

Filtraggio H_∞ a tempo discreto

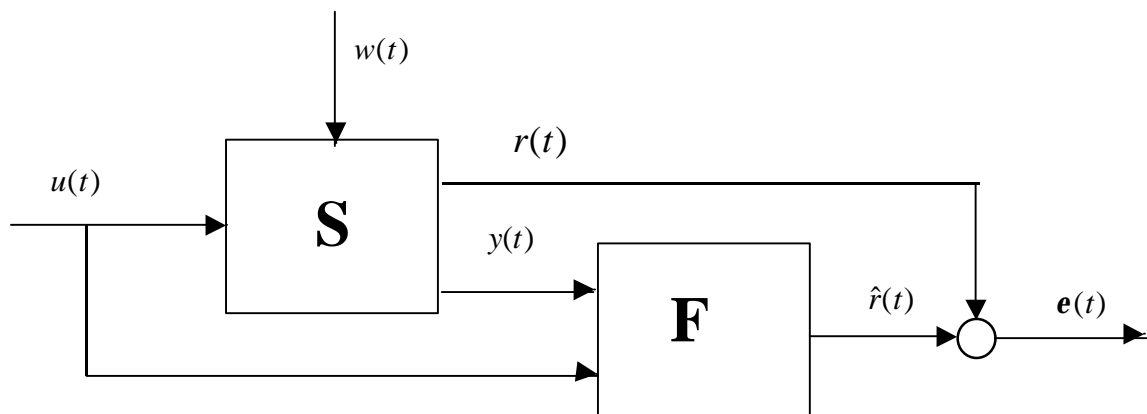
P.Colaneri

Politecnico di Milano, Italia

Sommario

- 1) I problemi di filtraggio, regolarizzazione, predizione, deconvoluzione*
- 2) Filtraggio alla Wiener (H_2)*
- 3) Approccio frequenziale al filtraggio H_∞*
- 4) Approccio diretto (equazione di Riccati)*
- 5) Esempi*
- 6) Conclusioni*

Il problema di filtraggio



Dati $u(t)$ e $y(t)$ determinare una stima di $r(t)$ in modo da “rendere piccolo” $e(t)$

Sono necessari:

- . un **modello**
- . un **criterio**

Classificazione dei modelli

- a tempo continuo
- a tempo discreto
- ibridi

- lineari
- non lineari

- nel dominio della frequenza
- nel dominio del tempo (variabili di stato)

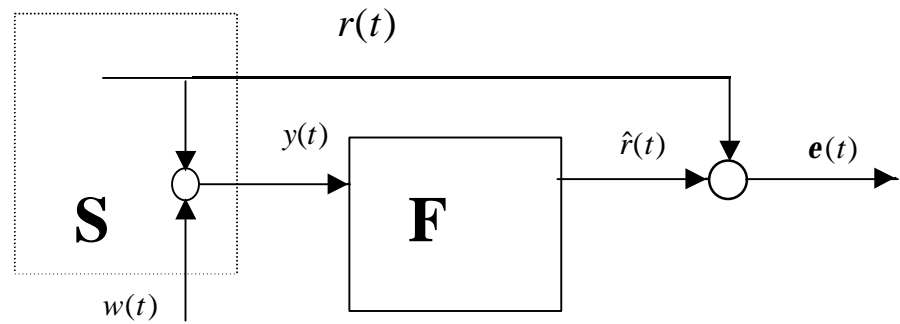
- stazionari
- non stazionari

- deterministici
- stocastici

Alcuni problemi tipici

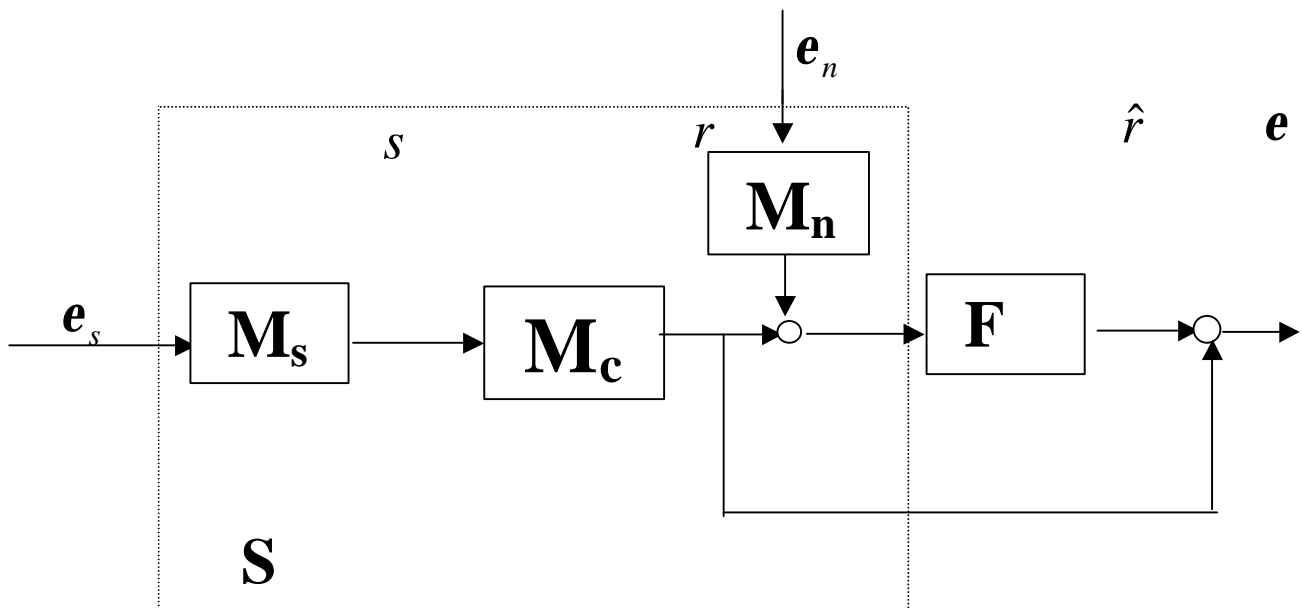
- deconvoluzione
- equalizzazione
- ricostruzione dello stato per il controllo
- stima parametrica ricorsiva
- filtraggio adattativo
- stima di sinusoidi in rumore
- fusione di misure ridondanti
- cancellazione del rumore
- predizione
- diagnosi di malfunzionamenti
- smoothing

