Fondamenti di Automatica (Ing. Elettrica)

Patrizio Colaneri, Fredy Ruiz

18 Giugno 2020

1 ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema nonlineare in Fig. 1, dove

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

mentre $f(y)$ è la caratteristica nonlineare

$$f(y) = \alpha y + y^2$$

cioè $p(t) = f(y(t)) = \alpha y(t) + y(t)^2$.

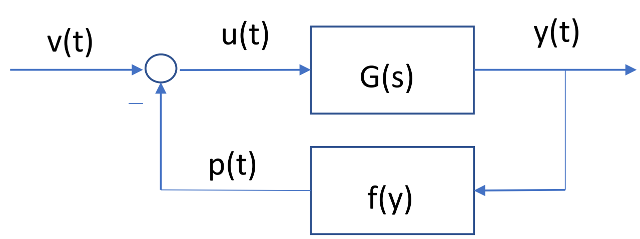

Figure 1: Figura dell'Esercizio 1

1.1 Si scriva una realizzazione in spazio di stato di $G(s)$ (ingresso u, uscita y) in forma canonica di controllo.

1.2 Si scrivano le equazioni del sistema nonlineare (ingresso v, uscita y) in forma normale.

1.3 Si calcolino gli equilibri dello stato corrispondenti all'ingresso costante $v = 0$, in funzione di α.

1.4 Si studi la stabilità asintotica di tali equilibri in funzione di α.

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

La realizzazione in forma canonica di controllo di $G(s)$ è:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= x_3\\ \dot{x}_3 &= -x_1 - 3x_2 - 3x_3 + u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

Essendo $u = v - f(y) = v - \alpha y - y^2 = v - \alpha x_1 - x_1^2$ risulta

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= x_3\\ \dot{x}_3 &= -x_1 - 3x_2 - 3x_3 - \alpha x_1 - x_1^2 + v\\ y &= x_1\end{aligned}$$

Con $v = 0$ abbiamo due stati di equilibrio

$$\bar{x}^{[1]} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}^{[2]} = \begin{bmatrix} -(1+\alpha)\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$$

Linearizzando abbiamo le due matrici dinamiche corrispondenti (si noti che sono in forma compagna):

$$A^{[1]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1-\alpha & -3 & -3 \end{bmatrix}, \quad A^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1+\alpha & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

e quindi i due polinomi caratteristici:

$$p^{[1]}(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + \alpha, \quad p^{[2]}(s) = s^3 + 3s^2 + 3s - 1 - \alpha$$

Applicando il criterio di Routh Hurwitz concludiamo che $\bar{x}^{[1]}$ è asintoticamente stabile per $-1 < \alpha < 8$ mentre $x^{[2]}$ è asintoticamente stabile per $-10 < \alpha < -1$.

2 ESERCIZIO 2

Si consideri in Fig. 2 la risposta allo scalino unitario di un sistema del secondo ordine con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\mu(1 + s\tau)}{(1 + sT)^2}$$

2.1 Si ricavino i parametri μ, τ, T, considerando che $y(\infty) = 1$, $\dot{y}(0) = -1$ e il tempo di assestamento $T_{a1} \simeq 6$.

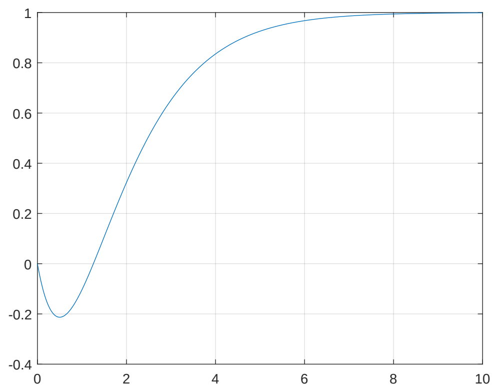

Figure 2: Seconda figura dell'Esercizio 2

2.2 Si consideri il sistema retroazionato in Fig. 3 e si studi a stabilità in funzione di ρ utilizzando il *luogo delle radici*, il *polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso*, *il criterio di Nyquist*. [**Si disegni in un foglio separato il luogo delle radici - diretto ed inverso - e il diagramma di Nyquist**].

