POLITECNICO DI MILANO

Laboratorio di Fondamenti di Automatica

Ingegneria Elettrica

Sessione 3/3

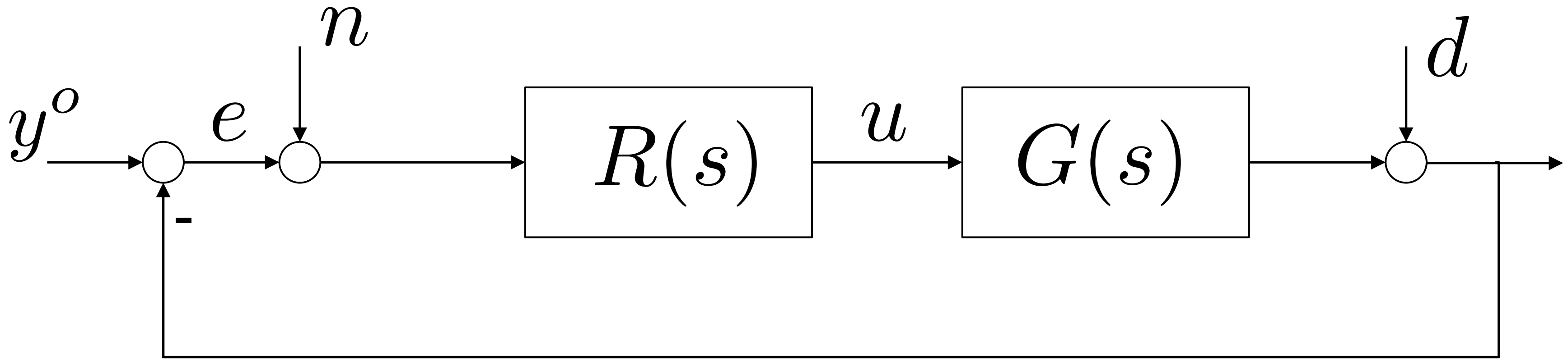
Danilo Caporale [caporale@elet.polimi.it]

Outline

- Funzioni di trasferimento di interesse nel progetto di un controllore.
- Esercizi di progetto di controllori con l’ausilio di MATLAB.

- Nota: ci servirà l’editor di testo. Apritelo col comando edit.

Schema tipico di un sistema di controllo a tempo continuo e fdt d'interesse



$$L(s) = R(s)G(s)$$

Funzione d'anello (abbiamo visto come studiare con Matlab la stabilità del sistema complessivo con questa funzione).

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$$

Funzione di sensitività.

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

Funzione di sensitività complementare.

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1+L(s)} = R(s)S(s)$$

Funzione di sensitività del controllo.

Come si affronta il progetto di un controllore

- Modello.
  → funzione di trasferimento
- Requisiti statici e dinamici.
  → errore a transitorio esaurito, banda passante, margine di fase, …
- Scelta della struttura del controllore.
  → PID, struttura generica con poli/zeri/guadagno ad hoc.
- Scelta dei parametri del controllore che soddisfano le specifiche.
  → Si può fare a mano, nella pratica si usa MATLAB.
- Verifica.
  → A mano o con MATLAB.

Esercizio:

Regolatore a struttura libera

Esercizio 1

1. Modello del sistema da controllare:

$$G(s) = \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

2. Requisiti per il sistema di controllo:

$$|e_\infty| \leq 0.1 \quad \text{per} \quad \begin{array}{l} y^o(t) = A\text{sca}(t) \\ d(t) = B\text{sca}(t) \end{array}$$

$$\omega_c \geq 0.2$$

$$\varphi_m \geq 60^o$$

Struttura del regolatore

Utilizzeremo un regolatore composto di due parti, una *statica* ed una *dinamica:*

$$R(s) = R_1(s)R_2(s)$$

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^r}$$

$$R_2(s) = \frac{\Pi_i(1+\tau_i s)\Pi_i(1+2\zeta_i s/\alpha_{ni}+s^2/\alpha_{ni}^2)}{\Pi_i(1+T_i s)\Pi_i(1+2\xi_i s/\omega_{ni}+s^2/\omega_{ni}^2)}$$

Progetto statico del controllore

$$G(s) = \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)} \qquad |e_\infty| \leq 0.1 \qquad \begin{aligned} y^o(t) &= A\mathrm{sca}(t) \\ d(t) &= B\mathrm{sca}(t) \end{aligned}$$

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^r}$$

Calcolando il valore dell'errore a transitorio esaurito (Teorema del Valore finale) osserviamo che scegliendo $r = 1$ si ha sempre $e_\infty = 0$ per cui fissiamo $r = 1$ e teniamo libero μ_r .

$$L_1(s) = \frac{G(s)}{s}\mu_r$$

è soddisfatto il requisito di precisione statica.

```
R1 = tf(1,[1 0]) % mu_r = 1
G = tf(10,conv([10 1],conv([5 1],[1 1])))
La = R1*G
Lb = R1*G*10
bode(La,Lb)
```

