Fondamenti di Automatica (Ing. Elettrica)

Patrizio Colaneri, Fredy Ruiz

21 Luglio 2020

1 ESERCIZIO 1

Si consideri lo schema elettrico di Figura 5, dove il carico è descritto dall'equazione differenziale

$$y = \dot{I} + I^2$$

1.1 Si ponga $R = C = L = 1$ (dimensioni opportune) e si scriva il sistema non lineare (del terz'ordine) in forma normale.
1.2 Si ponga $u = 0$ e si calcolino gli equilibri del sistema.
1.3 Si discuta la stabilità degli equilibri ricavati.

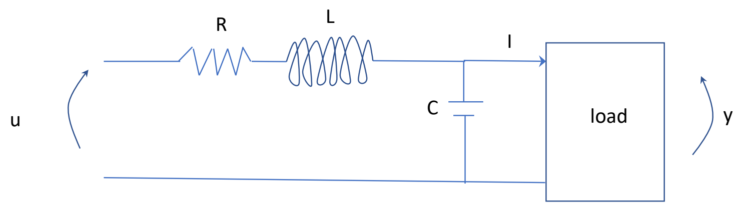

Figure 1: Figura dell'Esercizio 1

SOLUZIONE ESERCIZIO 1
Sia x_1 corrente sull'induttore, x_2 tensione sul condensatore, $x_3 = I$. Quindi

$$L\dot{x}_1 + Rx_1 + x_2 = u$$
$$C\dot{x}_2 + x_3 = x_1$$
$$\dot{x}_3 + x_3^2 = x_2$$

Ponendo $R = L = 1$, $u = 0$ gli equilibri sono

$$x^{[1]} = [0\ 0\ \ 0]', \quad x^{[2]} = [-1\ 1\ \ -1]'$$

La matrice del sistema linearizzato intorno all'equilibrio $\bar{x}$ è:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2\bar{x}_3 \end{bmatrix}$$

with characteristic equation

$$s^3 + 2\bar{x}_3 s^2 + (2\bar{x}_3 + 2)s + 1 + 2\bar{x}_3 = 0$$

Therefore $x^{[1]}$ is asymptotically stable and $x^{[2]}$ unstable.

2 ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema retroazionato di Fig. 2 dove

$$L(s) = \alpha \frac{(s+10)}{s(s+1)}$$

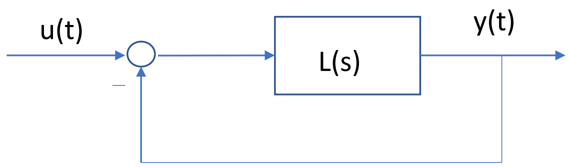

Figure 2: Figura dell'Esercizio 2

2.1 Si studi la stabilità in funzione di α utilizzando il *luogo delle radici*, il *polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso*, *il criterio di Nyquist*. [**Si disegni in un foglio separato il luogo delle radici - diretto ed inverso - e il diagramma di Nyquist**].
2.2 Si ponga $\alpha = 1$ e si calcoli l'espressione analitica della risposta $y(t)$ quando $u(t) = sca(t)$. Si tracci il grafico qualitativo di $y(t)$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Il polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso è:

$$s^2 + (1+\alpha)s + 10\alpha$$

Quindi $\alpha > 0$ per la stabilità asintotica. Il luogo delle radici e il diagramma di Nyquist sono nella figure successive.