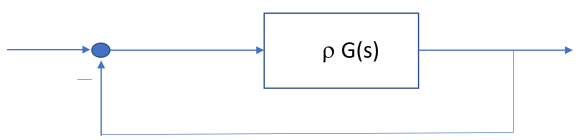

Figure 3: Figura dell'Esercizio 2

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Dal grafico si evince che $T > 0$ (il sistema è asintoticamente stabile). Inoltre ha guadagno unitario ($y(\infty) = \mu\bar{u} = 1$. Da $\dot{y}(0) = -1$ si ha $-1 = \tau/T^2$. Infine dal empo di assestamento (circa 6 volte la costante di tempo dominante T) abbiamo $T = 1$. In conclusione

$$G(s) = \frac{1-s}{(1+s)^2}$$

Il polinomio caratteristico del sistema in anello chiuso è:

$$(1+s)^2 + \rho(1-s) = s^2 + 2s + 1 + \rho - \rho s = s^2 + s(2-\rho) + 1 + \rho$$

cole che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per

$$-1 < \rho < 2$$

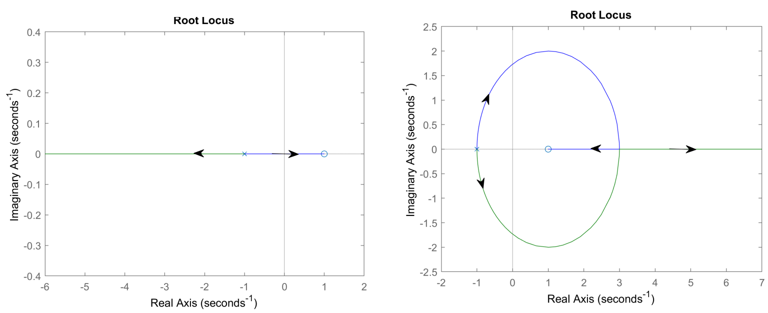

Figure 4: Luogo radici per $\rho > 0$ (a sinistra) e $\rho > 0$ (a destra)

Per $\rho < 0$ si vede che una radice diventa nulla per $\rho = -1$. Per $\rho > 0$ due radci sono sull'asse immaginario per $\rho = 2$.

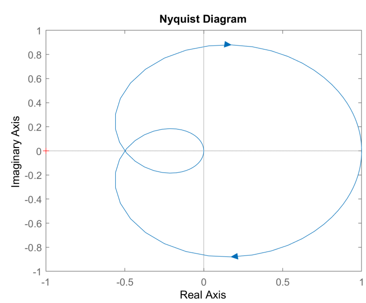

Figure 5: Diagramma di Nyquist per r $\rho = 1$

Il punto in cui il diagramma attraversa l'asse reale con fase $-\pi$ si calcola con l'equazione

$$arg(G(j\omega) = -3atan(\omega) = -\pi$$

cioè $\omega_\pi = \sqrt{3}$, a cui corrisponde $G(j\omega\pi) = -0.5$. Inoltre $G(0) = 1$. Quindi il sistema retroazionato (zero giri) è asintoticamente stabile se e solo se $-1 < \rho < 1/0.5 = 2$.

3 ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema di controllo in Fig. 6 dove

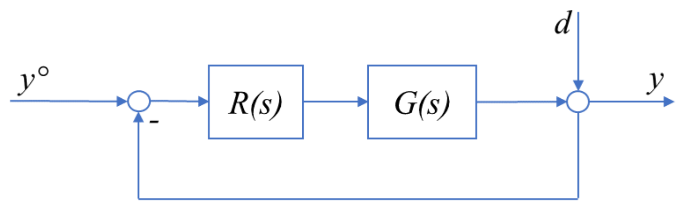

Figure 6: Figura dell'Esercizio 3

$$G(s) = \frac{0.1}{(0.2s+1)(s+1)}$$

e $n(t) = 0$, $v(t) = 0$. Progettare un regolatore $R(s)$ tale che:

- il modulo dell'errore a transitorio esaurito a fronte di $y_o(t) = \pm 10 sca(t)$ sia $|e_\infty| = 0$
- il modulo dell'errore a transitorio esaurito a fronte di $d(t) = sin(\omega t)$ con $0.05 \leq \omega \leq 0.1$ sia $|e_\infty| \leq 0.1$
- la risposta a uno scalino unitario di riferimento abbia un tempo di assestamento $T_{a1} \leq 10 sec$ e una sovraelongazione massima $S\% \leq 5\%$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

