Fondamenti di Automatica per Ing. Elettrica

Prof. Patrizio Colaneri[2]

Seconda prova del 20 Giugno 2019

Cognome ____

Nome ____

Matricola ____

Firma ____

Durante la prova non è consentita la consultazione di libri, dispense e quaderni. Questo fascicolo contiene 5 esercizi.

Si prega di non allegare alcun foglio.

[2] Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingeneria, Politecnico di Milano, 20133 Milano, Italy, `email: colaneri@elet.polimi.it`

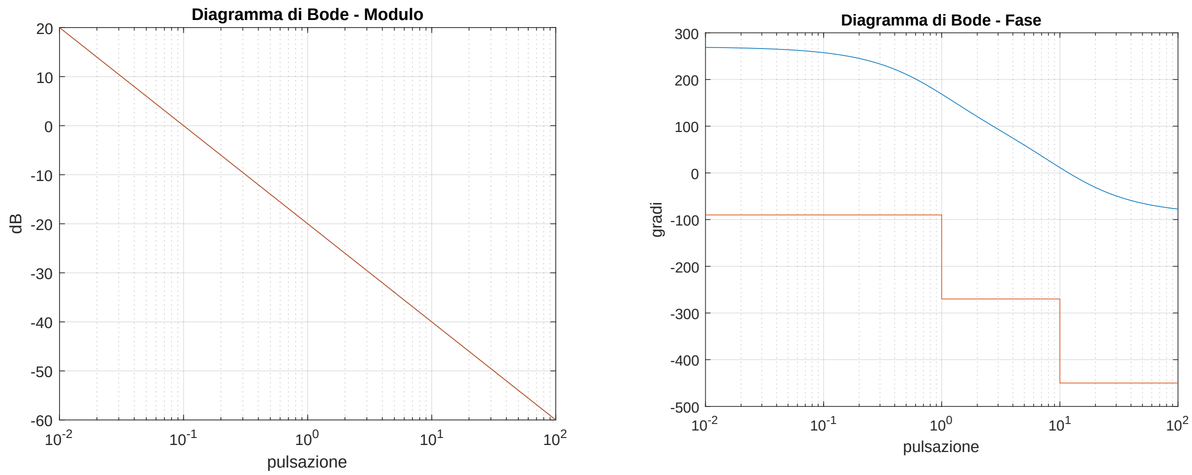

Figura 1. Figura dell'esercizio 1

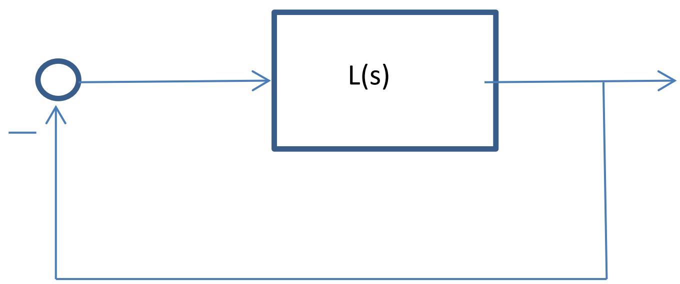

Figura 2. Figura dell'esercizio 1

I. Esercizio 1

Si considerino i diagrammi del modulo e della fase (in rosso quelli asintitici) della risposta in frequenza associata ad una funzione di trasferimento $G(s)$.

- Si ricavi $G(s)$
- Si ponga $L(s) = \mu G(s)$ e si discuta la stabilità del sistema retroazionato in figura, in funzione di $\mu > 0$, utilizzando il criterio di Bode.

========================SOLUZIONE============================

Il modulo è come quello di $1/s$. La fase scende di 180^o in $\omega = 1$ e risale in $\omega = 10$. A modulo costante significa che ci sono zeri e poli reciproci. Quindi

$$G(s) = 0.1\frac{(1-s)(10-s)}{s(1+s)(10+s)}$$

La fase vale -180 gradi in $\omega = 0.85$ circa. Il modulo a tale frequenza è circa 0.12μ. Quindi si ha stabilità per $0 < \mu < 8.33$. Il valore del margine di guadagno si può calcolare in maniera precisa dal polinomio

$$s^3 + (11 - 0.1\mu)s^2 + (10 - 1.1\mu)s + \mu = 0$$

da cui $\mu^* \simeq 8.345$.