Problema di filtraggio classico



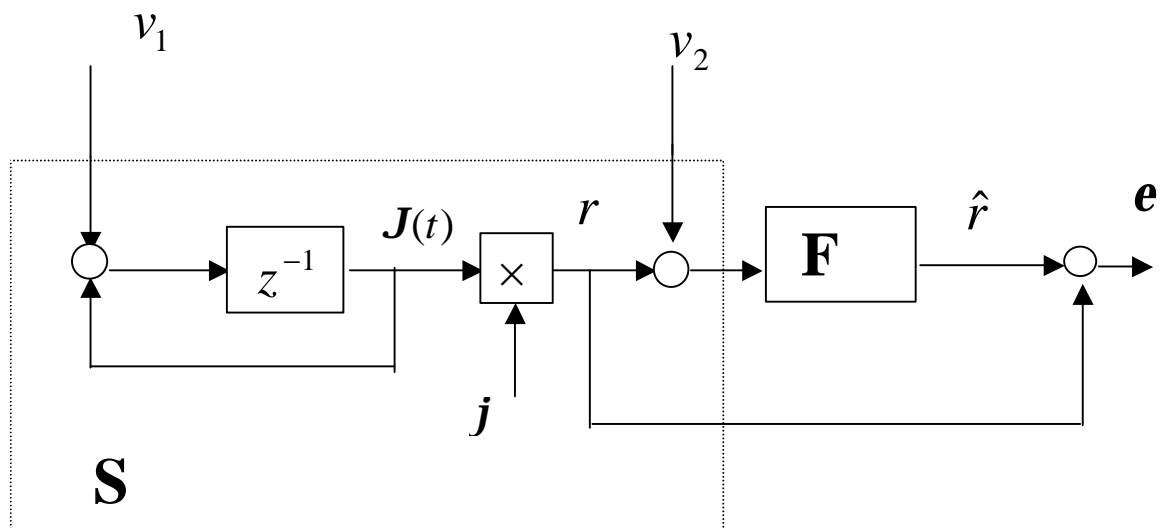
E' impossibile risolvere il problema senza informazioni a priori sul segnale e il rumore.

Equalizzazione



Ricostruzione di un segnale ricevuto attraverso un canale di trasmissione rumoroso. Si può riformulare il problema nello schema generale pur di aggiungere il modello del canale che descrive il legame tra il segnale s trasmesso e il segnale r ricevuto.

Filtraggio adattativo

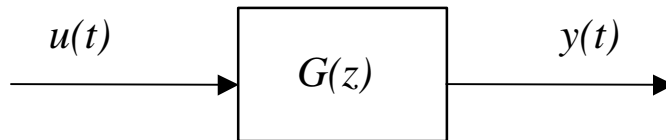


Modello di regressione lineare. Il rumore v_1 tiene conto delle fluttuazioni del parametro $\theta(t)$. Il rumore v_2 tiene conto dell'incertezza sul modello e sulle misure. Si vuole stimare la componente non rumorose delle misure.

Approcci al problema del filtraggio

- in assenza di incertezza
 - ⇒ filtraggio in anello aperto
- con incertezza sullo stato iniziale
 - ⇒ stima di $x(0)$ + filtraggio anello aperto
 - ⇒ ricostruzione asintotica
- in presenza di disturbi
 - ⇒ minimizzazione norma H_2
 - ⇒ **minimizzazione norma H_∞** ⇒
 - approccio misto H_2/H_∞
- in presenza di modello incerto
 - ⇒ filtraggio robusto

Richiami: Norma H_2 e norma H_∞



$G(z)$ funzione di trasferimento (asint. stabile)

$\Gamma_i(t)$ risposta impulsiva dovuta all' i -esimo ingresso

- Norma H_2

$$\begin{aligned} \|G(z)\|_2^2 &= \frac{1}{2p} \int_{-p}^p \text{tr}(G(e^{jJ})G'(e^{-jJ}))dJ = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{t=0}^{\infty} \text{tr}(\Gamma_i(t)\Gamma_i'(t)) \end{aligned}$$

- Norma H_∞

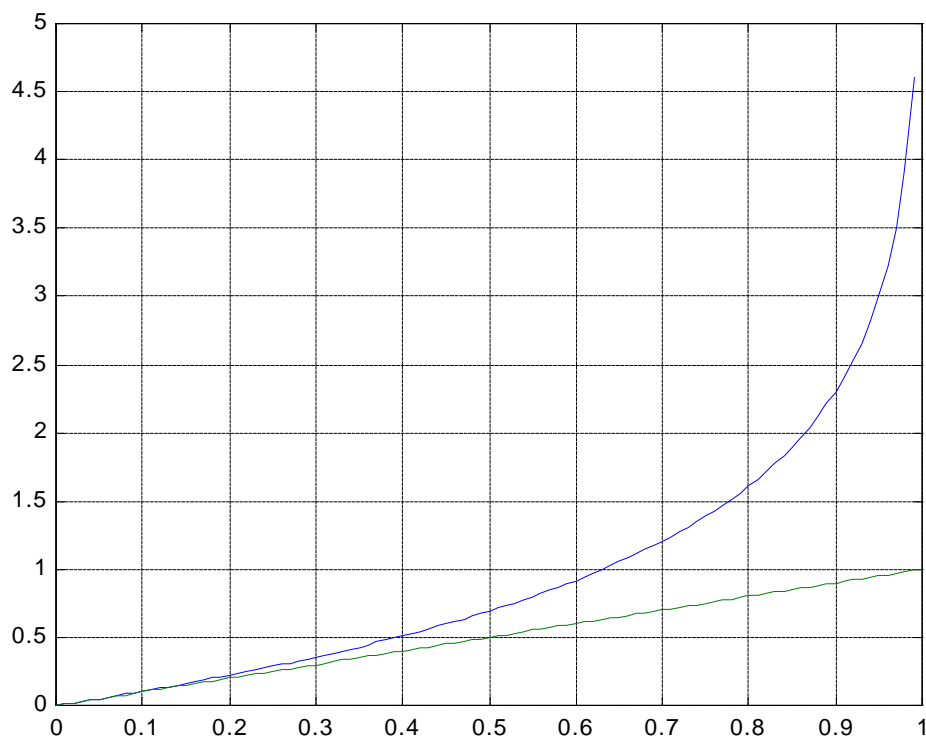
$$\begin{aligned} \|G(z)\|_\infty &= \sup_{J \in [0, p]} \sqrt{\mathbf{I}_{\max}(G(e^{jJ})G'(e^{-jJ}))} = \\ &= \sup_{0 \neq u \in l_2} \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} \end{aligned}$$