La $G(s)$ corrisponde a un sistema asintoticamente stabile, tipo 0 con guadagno statico $G(0) = 1$. Dalle specifiche richieste si ha che:

- Per garantire $|e_\infty| = 0$ a fronte di un ingresso di riferimento scalino $L(s)$ dovrà essere almeno tipo 1, allora:
$$R_1(s) = \mu/s$$
- Per garantire una sovraelongazione massima $S\% \leq 5\%$, è possibile fissare $\phi_m > 75°$. Allora $F(s)$ ha un polo dominante reale e costante di tempo $\tau \approx 1/\omega_c$.
- Il tempo di assestamento di un sistema del primo ordine è $T_a \approx 5/\tau$, allora la pulsazione critica della $L(s)$ deve essere:
$$\omega_c \geq 0.5 rad/s$$
- La funzione di trasferimento dal disturbo $D(s)$ al errore $E(s)$ è
$$\frac{E(s)}{D(s)} = -S(s)$$
Dalla specifica precedente si sa che per l'intervallo $0.05 rad/s \leq \omega \leq 0.1 rad/s$, la funzione di sensitività si può approssimare come
$$|S(j\omega)| \approx 1/|L(j\omega)|$$
allora per garantire $|e_\infty| \leq 0.1$, la condizione sulla funzione di anello risulta
$$|L(j\omega)| \geq 1/0.1 = 10(20dB), \text{ per } 0.05 rad/s \leq \omega \leq 0.1 rad/s$$

Primo tentativo: $R_1(s) = 1/s$, in questo caso risulta
$$L(s) = \frac{0.1}{s(0.2s+1)(s+1)}$$
con $\omega_c \approx 0.1 rad/s$ che non soddisfa le specifiche, allora è necessario alzare il guadagno.

Secondo tentativo: $R_2(s) = 10/s$, in questo caso risulta
$$L(s) = \frac{1}{s(0.2s+1)(s+1)}$$
con $|L(j\omega)| > 10$ per $0.05 rad/s \leq \omega \leq 0.1 rad/s$, $\omega_c \leq 1 rad/s$ e $\phi_m \approx 45°$ che non soddisfa le specifiche.

Terzo tentativo: $R_3(s) = 10(s+1)/s$, in questo caso risulta
$$L(s) = \frac{1}{s(0.2s+1)}$$
con $|L(j\omega)| > 10$ per $0.05 rad/s \leq \omega \leq 0.1 rad/s$, $\omega_c \approx 1 rad/s$ e $\phi_m = 90° - \tan^{-1}(0.2) \approx 78.5°$, che soddisfa tutte le specifiche.

$R_3(s)$ è un controllore proprio tipo PI.