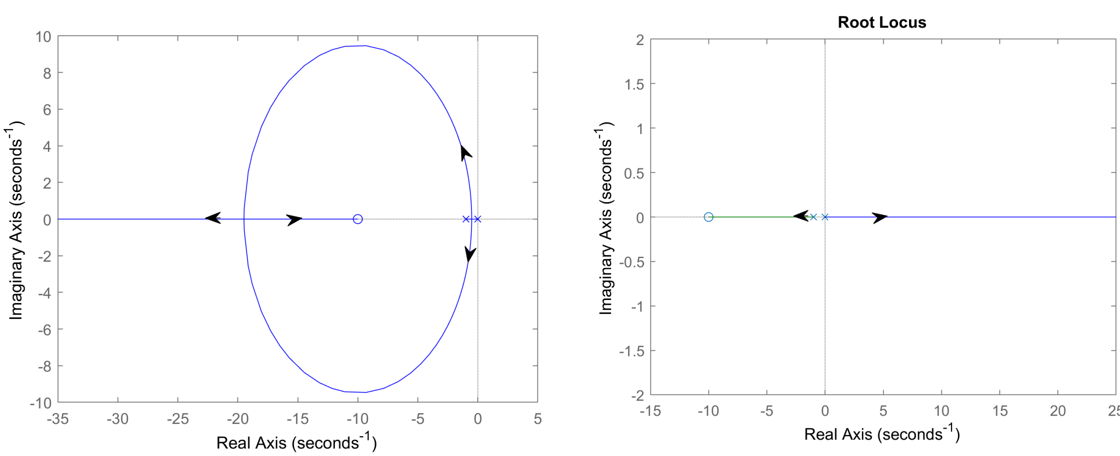

Figure 3: Luogo radici, diretto e inverso

Per $\alpha = 1$ la funzione di trasferimento da u a y è

$$G(s) = \frac{s+10}{s^2+2s+10}$$

La ripsosta allo scalino (oscillante con $\omega = 3$, $\xi = 1/\sqrt{10}$ è graficato nella figura successiva.

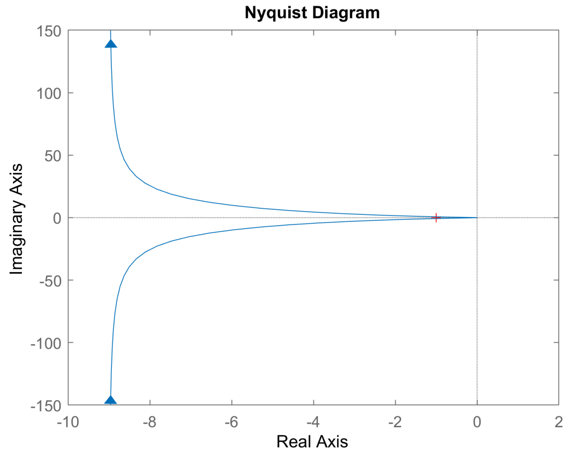

Figure 4: Diagramma di Nyquist

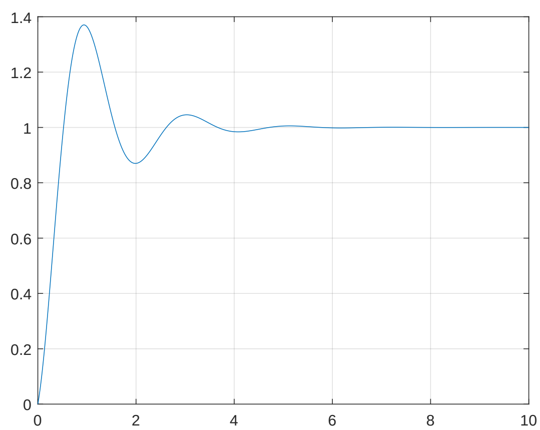

Figure 5: Risposta allo scalino

3 ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema retroazionato in figura 7, dove $G(s) = \frac{e^{-0.05s}}{(1+0.1s)(1+s)}$

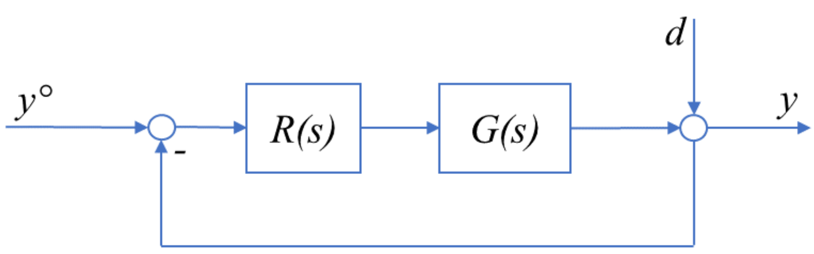

Figure 6: Figura dell'Esercizio 3

1. Progettare un regolatore PI, $R(s) = K\left(1 + \frac{1}{sT_I}\right)$, in modo che:

- L' errore a regime sia nullo quando $y^o(t) = \text{sca}(t)$
- Il margine di fase ϕ_m sia maggiore di 45°
- $\omega_c > 4\, rad/s$

2. Valutare l'attenuazione di un disturbo $d(t) = \sin(\bar{\omega}t)$ sull'uscita, per
   - $\bar{\omega}_1 = 0.1\, rad/s$
   - $\bar{\omega}_2 = 10^4\, rad/s$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

La $G(s)$ corrisponde a un sistema asintoticamente stabile, tipo 0 con guadagno statico $G(0) = 1$. Dalle specifiche richieste si ha che:

- Per garantire $|e_\infty| = 0$ a fronte di un ingresso di riferimento scalino, $L(s)$ deve essere almeno tipo 1. Il controllore PI si può scrivere come:

$$R(s) = \frac{K}{T_I}\left(\frac{T_I s + 1}{s}\right)$$

  allora $L(s)$ è tipo 1 e di conseguenza l'errore a regime per un riferimento tipo scalino sarà nullo se il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

- Si devono scegliere la posizione dello zero $z_1 = -1/T_I$ e il guadagno $K' = K/T_I$.