Entropia

$$I_g = \frac{-\mathbf{g}^2}{2\mathbf{p}} \int_{-p}^p \log \det \left[I - \frac{G(e^{-jJ})' G(e^{jJ})}{\mathbf{g}^2} \right] d\mathbf{J}$$

E' ben definita se $\|G(z)\|_\infty < \gamma$. Può essere riscritta come

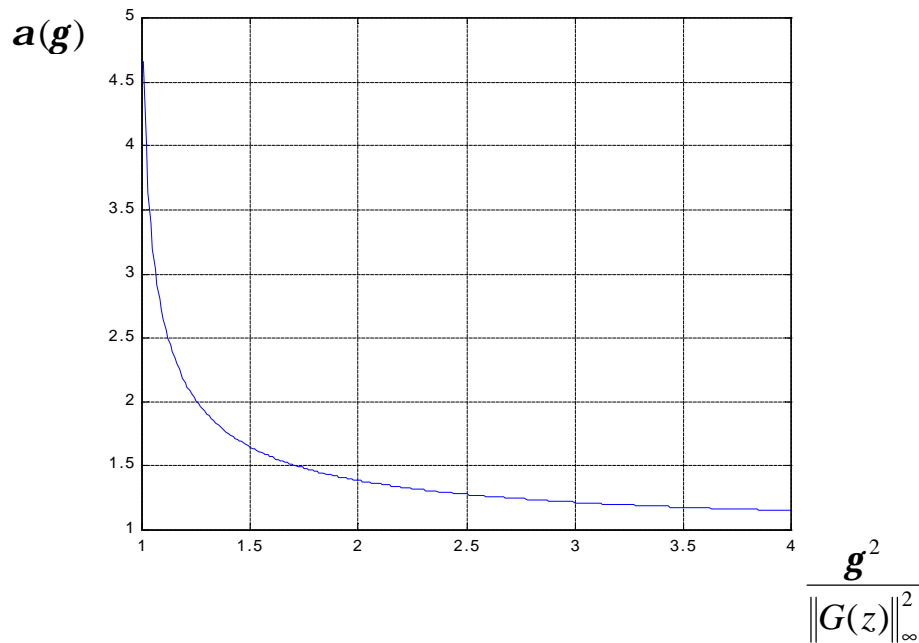
$$I_g = \frac{1}{2\mathbf{p}} \int_{-p}^p \sum_i f(\mathbf{s}_i^2 [G(e^{jJ})]) d\mathbf{J}, \quad f(x) = -\mathbf{g}^2 \log(1 - \mathbf{g}^{-2} x)$$



Risulta:

$$\|G(z)\|_2^2 \leq I_g \leq \mathbf{a}(g) \|G(z)\|_2^2$$

$$\mathbf{a}(g) = \frac{g^2}{\|G(z)\|_\infty^2} \log \left[\frac{g^2}{g^2 - \|G(z)\|_\infty^2} \right]$$



Si nota che $\alpha(\gamma) \rightarrow 1$ per $\gamma \rightarrow \infty$. Quindi $I_\gamma \rightarrow \|G(z)\|_2^2$

Note:

$$r_i = \frac{\mathbf{g}^2}{\mathbf{s}_i^2(G(e^{j\mathbf{J}}))} \geq \mathbf{b} = \frac{\mathbf{g}^2}{\|G(z)\|_\infty^2} \geq 1, \quad \log(1 - r_i^{-1}) \geq \frac{\mathbf{b}}{r_i} \log(1 - \mathbf{b}^{-1})$$

$$I_g = \frac{1}{2\mathbf{p}} \int_{-p}^p \sum_i -\mathbf{g}^2 \log[1 - r_i^{-1}] d\mathbf{J} \leq -\mathbf{b} \log(1 - \mathbf{b}^{-1}) \|G(z)\|_2^2$$

Fattorizzazione spettrale:

$$T(z^{-1})'T(z) = I - \mathbf{g}^{-2}G(z^{-1})'G(z) \quad \text{positive sul cerchio}$$

Quindi:

$$I_g = \frac{-\mathbf{g}^2}{2\mathbf{p}} \int_{-p}^p \log \det [T(e^{-j\mathbf{J}})'T(e^{j\mathbf{J}})] d\mathbf{J} =$$

$$= \frac{-\mathbf{g}^2}{\mathbf{p}} \int_{-p}^p \log |\det T(e^{j\mathbf{J}})| d\mathbf{J} =$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{-\mathbf{g}^2}{\mathbf{p}} \int_{-p}^p \log |\det T(e^{j\mathbf{J}})| \frac{r^2}{(r - e^{j\mathbf{J}})^2} d\mathbf{J}$$