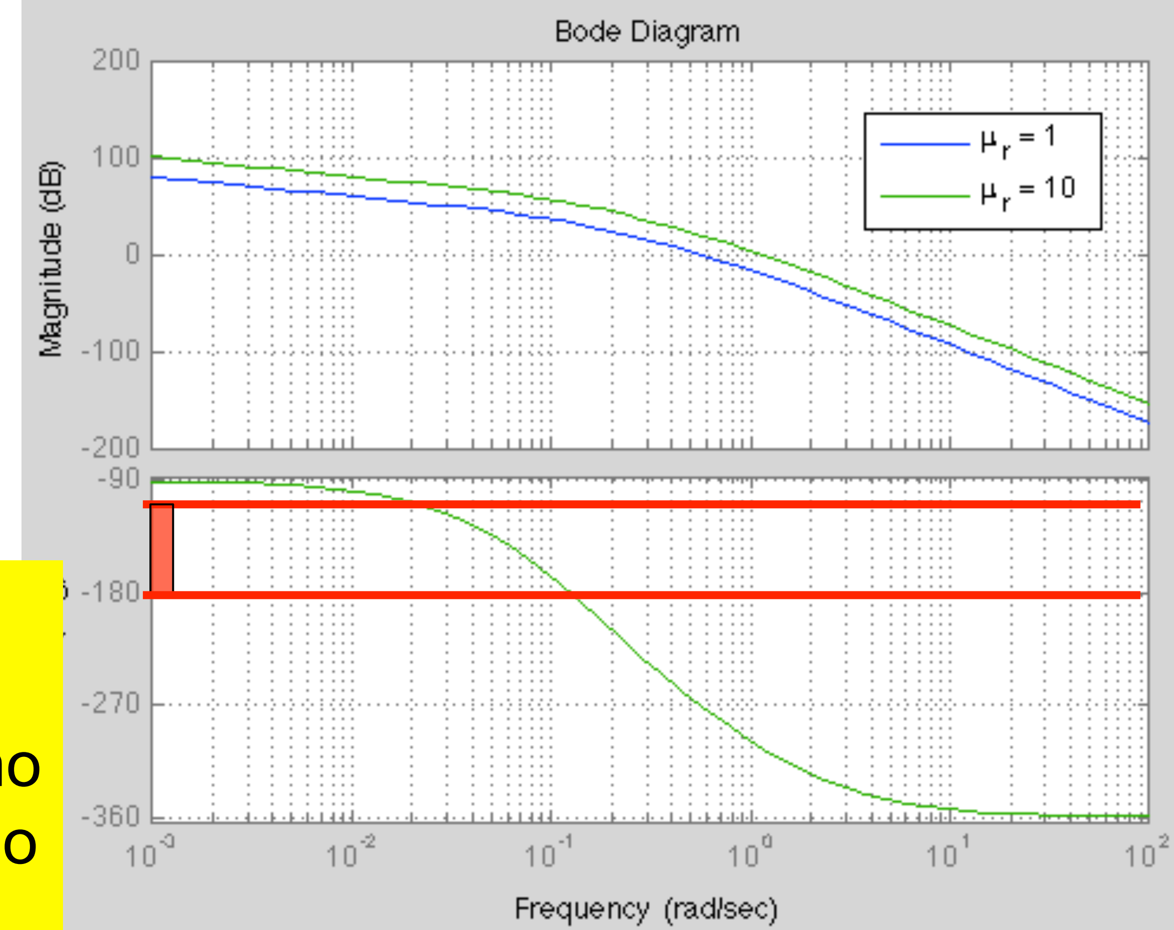
Sui requisiti dinamici…

```
Ra = tf(1,[1 0]) % mu_r = 1
La = Ra*G
Rb = tf(10,[1 0]) % mu_r = 10
Lb = Rb*G*10 % mu_r = 10
bode(La,Lb)
```

Il guadagno del regolatore non influenza il diagramma delle fasi.

$$\boxed{\varphi_m \geq 60^o}$$

$$\omega_c \geq 0.2$$



Per avere un margine di fase di 60° dovremmo abbassare il guadagno fino a che la frequenza di taglio sia di 0.03 rad/s.

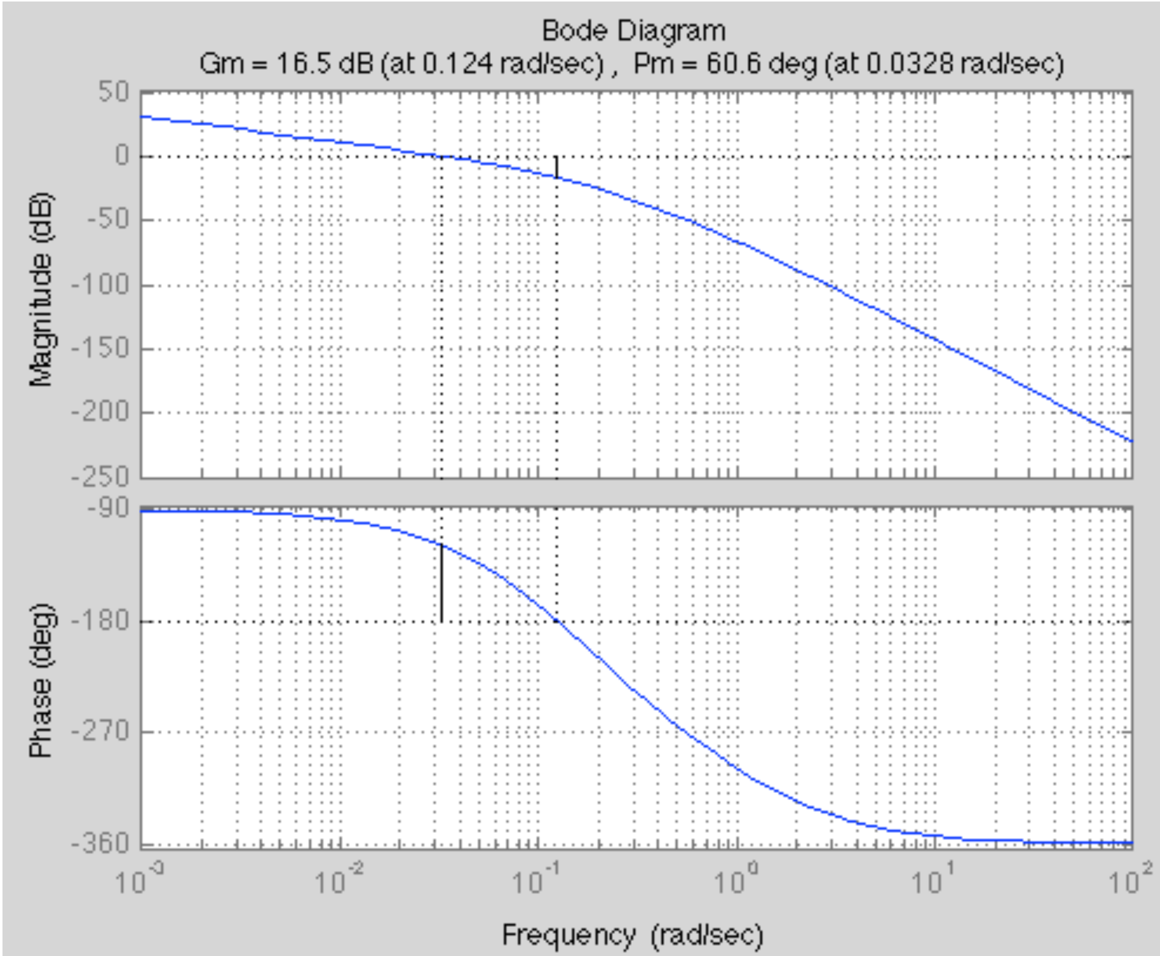
Sui requisiti dinamici…

$\omega_c \geq 0.2$

$\varphi_m \geq 60^o$

Ad esempio:

```
R1  = 0.0035 * tf(1,[1 0])
Lc = R1*G
margin(Lc)
```

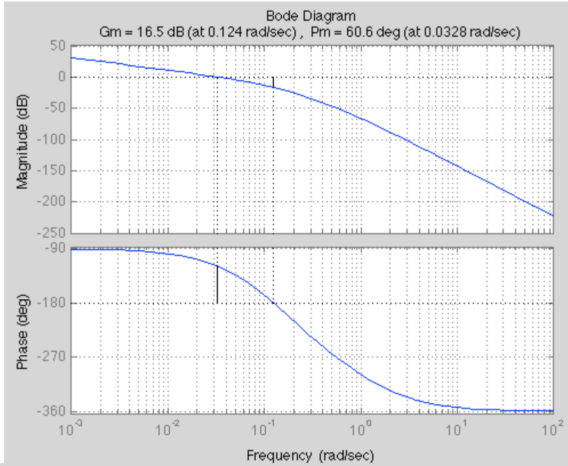


Soddisfiamo così il requisito sul margine di fase ma non quello sulla frequenza di taglio! E non si può fare meglio di così variando il guadagno! → serve una parte dinamica del regolatore che modifichi il dagramma delle fasi.

