrio:

$$x^{[1]} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x^{[2]} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ai quali corrispondono le matrici dinamiche dei sistemi linearizzati

$$A^{[1]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad A^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

L'equazione caratteristica di $A^{[1]}$ è:

$$s^3 + 2s^2 + 2s + 2 = 0$$

a cui corrisponde la tabella di Routh-Hurwitz:

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \\ 2 & \end{matrix}$$

e quindi $\bar{x}^{[1]}$ è asintotimente stabile. Viceversa, l'equazione caratteristica di $A^{[2]}$ è:

$$s^3 + 2s^2 + 2s - 2 = 0$$

Quindi $\bar{x}^{[2]}$ è instabile.

II. Esercizio 2

Si consideri la funione di trasferimento

$$G(s) = \frac{5(1-10s)}{(1+s)^2}$$

- Si tracci il diagramma asintotico del modulo
- Si tracci il diagramma asintotico della fase
- Si tracci il grafico qualitativo del diagramma polare

Si consideri poi il sistema retroazionato in figura.

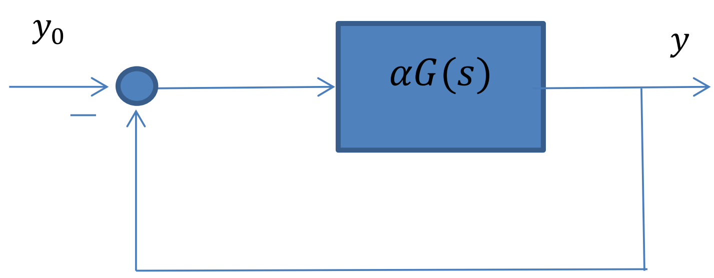

Figura 1. Figura dell'esercizio 2

- Si studi la stabilità del sistema retroazionato in funzione di α (dal polinomio caratteristico del sistema in anello chiuso)
- Si interpreti il risultato ottenuto precedentemente con il criterio di Nyquist.
- Si i interpreti il risultato ottenuto precedentemente con il luogo delle radici (a tale scopo si traccino i due luoghi - diretto e inverso - in due grafici distinti).

========================SOLUZIONE=============================

Dal polinomio caratteristico:

$$s^2 + (2+50\alpha)s + 1 + 5\alpha = 0$$

abbiamo

$$-1/5 < \alpha < 1/25$$

Il punto dove il diagramma di Nyquist di $G(s)$ attraversa l'asse reale con fase -180 gradi è dunque -25 mentre il punto dove il diagramma di Nyquist attraversa l'asse reale con fase 0 gradi è 5. Il luogo delle radici inverso attraversa l'asse immaginario (l'origine) per $\alpha = -1/5$ mentre il luogo diretto attraversa l'asse immaginario quando $\alpha = 1/25$. La parte immaginaria vale $1 + 5\alpha = 6/5$.

I. Esercizio 3

Si consideri il sistema descritto da:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t)$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Si scriva la funzione di trasferimento del sistema.
- Si dica per quale valore di $\alpha = \bar{\alpha}$ il sistema è non è contemporaneamente raggiungibile ed osservabile.
- Si dica quale proprietà viene persa per $\alpha = \bar{\alpha}$.
- Si ponga $\alpha = \bar{\alpha}$ e si ricavi l'espressione analitica della risposta $y(t)$ allo scalino unitario.

========================SOLUZIONE==============================

Risulta

$$G(s) = \frac{(\alpha + 2)s^2 + (5\alpha + 15)s + 6\alpha + 29}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Si ha una cancellazione di $(s+1)$ per $\alpha = -8$, che corrisponde alla perdita di osservabilità del sistema. Con tale valore risulta

$$G(s) = -6\frac{s + 19/6}{(s+2)(s+3)}$$

e la risposta allo scalino è:

$$y(t) = -19/6 + 7/2e^{-2t} - 1/3e^{-3t}$$

II. Esercizio 4

Si consideri la rete elettrica schematizzata il figura, dove la corrente impressa $u(t)$ è l'ingresso e la tensione ai capi della linea RL è l'uscita $y(t)$. Si ricavino (in maniera approssimativa) i valori dei parametri R1, R2, L, C dalla risposta $y(t)$, allo scalino unitario di corrente di ingresso, riportata in figura.

