Fondamenti di Automatica per Ing. Elettrica

Prof. Patrizio Colaneri[2]

Esame del 20 Giugno 2019

Cognome ____

Nome ____

Matricola ____

Firma ____

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni. Questo fascicolo contiene 5 esercizi.

Si prega di non allegare alcun foglio.

[2] Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingeneria, Politecnico di Milano, 20133 Milano, Italy, email: colaneri@elet.polimi.it

I. Esercizio 1

Si consideri il sistema nonlineare in figura, dove

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}, \quad f(y) = y^3$$

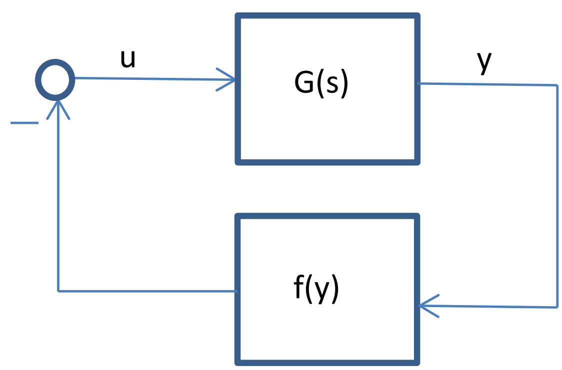

Figura 1. Sistema per esercizio 1

- Si scrivino le equazioni del sistema retroazionato in forma normale.
- Si ricavino gli stati di equilibrio
- Si studi la stabilità di tali stati di equilibrio

========================SOLUZIONE===========================

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2 + u \\ u &= -x_1^3 \end{aligned}$$

L'equazione degli equilibri è:

$$x_2 = 0, \quad x_1(x_1^2 + 1) = 0$$

Quindi l'unico equlibrio reale è

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Linearizzando:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Quindi $\bar{x}$ è asintoticamente stabile.

II. Esercizio 2

Si consideri il sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)
\end{aligned}
$$

- Si studi la stabilità interna, la stabilità esterna, la raggiungibilità e l'osservabilità in funzione del parametro reale α

========================SOLUZIONE============================

La funzione di trasferimento si calcola facilmente, in quanto la seconda riga ha un termine isolato sulla diagonale:

$$G(s) = \frac{(s+1)(\alpha+s+1)}{(s+1)(s^2-2)} = \frac{\alpha+s+1}{s^2-2}$$

Il sistema è instabile per ogni α. Il sistema è BIBO stabile per $\alpha = -(1+\sqrt{2})$. Il sistema è non raggiungibile per ogni α. Il sistema è non osservabile per $\alpha = -(1 \pm \sqrt{2})$.