  Dal diagramma di Bode di $G(s)/s$ si vede che senza lo zero, per $K' = 1$, la pulsazione di taglio ω_c è inferiore di $1rad/s$ e il margine di fase $\phi_m \approx 45°$. Bisogna alzare il guadagno e aumentare la fase intorno a la pulsazione di taglio richiesta.

- Mettendo $T_I = 1$ si cancella il polo in $s = 1rad/s$. In tal caso

$$\arg(L(j\omega)) = -\pi/2 - 0.05\omega - \tan^{-1}(0.1\omega)$$

- Scegliendo $\omega_C = 5rad/s$, maggiore alla pulsazione richiesta, il margine di fase risulta

$$\phi_m = 180 - |\arg(L(j\omega)| = 50°$$

  superiore al minimo margine specificato.

- Il guadagno viene selezionato per fissare la pulsazione di taglio:

$$|L(j5)| = 1$$

  trovando $K = 5.6$.

- Il controllore finale è

$$R(s) = 5.6\left(1 + \frac{1}{s}\right)$$

- La funzione di trasferimento dal disturbo all'uscita è:

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

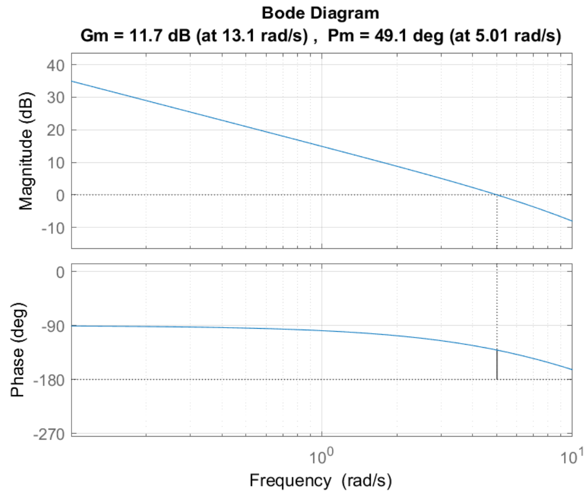

Figure 7: Diagrammi di Bode dell'Esercizio 3

- per $\omega_1 = 0.1 rad/s$ risulta che $\omega_1 << \omega_c$, per tanto $|S(j\omega)| \approx 1/|L(j\omega)|$.

  Dal diagramma di Bode $|L(j0.1)| \approx 35dB$, allora la attenuazione del disturbo è intorno ai $35dB$ (0.018 di guadagno in scala lineare).

- per $\omega_2 = 10^4 rad/s$ risulta che $\omega_2 >> \omega_c$, per tanto $|S(j\omega)| \approx 1$. Per tanto il disturbo non viene attenuato ne amplificato.

4 ESERCIZIO 4

Si consideri un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento $G(z)$, ingresso $u(k)$ e uscita $y(k)$. Supponendo $u(k) = sca(k)$ l'uscita $y(k)$ è la seguente:

$$y(0) = 0,\ y(1) = 1,\ y(k) = 2, \quad k \geq 2$$

4.1 Si ricavi $G(z)$.
4.2 Si faccia ora riferimento al sistema di controllo in Figura 8, dove $G(z)$ è stata ricavata al punto precedente. Si ricavi $R(z)$ in modo tale che l'errore sia nullo dopo un numero finito di passi (minimo possibile), quando il riferimento è uno scalino.

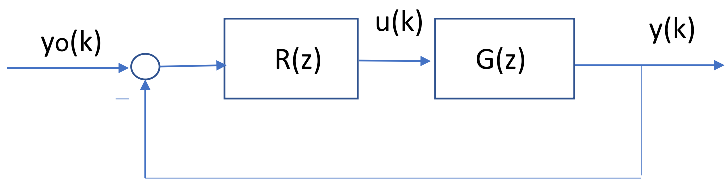

Figure 8: Figura dell'Esercizio 4

4.3 Si ricavi l'espressione analitica di $u(k)$.

SSOLUZIONE ESERCIZIO 4

$$Y(z) = \frac{1}{z} + \frac{2}{z(z-1)} = \frac{z+1}{z(z-1)}$$

e quindi

$$G(z) = \frac{z+1}{z^2}$$

Imponendo $F^0(1) = 1$, $F^o(-1) = 0$, $F^o(z)$ FIR, abbiamo:

$$F^o(z) = \frac{z+1}{2z^2}$$

e quindi

$$R(z) = \frac{z^2}{2(z-1)(z+0.5)}$$