Grazie alla formula di Poisson si ha:

$$I_g = -2\mathbf{g}^2 \log \det [T(\infty)]$$

Il fattore spettrale $T(z)$ può essere dato dalla soluzione stabilizzante e Riccati dell'analisi H_∞ . Se $G(z)=(A,B,C,D)$, si ha:

$$T(z) = \mathbf{g}^{-1}V^{1/2} \left(I - V^{-1} (B'PA + D'C)(zI - A)^{-1}B \right), \quad V = \mathbf{g}^2I - D'D - B'PB$$

$$P = A'PA + C'C + (A'PB + C'D)V^{-1}(B'PA + D'C), \quad V > 0$$

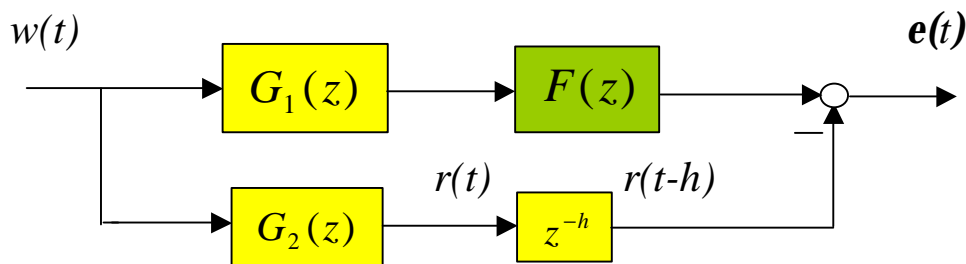
Alcuni Riferimenti Bibliografici

- R.E. Kalman, “A new approach to linear filtering and prediction
Trans. of the ASME - J. of Basic Eng., 35-45, 1960.
- A.H. Jazwinski, *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press, New York, 1970.
- 0
- T. Kailath, “A view of three decades of linear filtering theory”, *IEEE Trans. on Information Theory*, IT-20, 146-181, 1974.
- A. Gelb, *Applied Optimal Estimation*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1974.
- B.D.O. Anderson and J.B. Moore, *Optimal Filtering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1979.
- A. Ahlen, M. Sternad, *Derivation and design of Wiener filters using polynomial equations*, in *Control and Dynamic Systems: Digital Signal Processing Techniques and Applications*, C.T. Leondes Ed., Academic Press, New York, 1994.

Il problema in H_2

Sistema tempo-invariante a tempo discreto:

$$\Sigma : \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bw(t) \\ y(t) = Cx(t) + Dw(t) \\ r(t) = Lx(t) + Mw(t) \end{cases} \quad \textcircled{R} \quad \begin{aligned} G_1(z) &= C(zI - A)^{-1}B + D \\ G_2(z) &= L(zI - A)^{-1}B + M \end{aligned}$$



Il problema consiste nel trovare uno stimatore stabile e causale $F(z)$ tale che

- $F(z)G_1(z) - z^{-h}G_2(z)$ è stabile
- $\|F(z)G_1(z) - z^{-h}G_2(z)\|_2$ è minimizzata

Il numero intero h seleziona il problema specifico: $h > 0$ (fixed lag smoothing), $h < 0$ (predizione), $h = 0$ (filtro). $L = 0$ significa deconvoluzione!

Fattorizzazione spettrale

Parte causale (stabile)

- $\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle = \langle f_+ + f_-, f_+ + f_- \rangle = \|f_-\|_2^2 + \|f_+\|_2^2$

Fattorizzazione spettrale

- $G_1(z)G_1(z)^{\sim} = \Omega(z)\Omega(z)^{\sim}$

$$\begin{aligned} \|F(z)G_1(z) - z^{-h}G_2(z)\|_2^2 &= (F(z)G_1(z) - z^{-h}G_2(z))(G_1(z)^{\sim}F(z)^{\sim} - z^hG_2(z)^{\sim}) = \\ &\|F(z)\Omega(z) - z^{-h}G_2(z)G_1(z)^{\sim}\Omega(z)^{\sim^{-1}}\|_2^2 + G_2(z)\left(I - G_1(z)^{\sim}(G_1(z)G_1(z)^{\sim})^{-1}G_1(z)\right)G_2(z)^{\sim} \end{aligned}$$

In conclusione:

$$F(z) = \left(z^{-h}G_2(z)G_1(z)^{\sim}\Omega(z)^{\sim^{-1}} \right) \Omega(z)^{-1}$$

Si noti che $W(z)$ non dipende dal L e M , cioè dalla combinazione lineare dello stato e dell'ingresso da stimare.

Fattorizzazione spettrale via equazione di Riccati

Soluzione P^30 stabilizzante della **ARE**

$$P = APA' - (APC' + BD')(DD' + CPC')^{-1}(CPA' + DB') + BB'$$

$$B_F = (APC' + BD')(DD' + CPC')^{-1}$$

$$D_F = (LPC' + MD')(DD' + CPC')^{-1}$$

$$A_F = A - B_F C$$

Allora (fattorizzazione spettrale):

$$G_1(z)G_1(z)^{\sim} = \Omega(z)\Omega(z)^{\sim}$$

$$\Omega(z) = (I + C(zI - A)^{-1}B_F)(DD' + CPC')^{1/2}$$

Note:

Sappiamo dalla teoria che l'equazione di Riccati del filtro di Kalman ammette la soluzione stabilizzante, che è semidefinita positiva, sotto ipotesi molto blande. Una condizione sufficiente è che $DD' > 0$, la coppia (A, C) rivelabile e il modulo degli zeri invarianti di (A, B, C, D) diversi da uno.