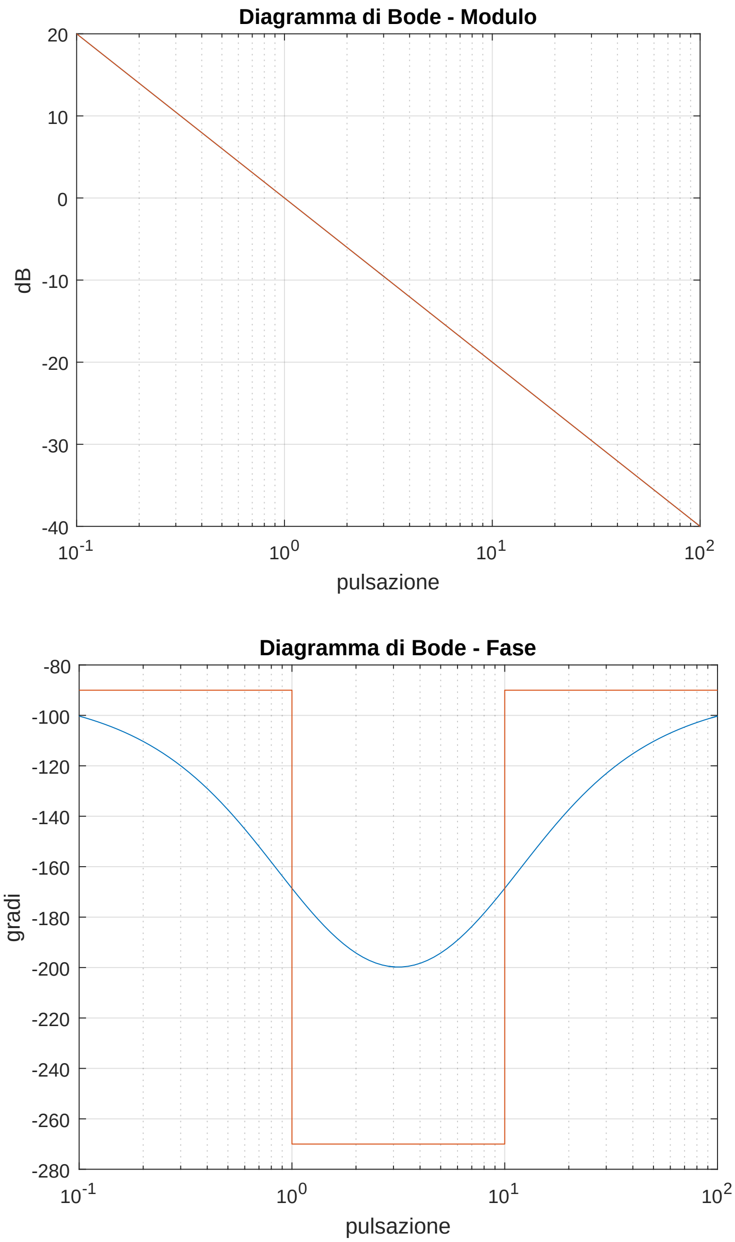

Figura 2. Figura dell'esercizio 3

III. Esercizio 3

Si considerino i diagrammi del modulo e della fase (in rosso quelli asintitici) della risposta in frequenza associata ad una funzione di trasferimento $G(s)$.

- Si ricavi $G(s)$

========================SOLUZIONE=============================

Il modulo è come quello di $1/s$. La fase scende di 180^o in $\omega = 1$ e risale in $\omega = 10$. A modulo costante significa che ci sono zeri e poli reciproci. Quindi

$$G(s) = \frac{(10+s)(1-s)}{s(1+s)(10-s)}$$

IV. Esercizio 4

Si consideri il sistema retroazionato in figura, dove

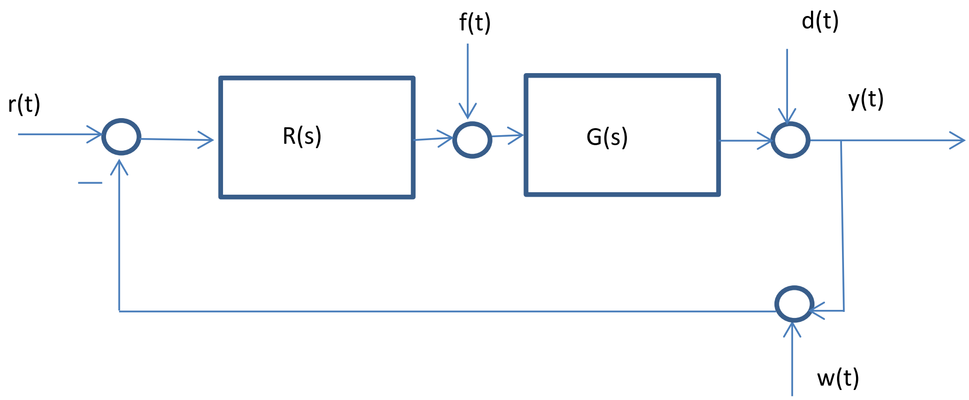

Figura 3. Figura dell'esercizio 4

$$G(s) = \frac{1}{s}, \quad d(t) = sin(t), \quad r(t) = sca(t), \quad w(t) = sin(100t), f(t) = sca(t)$$

Si ricavi un regolatore tale che

- $\omega_c \geq 5r/s$
- $\phi_m \geq 60^o$
- a regime $r(t) - y(t)$ abbia valor medio nullo e ampiezza minore di 0.2

========================SOLUZIONE==============================

Il disturbo $f(t)$ agisce sull'uscita come una rampa. Perchè l'errore sia in media nullo è necessario che $L(s)$ contenga due integratori, e quindi anche $R(s)$ deve contenere un integratore. Per l'ampiezza dell'errore (minore di 0.2) si può imporre $|L(j100)| < 0.1$, $|L(j)| > 10$.

Scegliendo il PI:

$$R(s) = \frac{1 + 10s}{s}$$

si ottiene (circa) $\omega_c = 10$, $|L(100j)| = 0.1$, $|L(j)| = 10$, $\phi_m = 90^o$.