II. Esercizio 2

Si consideri il sistema retroazionato in figura, dove

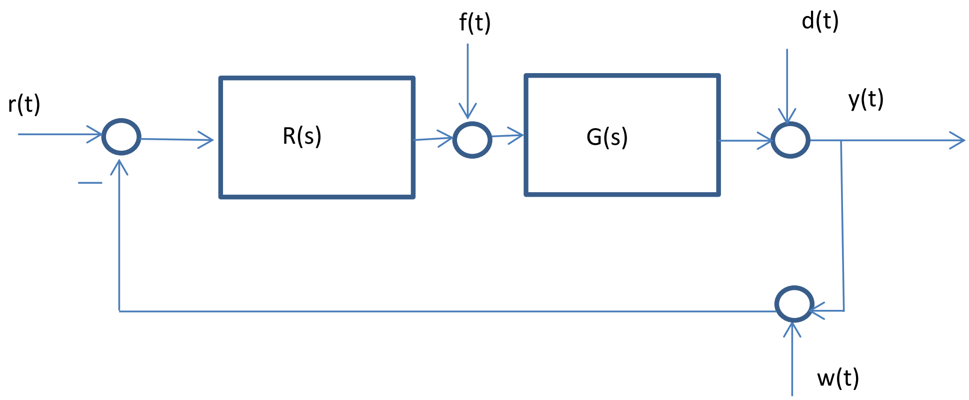

Figura 3. Figura dell'esercizio 2

$$G(s) = \frac{1}{s}, \quad d(t) = sin(t), \quad r(t) = sca(t), \quad w(t) = sin(100t), \quad f(t) = sca(t)$$

Si ricavi un regolatore tale che

- $\omega_c \geq 5r/s$
- $\phi_m \geq 60^o$
- a regime $r(t) - y(t)$ abbia valor medio nullo e ampiezza minore di 0.2

========================SOLUZIONE==============================

Il disturbo $f(t)$ agisce sull'uscita come una rampa. Perchè l'errore sia in media nullo è necessario che $L(s)$ contenga due integratori, e quindi anche $R(s)$ deve contenere un integratore. Per l'ampiezza dell'errore (minore di 0.2) si può imporre $|L(j100)| < 0.1$, $|L(j)| > 10$.

Scegliendo il PI:

$$R(s) = \frac{1 + 10s}{s}$$

si ottiene (circa) $\omega_c = 10$, $|L(100j)| = 0.1$, $|L(j)| = 10$, $\phi_m = 90^o$.