Parte dinamica del regolatore

Guardando i diagrammi di Bode osserviamo che abbiamo bisogno di (“alzare” il diagramma delle fasi così da poter) **spostare più a destra la frequenza di taglio**.

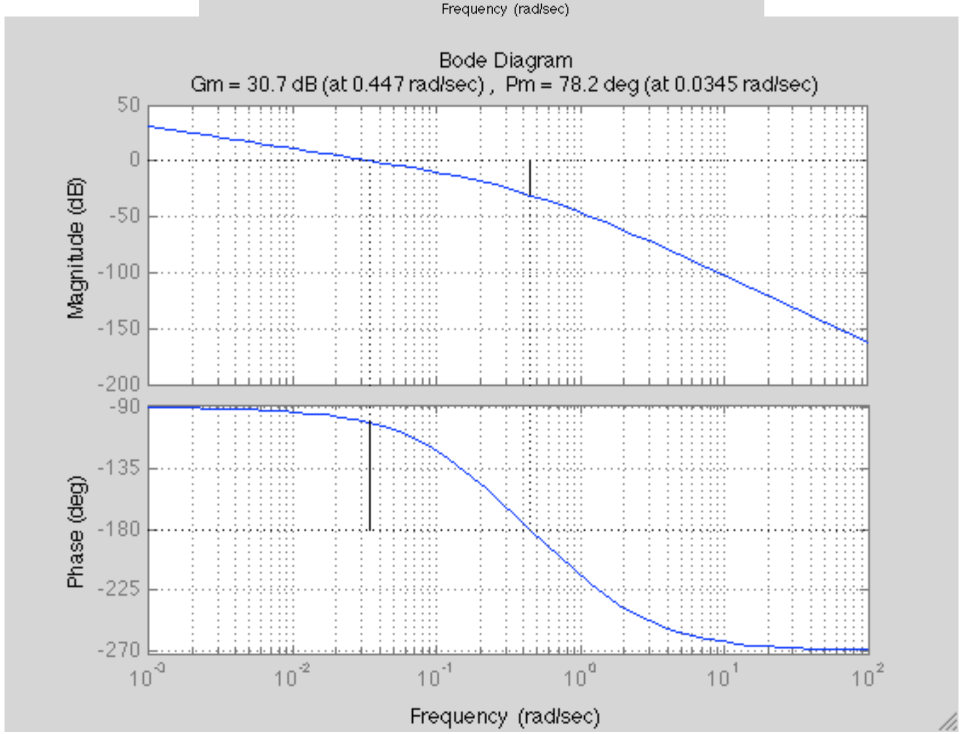
→ Cancelliamo il polo a bassa frequenza della fdt G(s).



R = 0.0035 * tf([10 1],[1 0])

Ld = R*G

margin(R*Ld)



→ Non basta…

Parte dinamica del regolatore

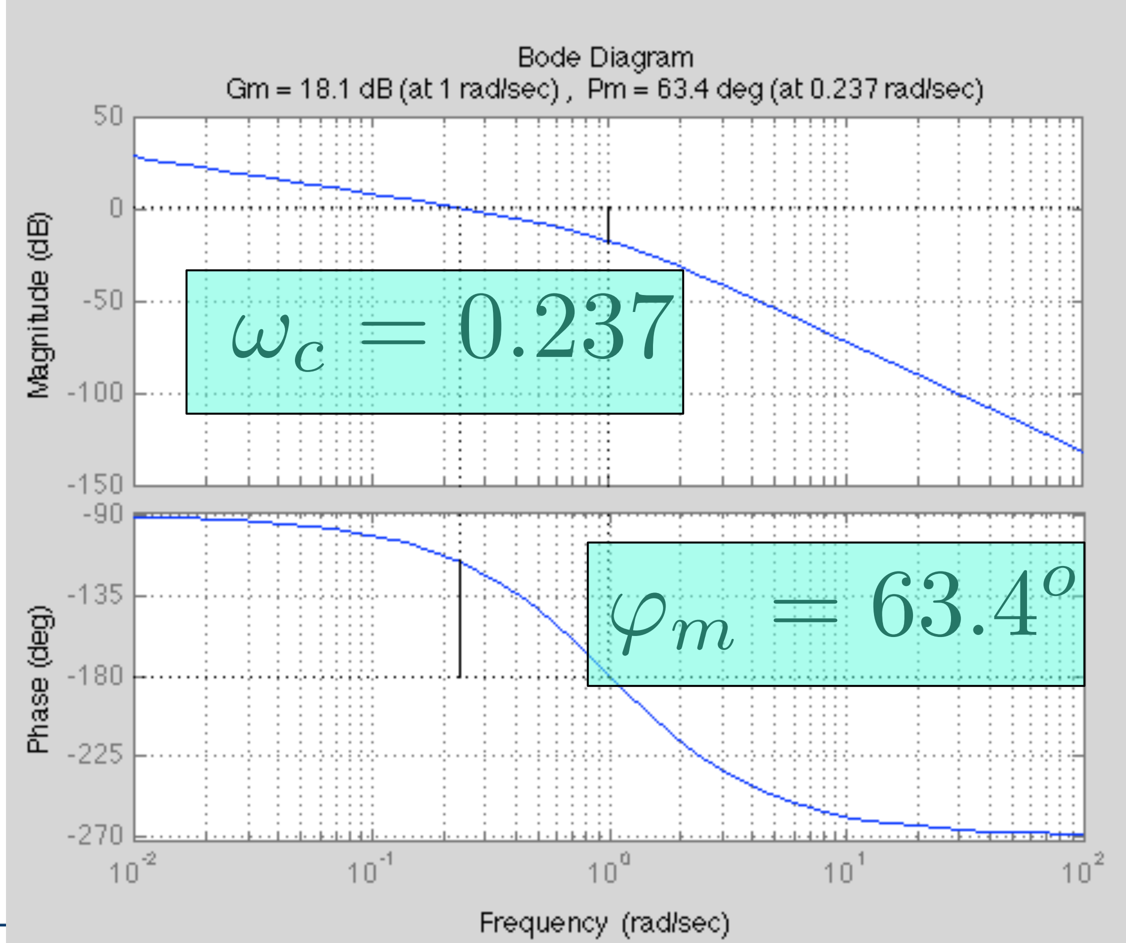
Cancelliamo un altro polo in bassa frequenza ed aggiungiamo un polo per la ***realizzabilità*** del regolatore (***grado relativo non negativo***).

```
R = 0.025*tf(conv([10 1],[5 1]),conv([1 0],[1 1]))
L = R*G
margin(L)
```

$$R(s) = \frac{0.025}{s}\frac{(1+10s)(1+5s)}{(1+s)}$$

$$G(s) = \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

$$L(s) = \frac{0.25}{s}\frac{1}{(1+s)^2}$$



Andiamo a testare il sistema sugli ingressi per cui lo abbiamo progettato:

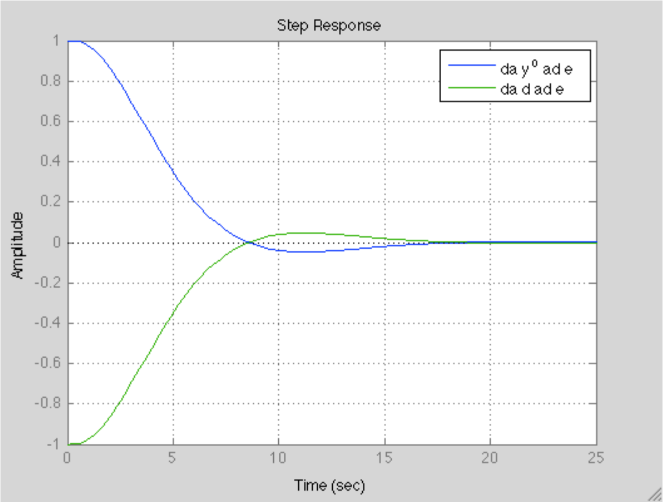
$$|e_\infty| \leq 0.1 \quad \text{per} \quad \begin{aligned} y^o(t) &= A\text{sca}(t) \\ d(t) &= B\text{sca}(t) \end{aligned}$$

$$L(s) = \frac{0.25}{s}\frac{1}{(1+s)^2}$$

Simuliamo la **risposta dell'errore agli ingressi y° e d**. La funzione di trasferimento da usare è in entrambi i casi quella di sensitività (a meno del segno).

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$$

```
S = 1/(1+L)
figure, step(S,-S)
legend('da y^o ad e','da d ad e')
```



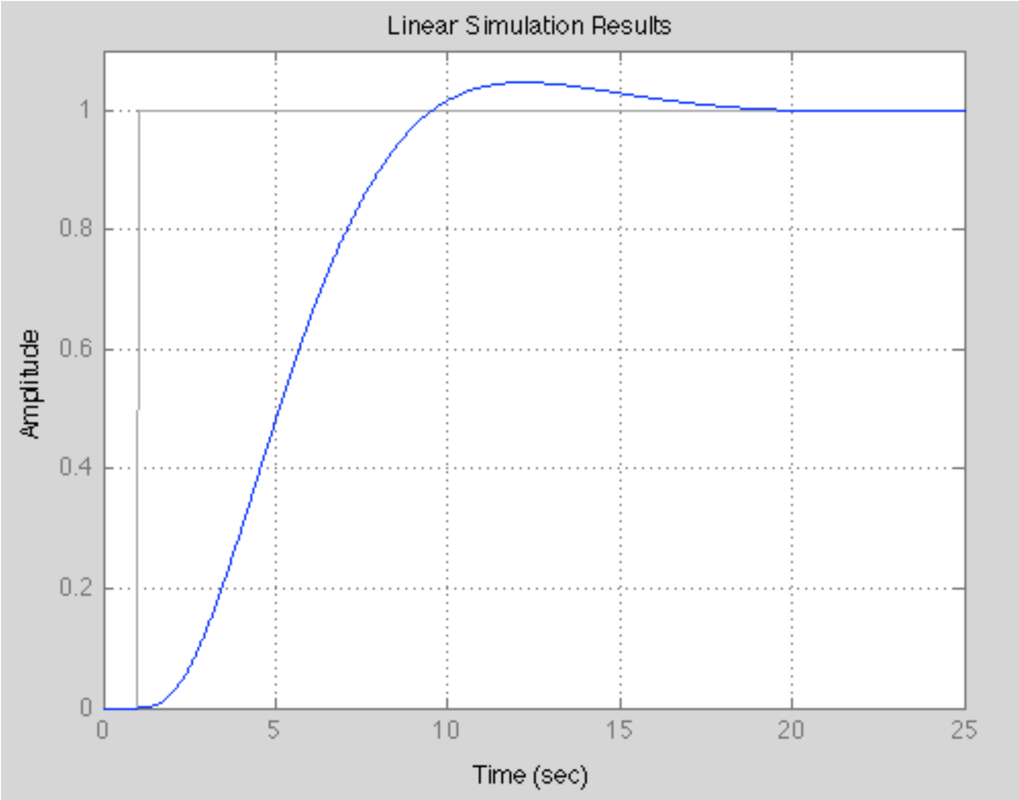
Risposta al gradino

Simuliamo anche il movimento dell'uscita del sistema a fronte di un riferimento a scalino.

Stavolta la fdt di riferimento è quella di sensitività complementare.

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

```
F = L*S
t = 0:0.01:25;
y = zeros(size(t));
y(t>1) = 1; % indexing trick
lsim(F,y,t)
axis([0 25 0 1.1])
```



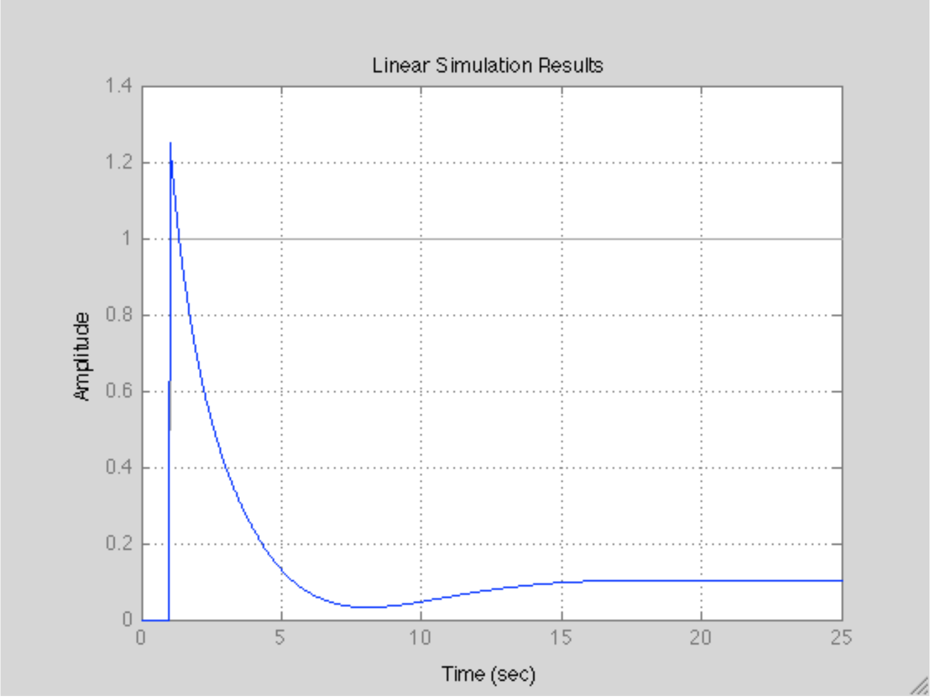
Quanto controllo usiamo?