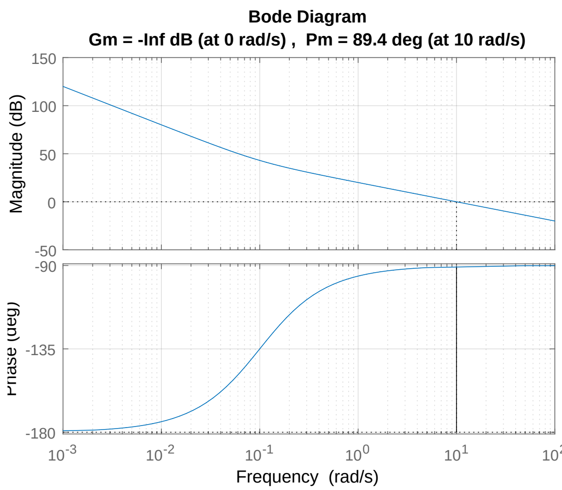

Figura 4. Bode dell'esercizio 4

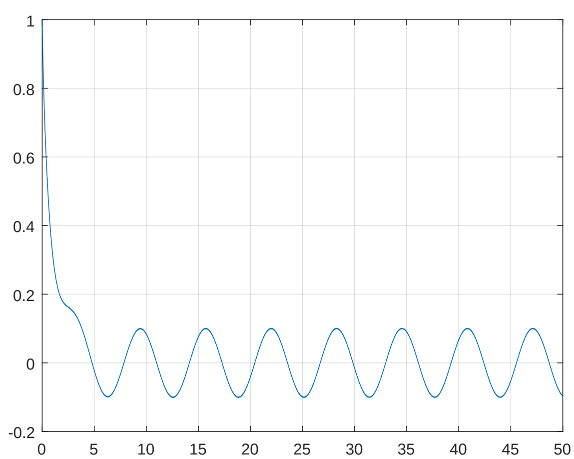

Figura 5. Errore esercizio 4

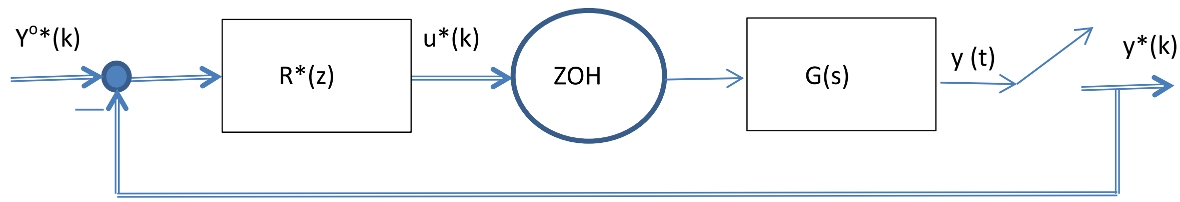

Figura 6. Figura dell'esercizio 5

V. Esercizio 5

Si consideri il sistema di controllo digitale in figura.
dove

$$G(s) = \frac{0.25}{s}, \quad R^{\star}(z) = \frac{1}{z}$$

e i convertitori operano in fase e sincronia con periodo $T > 0$.

- Si studi la stabilità del sistema secondo sia l'equivalente analogico sia l'equivalente a tempo discreto.
- Ponendo $T = 1$ si ricavi l'espressione analitica di $y(t)$ quando $y^{o\star}(k) = sca^{\star}(k)$.

=========================SOLUZIONE==============================

Secndo l'equivalente a tempo discreto, con

$$G^\star(z) = \frac{T/4}{z-1}$$

il polinomio caratteristico è $z^2 - z + T/4$ e quindi il sistema è stabile per $T < 4$.

Secondo l'equivalente analogico, la funzione d'anello è approssimabile con $L(s) = \frac{0.25e^{-1.5sT}}{s}$ e quindi si ha stabilità per $T < 4\pi/3$.

Con $T = 1$, la funzione di trasferimento da $y^{o\star}(k)$ a $u^\star(k)$ è $(z-1)/(z-0.5)^2$ e quindi

$$U^\star(z) = \frac{z}{(z-0.5)^2}, \quad \longrightarrow \quad u^\star(k) = 2k(0.5)^k$$

col che

$$u(t) = u^\star(k), \quad t \in [k, k+1)$$

Infine, essendo $\dot{y} = 0.25u$ si ha

$$y(t) = 1 - (0.5)^k - 0.5k(0.5)^k + 0.5k(0.5)^k(t-k), \quad t \in [k, k+1)$$