Note:

L'equazione di Riccati si può scrivere nel modo seguente:

$$P = APA' - B_F(CPC' + DD')B_F' + BB'$$

Quindi:

$$(zI - A)P(z^{-1}I - A') + AP(z^{-1}I - A') + (zI - A)PA' + B_F(CPC' + DD')B_F' = BB'$$

Indicando con $\Psi = (zI - A)^{-1}$ e $\Psi^{\sim} = (z^{-1}I - A')^{-1}$, e $H = (CPC' + DD')$ si ha:

$$P + \Psi AP + PA' \Psi^{\sim} + \Psi B_F W B_F' \Psi^{\sim} - \Psi BB' \Psi^{\sim} = 0.$$

Premoltiplicando per C, postmoltiplicando per C' e ricordando la definizione di B_F si ha:

$$H - DD' + C\Psi APC' + CPA' \Psi^{\sim} C + C\Psi(APC' + BD')H^{-1}(CPA' + DB')C' \Psi^{\sim} - C\Psi BB' \Psi^{\sim} C' = 0.$$

Formando il quadrato segue che:

$$G_1 G_1^{\sim} = (C\Psi B + D)(B' \Psi^{\sim} C' + D') = (C\Psi(APC' + BD')H^{-1/2} + H^{1/2})(H^{-1/2}(CPA' + DB') + H^{1/2}) = (I + C\Psi B_F)H(I + B_F' \Psi^{\sim} C'),$$

che è la tesi.

Filtro H_2 (Filtro di Kalman)

$$F(z) = D_F + (L - D_F C)(zI - A_F)^{-1} B_F$$

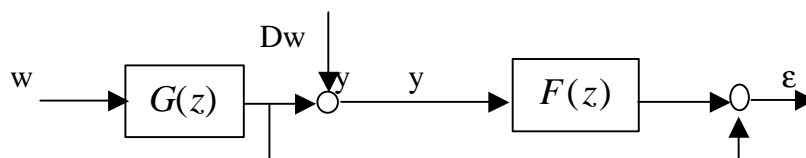
$$\hat{x}(t+1) = A\hat{x}(t) + B_F e(t)$$

$$\hat{r}(t) = L\hat{x}(t) + D_F e(t)$$

$$e(t) = y(t) - C\hat{x}(t)$$

Robustezza del filtro di Kalman:

- Caso speciale: $C=L, M=0$ (filtraggio alla Wiener).



- Il filtro di Kalman assicura

$$\|T_{ew}\|_{\infty} = \|F(z)(G(z) + D) - G(z)\|_{\infty} \leq 2\bar{S}(D)$$

Note:

Supponiamo per facilità che $DD^T=I$ e $DB^T=0$. Basta osservare che

$F(z)(G(z)+D-G(z))=I-H^{-1/2}\Omega^{-1}(z)D$. Inoltre è $\Omega(z)\Omega(z)^T=I+C\Psi BB^T\Psi^T B^T$, da cui $\|\Omega^{-1}(z)\|_{\infty}<1$.

Infine, notiamo che $\|H^{-1/2}\|<1$ e $\|D\|=1$. Quindi, si ha

$\|F(z)(G(z)+D-G(z))\|_{\infty}=\|I-H^{-1/2}\Omega^{-1}(z)D\|_{\infty}\leq 1+\|H^{-1/2}\Omega^{-1}(z)D\|_{\infty}\leq 2$, che è la tesi.

Osservazione (Kalman ® H₂)

$$\Sigma: \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + \mathbf{x}_1(t) \\ y(t) = Cx(t) + \mathbf{x}_2(t) \\ r(t) = Lx(t) \end{cases}$$

dove $[\xi_1, \xi_2]$ è un rumore bianco a media nulla e varianza

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{12}' & W_{22} \end{bmatrix} \geq 0, \quad W_{22} > 0$$

Il costo da minimizzare è:

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} E[\mathbf{e}(t)' \mathbf{e}(t)]$$

Ponendo

$$\hat{W} = W_{11} - W_{12}W_{22}^{-1}W_{12}' \geq 0, \quad B = \begin{bmatrix} \hat{W}^{1/2} & W_{12}W_{22}^{-1/2} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & W_{22}^{1/2} \end{bmatrix}$$

il sistema può essere riscritto come:

$$\Sigma: \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bw(t) \\ y(t) = Cx(t) + Dw(t) \\ r(t) = Lx(t) + Mw(t) \end{cases} \quad \rightarrow \quad J = \|F(z)G_1(z) - G_2(z)\|_2^2$$

Predittore H_2 ad h -passi

$$F(z) = zLA^{h-1}(zI - A_F)^{-1}B_F,$$

$$\hat{x}(t+1) = A\hat{x}(t) + B_F e(t)$$

$$\hat{r}(t+h) = LA^{h-1}\hat{x}(t+1)$$

$$e(t) = y(t) - C\hat{x}(t)$$

Si noti che il predittore ottimo in H_2 non dipende da M , in quanto i valori futuri del disturbo non giocano alcun ruolo.

Smoothing H_2 ad h-passi

$$F(z) = z^{-h} L(zI - A_F)^{-1} B_F + \sum_{i=0}^h K_i z^{-i} (I - C(zI - A_F)^{-1} B_F),$$

I guadagni sono dati da:

$$K_h = D_F$$

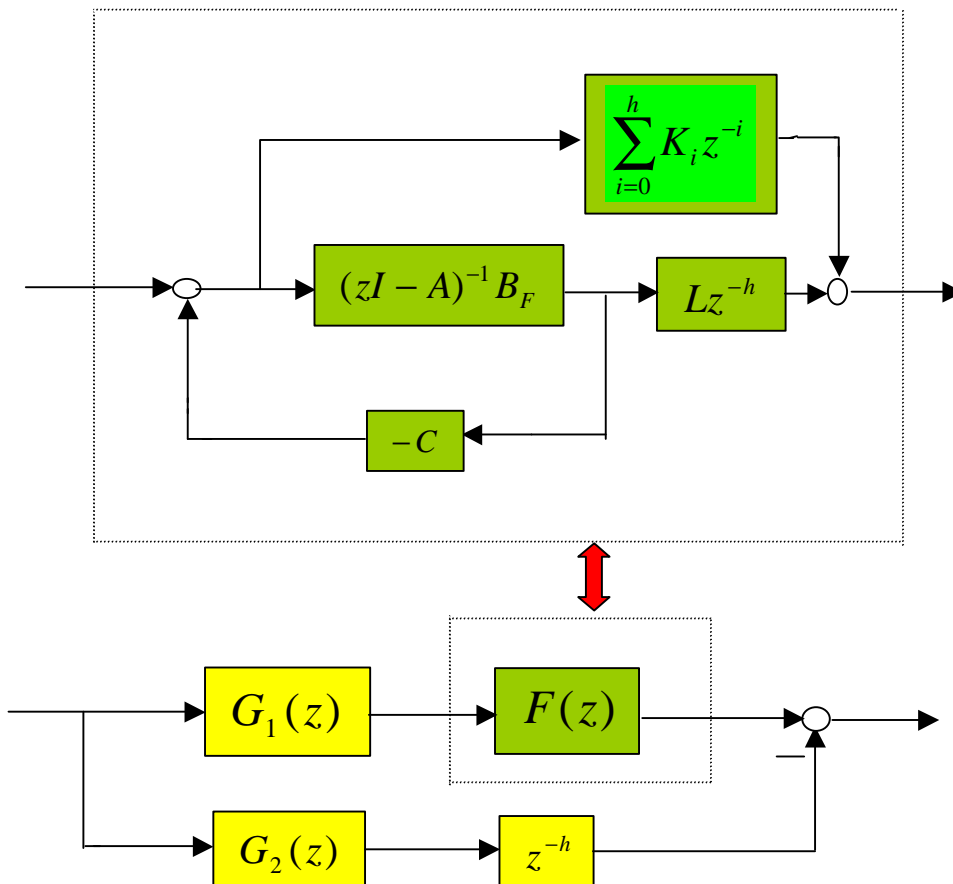
$$K_i = (LPA_F' + M(B - B_F C)') A^{h-i-1} C' (DD' + CPC')^{-1}, \quad i = 0, 1, \dots, h-1$$

$$\hat{x}(t+1) = A\hat{x}(t) + B_F e(t)$$

$$\hat{r}(t-h) = L\hat{x}(t-h) + \sum_{j=0}^h K_j e(t-j)$$

$$e(t) = y(t) - C\hat{x}(t)$$

Si noti che per $h=0$ si ritrova il filtro di Kalman.



Gioco alle differenze

$$J = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{e}(t)' \mathbf{e}(t) - g^2 \sum_{t=0}^{\infty} w(t)' w(t) < 0, \quad \forall w$$

Il progettista tende a minimizzare il costo quadratico mentre la “natura” (disturbi) tende a massimizzarlo.

Formulazione H_{∞}

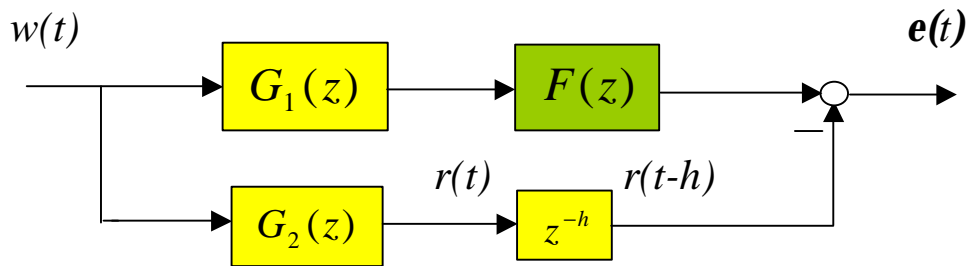
$$\sup_{\substack{w \neq 0 \\ w \in l_2}} \frac{\|\mathbf{e}(t)\|_2^2}{\|w(t)\|_2^2} < g^2$$

cioè la norma infinita della funzione di trasferimento dai disturbi all'errore di stima minore di g !

Il problema in H_{∞}

Sistema tempo-invariante a tempo discreto:

$$\Sigma : \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bw(t) \\ y(t) = Cx(t) + Dw(t) \\ r(t) = Lx(t) + Mw(t) \end{cases} \quad \textcircled{R} \quad \begin{aligned} G_1(z) &= C(zI - A)^{-1}B + D \\ G_2(z) &= L(zI - A)^{-1}B + M \end{aligned}$$



Il problema consiste nel trovare uno stimatore stabile e causale $F(z)$ tale che

- $F(z)G_1(z) - z^{-h}G_2(z)$ è stabile
- $\|F(z)G_1(z) - z^{-h}G_2(z)\|_{\infty} < \mathbf{g}$

Il numero intero h seleziona il problema specifico: $h > 0$ (fixed lag smoothing), $h < 0$ (predizione), $h = 0$ (filtro). $L = 0$ significa deconvoluzione!

Il sistema esteso

Si può scrivere:

$$(F(z)G_1(z) - z^{-h}G_2(z))(F(z)G_1(z) - z^{-h}G_2(z))^\sim - \mathbf{g}^2 < 0, \quad |z|=1$$

$$[F(z) \quad -I] \begin{bmatrix} G_1(z) & 0 \\ z^{-h}G_2(z) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\mathbf{g}^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1(z)^\sim & z^h G_2(z)^\sim \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(z)^\sim \\ -I \end{bmatrix} < 0 \quad |z|=1$$

Sistema esteso

$$G(z) = \begin{bmatrix} G_1(z) & 0 \\ z^{-h}G_2(z) & I \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\mathbf{g}^2 I \end{bmatrix}$$



Il problema diventa quello di trovare uno stimatore $F(z)$ stabile e causale tale che:

$$[F(z) \quad -I]G(z)JG(z)^\sim \begin{bmatrix} F(z)^\sim \\ -I \end{bmatrix} < 0, \quad |z|=1$$

Nota: il problema di Nehari

Sia data una funzione di trasferimento $R(z)$, senza poli sulla circonferenza di raggio uno. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. La norma di Hankel di $R(z)$ e' piu' piccola di \mathbf{g} , cioe' $\|\Gamma_R\| < \mathbf{g}$
2. $\exists Q(z)$ stabile tale che $\|R(z) + Q(z)\|_\infty < \mathbf{g}$
3. $\exists W(z)$ stabile, $W(z)^{-1}$ stabile, $W_{11}(z)^{-1}$ stabile tale che