Da ultimo osserviamo come viene sollecitato il controllore, cioè la variabile u, da uno scalino sul riferimento.

La fdt di riferimento è quella di sensitività del controllo.

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)} = R(s)S(s)$$

```
Q = R*S
t = 0:0.01:25;
y = zeros(size(t));
y(t>1) = 1; % indexing trick
lsim(Q,y,t)
axis([0 25 0 1.1])
```



Esercizio:
Regolatore PID

Problema

Funzione di trasferimento del sistema da controllare.

$$G(s) = 5\frac{0.1s+1}{(10s+1)^2}e^{-0.01s}$$

```
G = 5*tf([0.1 1],conv([10 1],[10 1]))
G.OutputDelay = 0.01
```

Stavolta la struttura del regolatore la consideriamo nota, ed è quella di un PID (*ideale*, sappiamo che quello reale ha un polo in più per la realizzabilità dell'azione derivativa):

$$R_{PID}(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

Requisiti e progetto statico

$$|e_\infty| \leq 0.2 \qquad y^o(t) = \mathrm{ram}(t)$$

$$\omega_c \geq 2$$

$$\varphi_m \geq 45^o$$

Possiamo soddisfare i vincoli sul transitorio esaurito semplicemente con l'integratore presente nel PID e un guadagno almeno pari ad 1 (K_I >= 1 , K_P=K_D=0, teorema del valore finale).

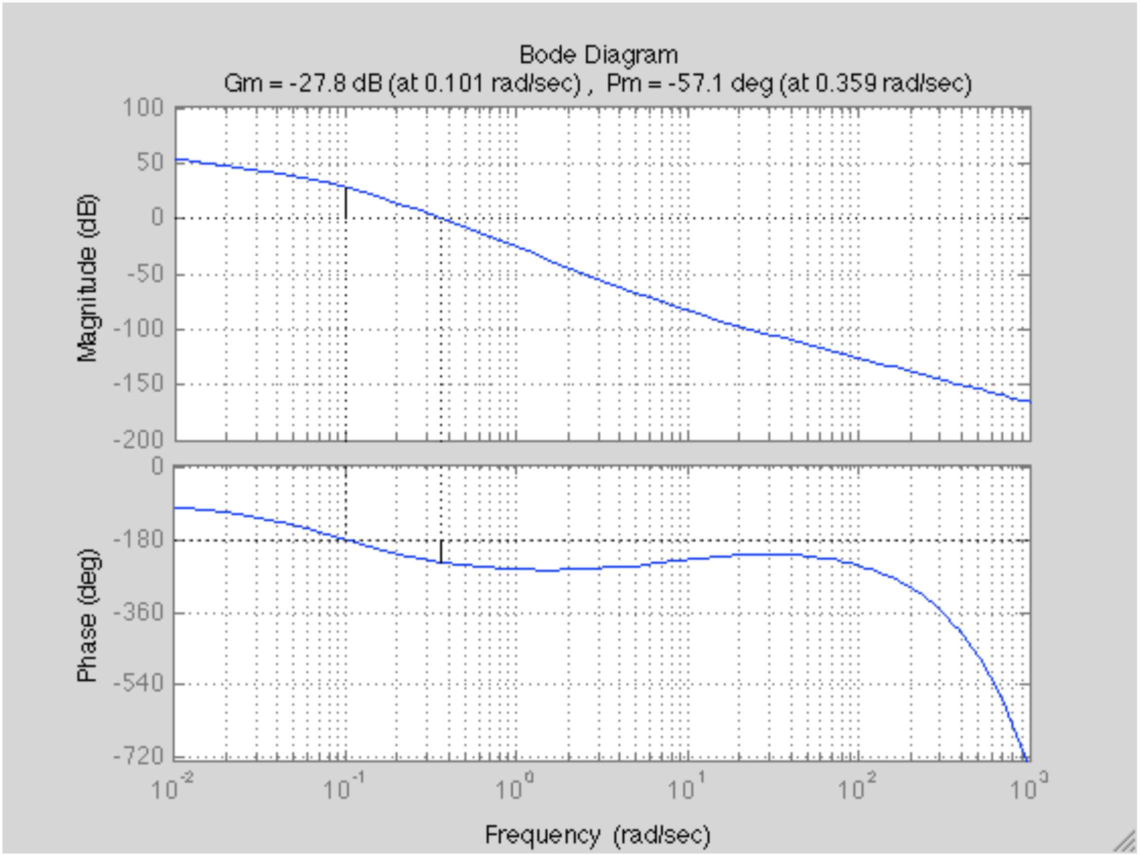
$$R_{PID}(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

Progetto statico

s = tf('s') % altro modo per definire la variabile di Laplace e le fdt
R = 1/s
L = R*G
margin(L)