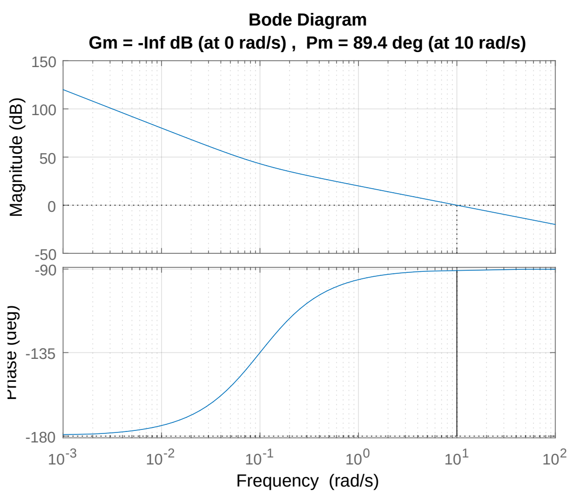

Figura 4. Bode dell'esercizio 2

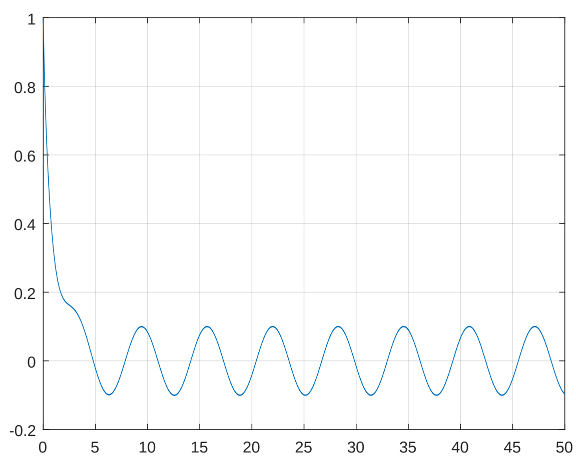

Figura 5. Errore esercizio 2

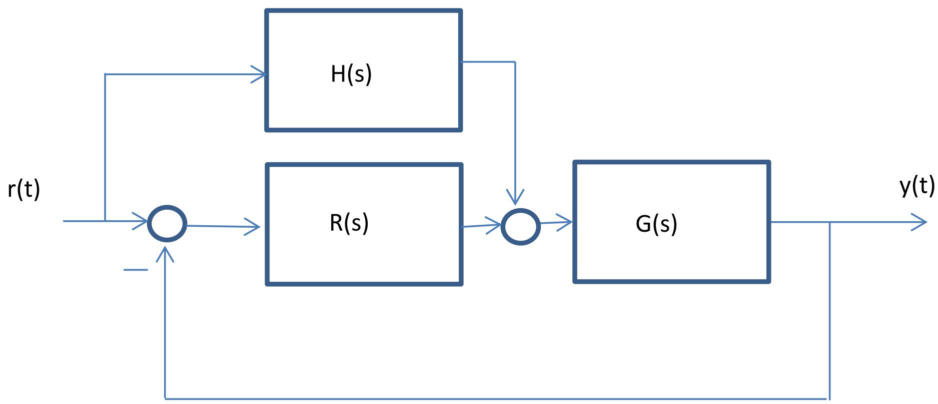

Figura 6. Figura dell'esercizio 3

III. Esercizio 3

Si consideri il sistema di controllo in figura, dove

$$G(s) = \frac{1}{s}, \quad R(s) = \frac{1}{s+1}, \quad r(t) = sin(t)$$

- Si ricavi $H(s)$ (stabile) in maniera tale che $\lim_{t\to\infty} r(t) - y(t) = 0$
- Si scriva l'espressione analitica di $y(t)$.

===================== SOLUZIONE ========================

La funzione di trasferimento da r a $e = r - y$ è

$$S(s) = \frac{1 - G(s)H(s)}{1 + R(s)G(s)}$$

Essa deve bloccare la sinusoide di ingresso, cioè al numeratore di $1 - H(s)G(s)$ deve esserci $1 + s^2$. Inoltre $H(s)$ non deve cancellare il polo instabile di $G(s)$. Una soluzione è dunque

$$1 - H(s)G(s) = \frac{s^2 + 1}{s(s + 1)}$$

col che

$$H(s) = \frac{1 - s}{s + 1}$$

e

$$S(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + s + 1}$$

Risulta

$$E(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

e quindi

$$e(t) = (2/\sqrt{3})e^{-t/2}sin(0.5\sqrt{3}t), \quad y(t) = sin(t) - (2/\sqrt{3})e^{-t/2}sin(0.5\sqrt{3}t)$$