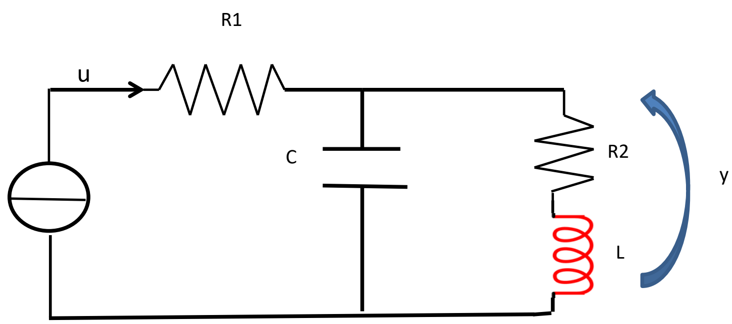

Figura 1. Rete

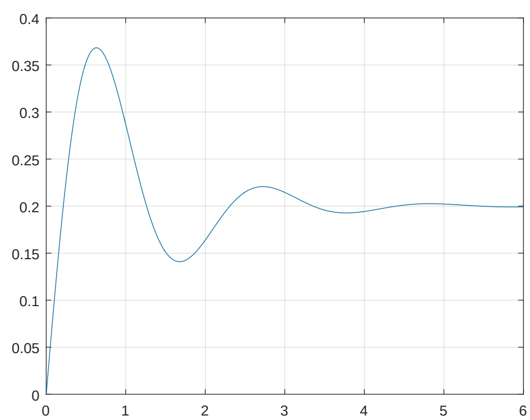

Figura 2. Risposta allo scalino

==========================SOLUZIONE==============================

Indicando con x_1 la tensione ai capi del condensatore e x_2 la corrente che passa nell'induttore si ha:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1/C \\ 1/L & -R_2/L \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1/C \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

La funzione di trasferimento è:

$$G(s) = \frac{(1/C)(s + R_2/L)}{s^2 + sR_2/L + 1/(LC)}$$

Dal valore di regime: guadagno $R_2 = 0.2$. Dal periodo $T \simeq 2$ si ha la pulsazione dell'oscillazione $\simeq = 3$. Dal tempo di assestamento $\simeq 4$ si ha $\xi\omega_n \simeq 1$. Quindi

$$G(s) = \frac{(s+2)}{s^2 + 2 + 10}$$

col che $C = 1$, $R_2 = 0.2$, $L = 0.1$. Ovviamente il valore di R_1 è indeterminato.

III. Esercizio 5

Si scriva la realizzazione minima in forma canonica di osservazione del sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{-3s^3 + 8s + 2s + 5}{s^3 - s^2 + s - 8}$$

========================SOLUZIONE===========================

Si scriva

$$G(s) = -3 + \frac{5s^2 + 5s - 19}{s^3 - s^2 + s - 8}$$

e quindi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -19 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = -3$$