$$\omega_c \geq 2$$

$$\varphi_m \geq 45^o$$



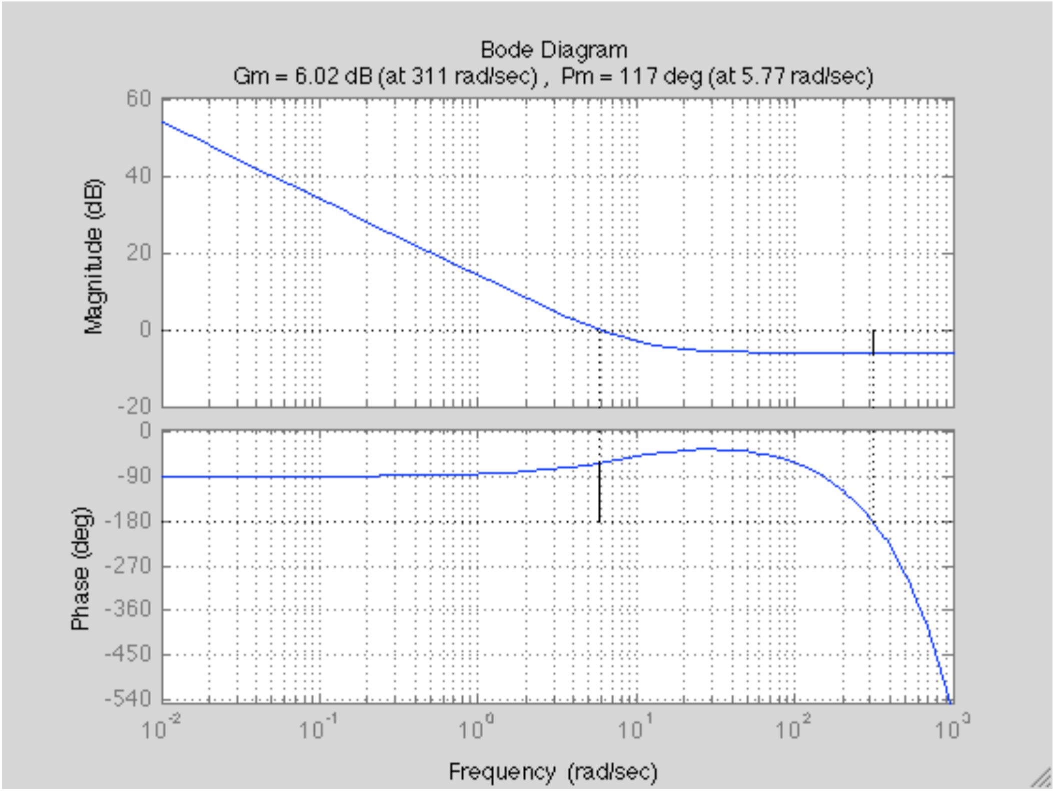
Progetto dinamico

Possiamo cancellare i poli di G(s) sfruttando i gradi di libertà che ci sono rimasti nel controllore PID (gli zeri).

$$R_{PID}(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

```
R = tf(conv([10 1],[10 1]),[1 0])
L = R*G
margin(L)
```

Tanto basta per soddisfare abbondantemente i vincoli.

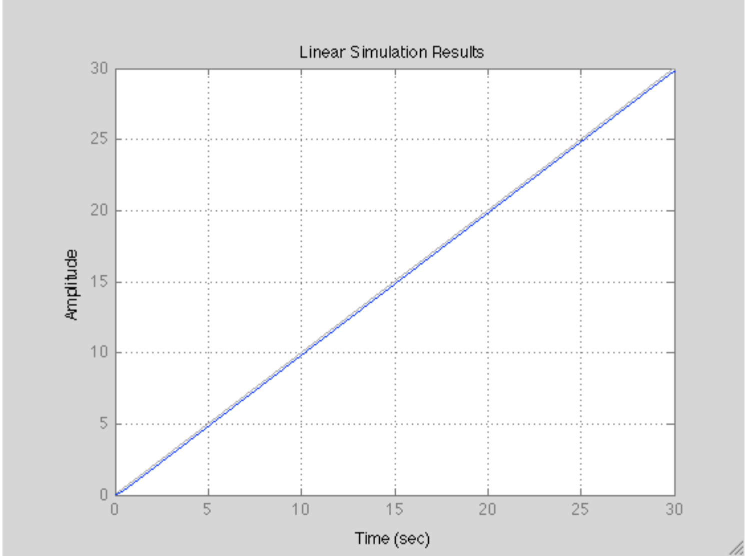


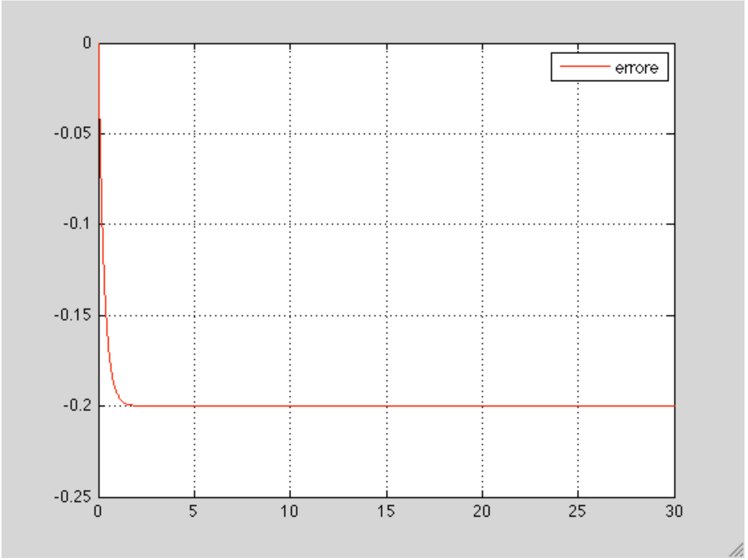
$$\omega_c \geq 2$$

$$\varphi_m \geq 45^o$$

Risposta del sistema di controllo

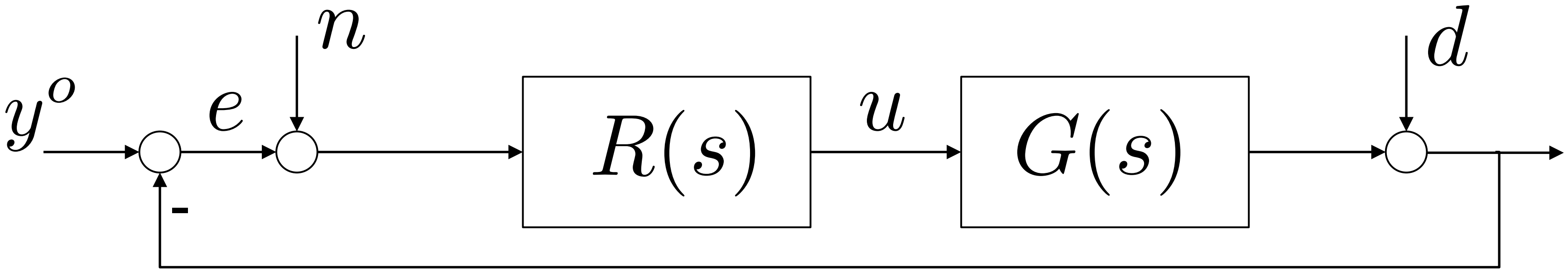
```
G.OutputDelay = 0.01
L = ss(R*G) % ss per calcolare una
% realizzazione approssimata di L
% a causa del ritardo in G(s)
F = L/(1+L)
t = 0:0.01:30;
yo = t; % rampa unitaria
figure
lsim(F,yo,t)


y = lsim(F,yo,t);
figure
plot(t,yo'-y,'r')
legend('errore')
```





Esercizio:
La robustezza del sistema di controllo

Esercizio



Funzione di trasferimento del processo da controllare:

$$G(s) = 10\frac{1+10s}{(1+20s)(1+s)}$$

Vogliamo che vengano rispettate le specifiche:

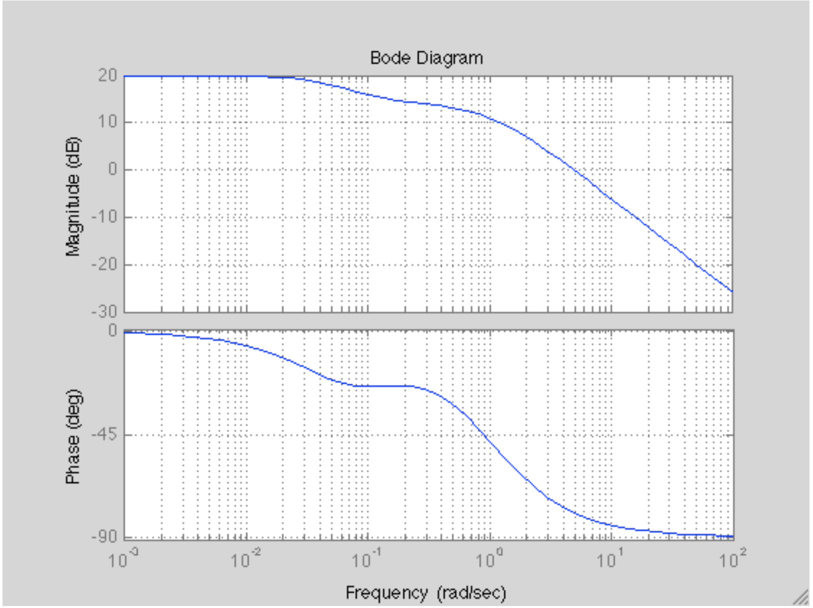
$$|e_\infty| \le 0.2 \quad \text{con} \quad y^o(t) = \mathrm{ram}(t) \quad \varphi_m \ge 45^o$$

$$|e_\infty| \le 0.1 \quad \text{con} \quad d(t) = \sin(0.1t) \quad \mu_m \ge 4$$

Progettare il regolatore e valutare le prestazioni di attenuazione del disturbo e di inseguimento del riferimento. Cosa accade quando il disturbo è a una frequenza leggermente diversa?

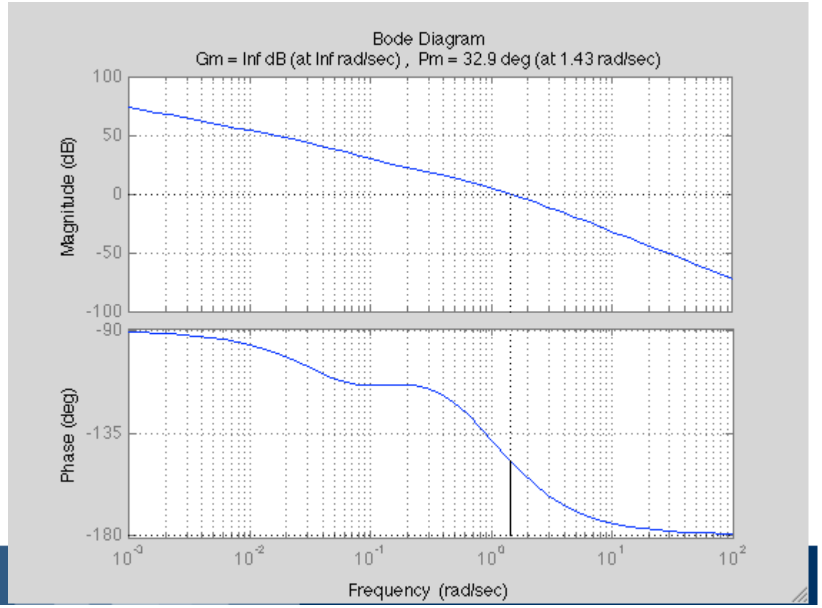
Progetto statico

```
numG = 10*[10 1];
denG = conv([20 1],[1 1]);
G = tf(numG,denG)
bode(G)
R = tf(0.5,[1 0])
L = R*G
figure
margin(L)
```



Per la prestazione statica su y°
basta un regolatore di tipo 1 con
guadagno di 0.5.
Per la prestazione statica su d bisogna che

$$|L(j0.1)|_{dB} > 20$$



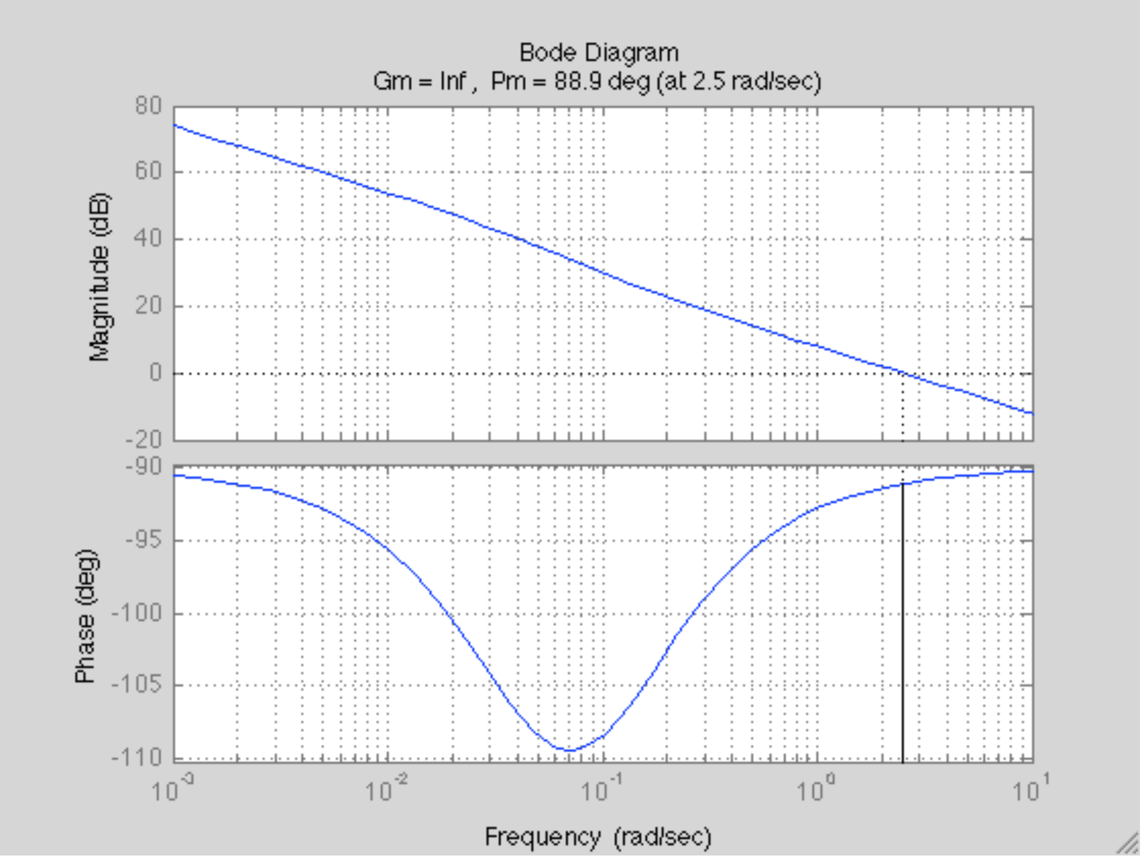
Progetto dinamico

Per raggiungere margine di fase e di guadagno voluti basta cancellare il polo più ad alta frequenza (in s=-1) di G(s).