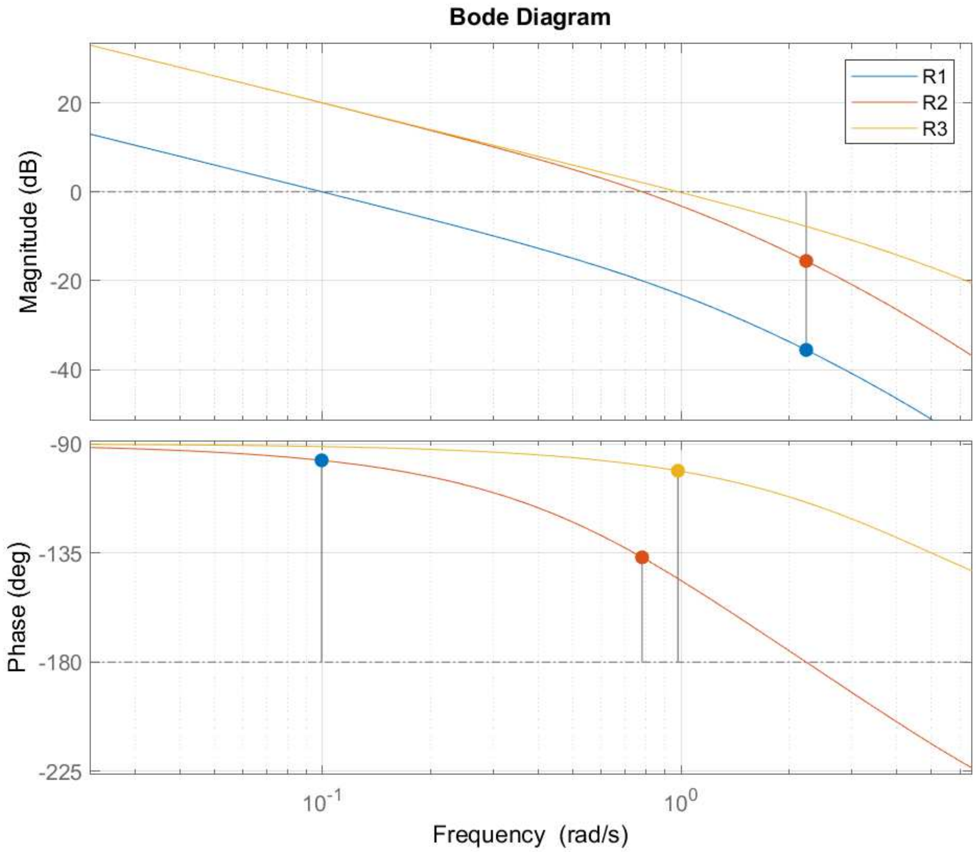

Figure 7: Diagrammi di Bode dell'Esercizio 3

4 ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema di controllo digitale in Fig. 8 dove i convertitori A/D e D/A operano in fase

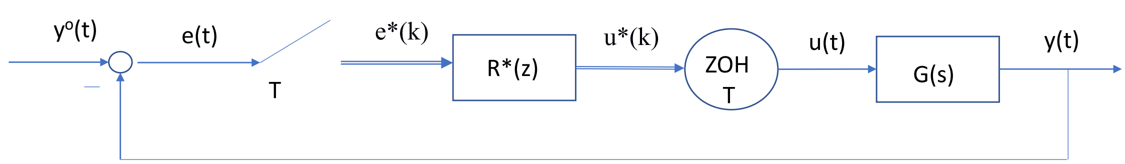

Figure 8: Figura dell'Esercizio 4

e sincronia con periodo $T > 0$.

$$G(s) = \frac{1}{s}, \quad R^*(z) = \frac{\alpha}{z}$$

4.1 Si analizzi la stabilità del sistema ibrido in funzione di $\alpha > 0$ e $T > 0$ seguendo il punto di vista analogico (calcolando la funzione di trasferimento equivalente $R(s)$ da $e(t)$ a $u(t)$) e dal punto di vista digitale (calcolando il sistema a segnali campionati $G^*(z)$ da $u^*(k)$ a $y^*(k) = y(kT)$).

4.2 Si ponga $T = 0.25$, $\alpha = 1$ e si calcoli l'espressione analitica di $u^*(k)$ quando $y^0(t) = sca(t)$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

Punto di vista analogico. La $L(s)$ "equivalente" è:

$$L(s) = \frac{\alpha}{s} e^{-sT/2} e^{-sT} = \frac{\alpha}{s} e^{-s1.5T}$$

Quindi $\omega_c = \alpha$ e $\Phi_m = \pi/2 - 1.5\alpha$. Dunque $\alpha T < \pi/3$.

Punto di vista digitale. Il sistema a segnali campionati corrispondente a $G(s)$ è

$$G^*(z) = \frac{T}{z-1}$$

e quindi

$$L^*(z) = \frac{\alpha T}{z(z-1)}$$

L'equazione caratteristica è

$$z^2 - z + \alpha T = 0$$

La somma delle radici è 1 e il prodotto αT, con $\alpha T > 0$. Quindi $\alpha T < 1$.

Dal momento che $y^o(t) = sca(t)$ abbiamo che $y^{*o(k)} = sca^*(k)$. La funzione di trasferimento da $y^{*o}(k)$ a $u^*(k)$ è:

$$\frac{R^*(z)}{1 + R^*(z)G^*(z)} =$$

Quindi, con $\alpha = 1$ e $T = 0.25$ si ha:

$$U^*(z) = \frac{R^*(z)}{1 + R^*(z)G^*(z)} \frac{z}{z-1} = \frac{\alpha z}{z^2 - z + \alpha T} = \frac{z}{(z-0.5)^2}$$

In conclusione

$$u^*(k) = 0.5^{k-1} ram^*(k)$$