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ R(z) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\mathbf{g}^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & R(z)^\sim \\ 0 & I \end{bmatrix} = W(z) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\mathbf{g}^2 I \end{bmatrix} W(z)^\sim$$

Fattorizzazione J-spettrale

$$G(z)JG(z)^{\sim} = \Omega(z)J\Omega(z)^{\sim}$$

$\Omega(z)$ quadrata biproprria e stabile

$\Omega(z)^{-1}$ stabile

Fattore J-spettrale canonico

$\Omega_{11}(z)^{-1}$ stabile

Sia $G(z)$ stabile. Esiste un filtro causale stabile tale che

$$\bullet F(z)G_1(z) - z^{-h}G_2(z) \text{ è stabile}$$

$$\bullet \left\| F(z)G_1(z) - z^{-h}G_2(z) \right\|_{\infty} < \mathbf{g}$$

se e solo se esiste un fattore J-spettrale $W(z)$ canonico di $G(z)$. In questo caso la classe degli stimatori $F(z)$ che risolvono il problema è dato da:

$$F(z) = (\Omega_{21}(z) - \Omega_{22}(z)U(z))(\Omega_{11}(z) - \Omega_{12}(z)U(z))^{-1}$$
$$U(z) \text{ stabile, } \|U(z)\|_{\infty} < \mathbf{g}^2$$

Note: Scegliendo $U(z)=0$ si ha il cosiddetto **STIMATORE CENTRALE**

Il valore minimo possibile del livello di attenuazione

Sia $T_1(z)$ un qualunque fattore spettrale di $G_1(z)$, cioè

$$T_1(z)T_1(z)^{\sim} = G_1(z)G_1(z)^{\sim} \geq 0$$

Allora:

$$\begin{aligned} & \left(F(z)G_1(z) - z^{-h}G_2(z) \right) \left(F(z)G_1(z) - z^{-h}G_2(z) \right)^{\sim} = W(z) + \\ & \left(F(z)T_1(z) - z^{-h}G_2(z) G_1(z)^{\sim} T_1(z)^{-1\sim} \right) \left(F(z)T_1(z) - z^{-h}G_2(z) G_1(z)^{\sim} T_1(z)^{-1\sim} \right)^{\sim} \end{aligned}$$

dove

$$W(z) = G_2(z) \left(I - G_1(z)^{\sim} (G_1(z)G_1(z)^{\sim})^{-1} G_1(z) \right) G_2(z)^{\sim} \geq 0, \quad |z|=1$$

Quindi

$$\mathbf{g}^2 > \mathbf{g}_m^2 = \|W(z)\|_{\infty}$$

Note:

Il valore di $\mathbf{g}^2 > \|W(z)\|_{\infty}$ da' il valore minimo del livello di attenuazione ottenibile da un qualunque stimatore, anche non causale. Quindi coincide con il valore di attenuazione ottenuto da uno smoother a lunghezza di intervallo fisso infinita.

Prova del teorema sulla fattorizzazione J-spettrale

Sia $(A, B, [C; L], [D; M])$ una realizzazione di $G(z)$. Esiste un filtro H_∞ che soddisfa i requisiti se e solo se esiste una soluzione P semidefinita positiva, stabilizzante e ammissibile dell'equazione:

$$P = APA' + BB' +$$

$$-(AP[C' \ L'] + B[D' \ M']) \left(J + \begin{bmatrix} D \\ M \end{bmatrix} [D' \ M'] + \begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix} P [C \ L] \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix} P A' + \begin{bmatrix} D \\ M \end{bmatrix} B' \right)$$

Ammissibile significa che

$$\mathbf{g}^2 I - LPL' - MM' + (LPC' + MD')(CPC' + DD')^{-1} (LPC' + MD')' > 0$$

Stabilizzante significa che

$$A - (AP[C' \ L'] + B[D' \ M']) \left(J + \begin{bmatrix} D \\ M \end{bmatrix} [D' \ M'] + \begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix} P [C \ L] \right)^{-1} \begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix}$$

è stabile.

Fattorizzazione: dall'equazione si ricava facilmente un fattore J-spettrale canonico:

$$\Omega(z) = \left(J + \begin{bmatrix} D \\ M \end{bmatrix} [D' \ M'] + \begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix} P [C \ L] + \begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix} (zI - A)^{-1} (AP[C' \ L'] + B[D' \ M']) \right) \Gamma$$

$$\Gamma \Gamma' = \left(J + \begin{bmatrix} D \\ M \end{bmatrix} [D' \ M'] + \begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix} P [C \ L] \right)^{-1}$$

Si noti infatti che $\Omega(z)$ è stabile, in quanto A è stabile, e inoltre $\Omega(z)^{-1}$ è stabile in quanto la soluzione P è stabilizzante, infine per la stessa ragione e per l'ammissibilità di P , $\Omega(z)_{11}^{-1}$ risulta essere stabile.

Viceversa, supponiamo che esista un fattore J-spettrale canonico $\Omega(z)$ e consideriamo la famiglia di stimatori. Da tale famiglia si può scrivere: $F(z)\Omega_{11}(z) - \Omega_{21}(z) = (F(z)\Omega_{12}(z) - \Omega_{22}(z))U(z)$.
Quindi:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} F(z) & -I \end{bmatrix} G(z) J G(z)^{\sim} \begin{bmatrix} F(z)^{\sim} \\ -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(z) & -I \end{bmatrix} \Omega(z) J \Omega(z)^{\sim} \begin{bmatrix} F(z)^{\sim} \\ -I \end{bmatrix} = \\ & (F(z)\Omega_{12}(z) - \Omega_{22}(z)) (U(z)U(z)^{\sim} - \mathbf{g}^2 I) (F(z)\Omega_{12}(z) - \Omega_{22}(z))^{\sim} < 0, \quad |z|=1 \end{aligned}$$