Il regolatore così ottenuto è:

$$R(s) = 0.5\frac{1+s}{s}$$

```
R = tf(0.5*[1 1],[1 0])
L = R*G
figure
margin(L)
```

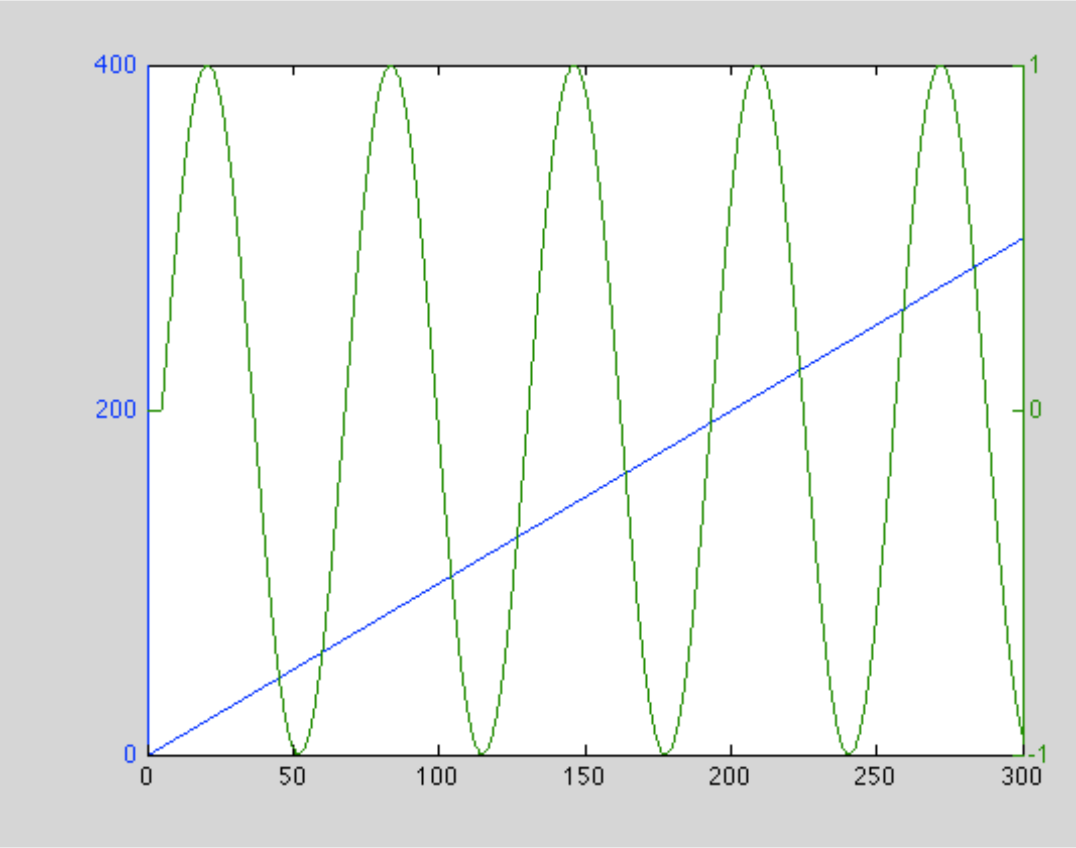


Risposta del sistema di controllo

Plottiamo la risposta al riferimento a rampa e, contemporaneamente, al disturbo a scalino.

Costruzione dei segnali:

```
t = 0:0.01:300;
yo = zeros(size(t));
d = yo;
yo(t>1) = t(t>1) - 1;
d(t>100) = sin(0.1*(t(t>100)-100));
figure
plotyy(t,yo,t,d)
```



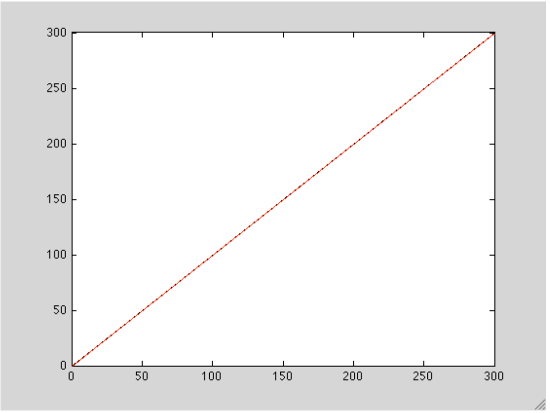
Valutazione della risposta

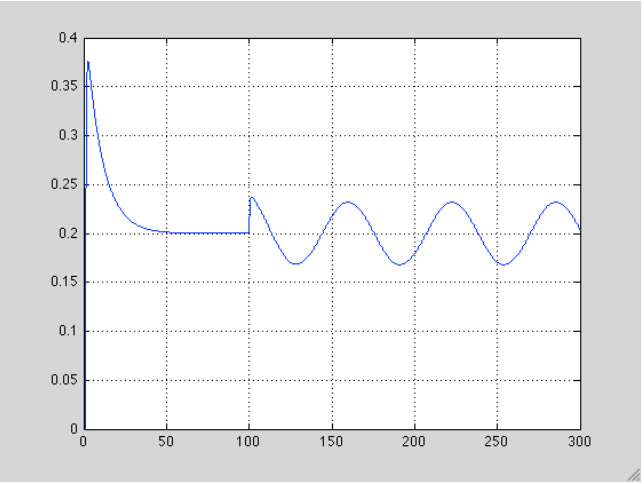
Calcoliamo la risposta y del sistema agli ingressi, sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti.

Da y° a y usiamo la funzione di sensitività complementare: $$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

Da d a y usiamo la funzione di sensitività (cambiata di segno!) $$S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$$

```
F = L/(1+L)
menoS = -1/(1+L)
y_yo = lsim(F,yo,t);
y_d = lsim(menoS,d,t);
y = y_yo+y_d;
figure
plot(t,yo,'k',t,y,'r')
figure
plot(t,yo'-y,'b'), grid on
```





Cosa succede cambiando la frequenza del disturbo d tra 0.01 e 1? Perché?