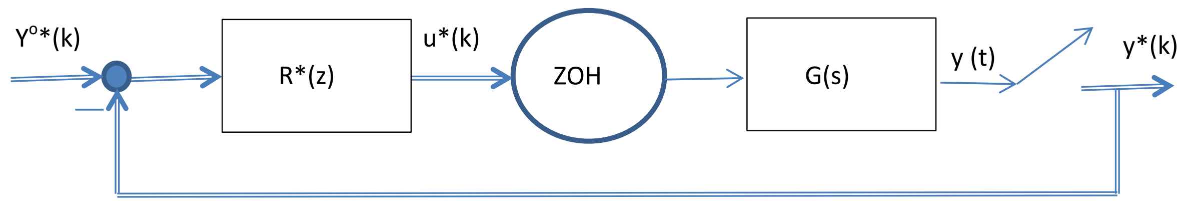

Figura 7. Figura dell'esercizio 5

IV. Esercizio 4

dove

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2}, \quad R^{\star}(z) = \alpha > 0$$

e i convertitori operano in fase e sincronia con periodo $T > 0$.

- Si studi la stabilità del sistema in funzione di (α, T) dal punto di vista digitale (ricavando dapprima il sistema a segnali campionati $G^{*}(z)$).

============= SOLUZIONE =====================

Una realizzazione di $G(s)$ è

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$e^{AT} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \int_0^T e^{At} B dt = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$

e

$$G^*(z) = T \frac{z(T/2+1) + T/2 - 1}{(z-1)^2}$$

Il polinomio caratteristico del sistema in anello chiuso è

$$z^2 + z(-2 + \alpha T^2/2 + \alpha T) + 1 + \alpha T^2/2 - \alpha T$$

e le condizioni di stabilità sono:

$$T < 2, \quad \alpha T < 2$$

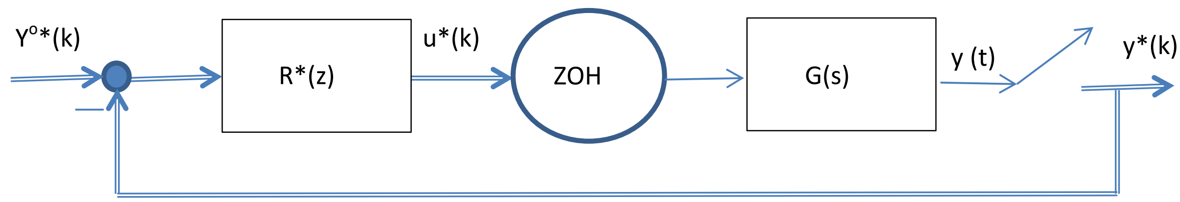

Figura 8. Figura dell'esercizio 5

V. Esercizio 5

Si consideri il sistema di controllo digitale in figura.
dove

$$G(s) = \frac{0.25}{s}, \quad R^{\star}(z) = \frac{1}{z}$$

e i convertitori operano in fase e sincronia con periodo $T > 0$.

- Si studi la stabilità del sistema secondo sia l'equivalente analogico sia l'equivalente a tempo discreto.
- Ponendo $T = 1$ si ricavi l'espressione analitica di $y(t)$ quando $y^{o\star}(k) = sca^{\star}(k)$.

===================================SOLUZIONE===================

Secndo l'equivalente a tempo discreto, con

$$G^\star(z) = \frac{T/4}{z-1}$$

il polinomio caratteristico è $z^2 - z + T/4$ e quindi il sistema è stabile per $T < 4$.

Secondo l'equivalente analogico, la funzione d'anello è approssimabile con $L(s) = \frac{0.25e^{-1.5sT}}{s}$ e quindi si ha stabilità per $T < 4\pi/3$.

Con $T = 1$, la funzione di trasferimento da $y^{o\star}(k)$ a $u^\star(k)$ è $(z-1)/(z-0.5)^2$ e quindi

$$U^\star(z) = \frac{z}{(z-0.5)^2}, \quad \longrightarrow \quad u^\star(k) = 2k(0.5)^k$$

col che

$$u(t) = u^\star(k), \quad t \in [k, k+1)$$

Infine, essendo $\dot{y} = 0.25u$ si ha

$$y(t) = 1 - (0.5)^k - 0.5k(0.5)^k + 0.5k(0.5)^k(t-k), \quad t \in [k, k+1)$$