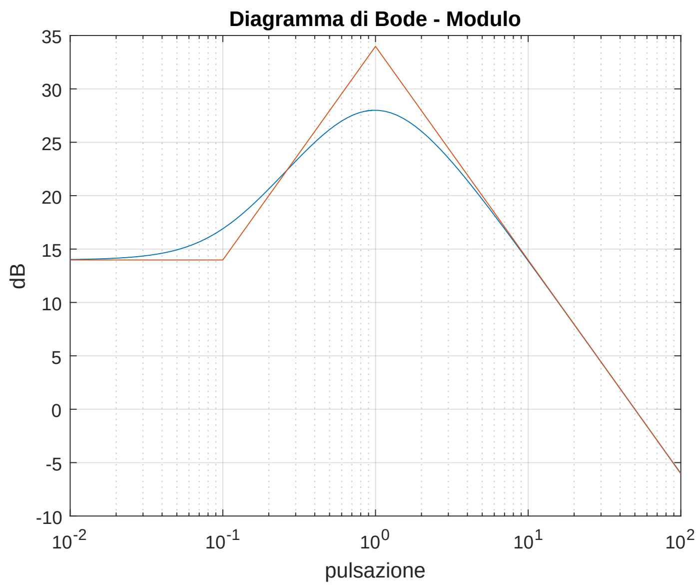

Figura 2. Modulo

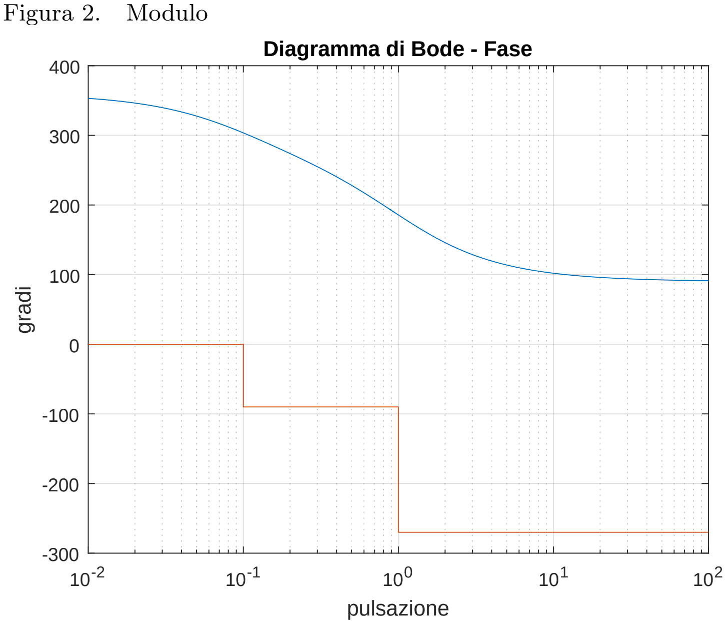

Figura 3. Fase

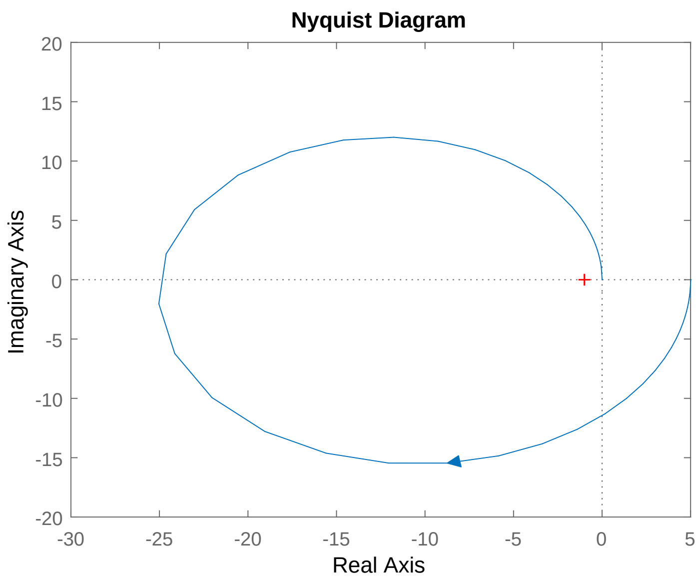

Figura 4. Polare

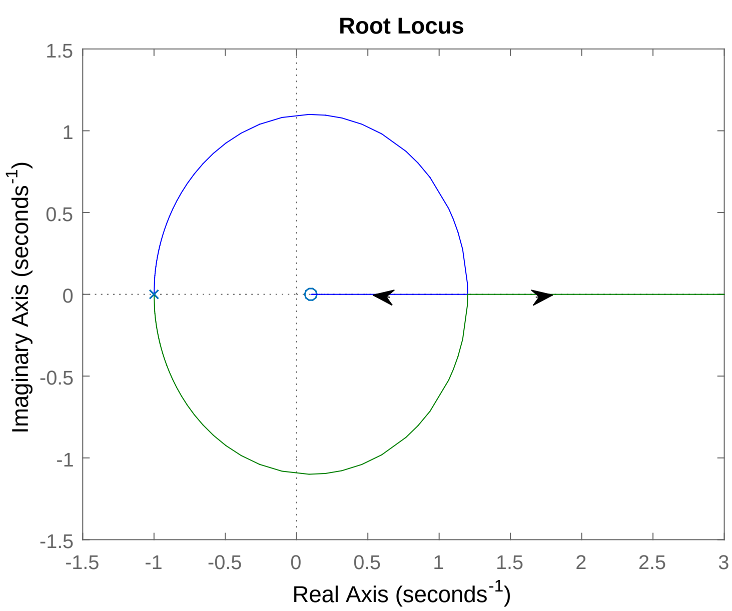

Figura 5. Luogo diretto

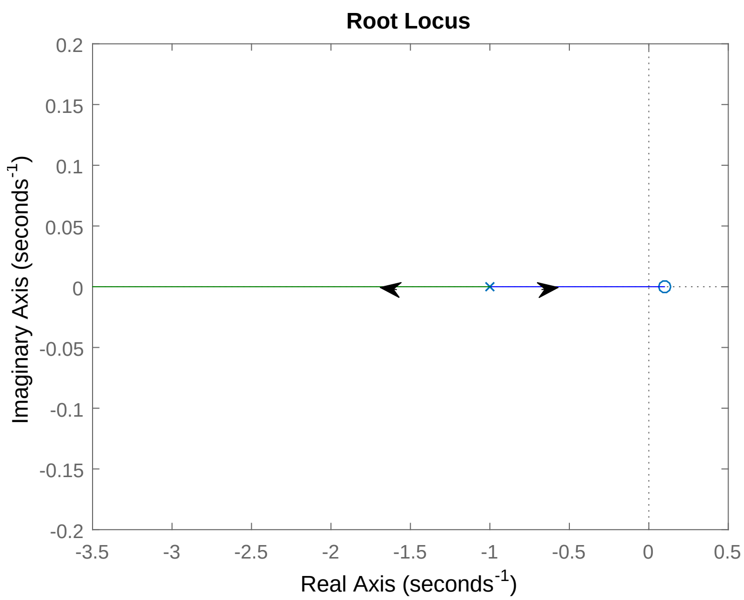

Figura 6. Luogo inverso