che è una prima conclusione. Inoltre vale la formula:

$$\begin{bmatrix} F(z) & -I \end{bmatrix} = -\Theta(z) Y(z) \begin{bmatrix} U(z) & I \end{bmatrix} \Omega(z)^{-1}$$

$$\Theta(z) = \Omega_{22}(z) - \Omega_{21}(z)\Omega_{11}(z)^{-1}\Omega_{12}(z)$$

$$Y(z) = \left(I - U(z)\Omega_{11}(z)^{-1}\Omega_{12}(z) \right)^{-1}$$

Per la stabilità di $Y(z)$ si noti che da

$$G_1(z)G_1(z)^{\sim} = \Omega_{11}(z)\Omega_{11}(z)^{\sim} - \gamma^2 \Omega_{12}(z)\Omega_{12}(z)^{\sim}$$

segue che $\|\Omega_{11}(z)^{-1}\Omega_{12}(z)\|_{\infty} < \gamma^{-2}$. Inoltre $U(z)$ è stabile, la funzione $\Omega_{11}(z)^{-1}\Omega_{12}(z)$ è stabile per ipotesi e inoltre la norma di $\|U(z)\Omega_{11}(z)^{-1}\Omega_{12}(z)\|_{\infty} < \|U(z)\| \|\Omega_{11}(z)^{-1}\Omega_{12}(z)\|_{\infty} < 1$. Quindi, la funzione di trasferimento $Y(z)$ è stabile per il teorema del piccolo guadagno.

Fattore J-spettrale per il filtraggio ($h=0$)

Diagonalizzazione dello spettro

$$\begin{aligned} G(z)JG(z)^{\sim} &= \begin{bmatrix} G_1(z)G_1(z)^{\sim} & G_1(z)G_2(z)^{\sim} \\ G_2(z)G_1(z)^{\sim} & G_2(z)G_2(z)^{\sim} - \mathbf{g}^2 I \end{bmatrix} \\ &= \Theta(z) \begin{bmatrix} G_1(z)G_1(z)^{\sim} & 0 \\ 0 & W(z) - \mathbf{g}^2 I \end{bmatrix} \Theta(z)^{\sim} \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \Theta(z) &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ G_2(z)G_1(z)^{\sim} (G_1(z)G_1(z)^{\sim})^{-1} & I \end{bmatrix} \\ W(z) &= G_2(z) \left(I - G_1(z)^{\sim} (G_1(z)G_1(z)^{\sim})^{-1} G_1(z) \right) G_2(z)^{\sim} \end{aligned}$$

Si ricordi che $\gamma^2 I - W(e^{j\theta}) > 0$. **Fattorizzazioni spettrali:**

$$\begin{aligned} G_1(z)G_1(z)^{\sim} &= T_1(z)T_1(z)^{\sim} \\ \mathbf{g}^2 I - W(z) &= T_2(z)T_2(z)^{\sim} \end{aligned}$$

Ad esempio, $T_1(z)$ e $T_2(z)$ stabili con $T_1(z)^{-1}$ antistabile e $T_2(z)^{-1}$ stabile. Allora:

Matrici J-pass per l'eliminazione degli zeri a fase non minima al finito.

$$G(z)JG(z)^{\sim} = \Omega^{(0)}(z)J\Omega^{(0)}(z)^{\sim}$$

$$\Omega^{(0)}(z) = \begin{bmatrix} T_1(z) & 0 \\ G_2(z)G_1(z)^{\sim}T_1(z)^{-1\sim} & T_2(z)/\mathbf{g} \end{bmatrix}$$

Calcoli semplici mostrano che $G_2(z)G_1(z)^{\sim}T_1(z)^{-1\sim}$ è stabile e quindi che $\Omega^{(0)}(z)$ è stabile. Si noti però che $\Omega^{(0)}(z)$ ha zeri a sfasamento non minimo (fuori dal cerchio unitario), in quanto $T_1(z)^{-1}$ è antistabile. Quindi non è un fattore canonico.

Una matrice J-pass (o J-unitaria) $\Gamma(z)$ è una matrice razionale propria tale che $\Gamma(z)J\Gamma(z)^{\sim} = J$.

Per il nostro problema, occorrono matrici J-pass che eliminano gli zeri instabili. Se k è il numero di tali zeri, si può dimostrare che esiste una sequenza di matrici J-pass $\Gamma_i(z)$ tali che:

$$\Omega(z) = \Omega^{(0)}(z)\Gamma_1(z)\Gamma_2(z)\cdots\Gamma_k(z)$$

è stabile con inversa stabile. Forma generica di una funzione J-pass con poli in $z=z_0$ e zeri in $z=z_0^{-1}$:

$$\Gamma(z) = I + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} (\mathbf{g}^2 D_1' D_1 - D_2' D_2) \begin{bmatrix} -\mathbf{g}^2 D_1' & D_2' \end{bmatrix} \frac{z - z_0 + z z_0 - 1}{z - z_0}$$

Algoritmo per il filtraggio

Dati $G(z)$ e $\gamma^2 > \|W(z)\|_\infty$

- Fattorizzazioni

$$G_1(z)G_1(z)^\sim = T_1(z)T_1(z)^\sim$$

$$\mathbf{g}^2 I - W(z) = T_2(z)T_2(z)^\sim$$

- Fattore J-spettrale

$$\Omega^{(0)}(z) = \begin{bmatrix} T_1(z) & 0 \\ G_2(z)G_1(z)^\sim T_1(z)^{-1\sim} & T_2(z)/\mathbf{g} \end{bmatrix}$$

- Eliminazione zeri instabili

$$\Omega(z) = \Omega^{(0)}(z)\Gamma_1(z)\Gamma_2(z)\cdots\Gamma_k(z)$$

- Controllo della stabilità di $\Omega_{11}(z)^{-1}$

Se $\Omega_{11}(z)^{-1}$ è stabile allora $\Omega(z)$ è un fattore canonico dal quale si costruiscono tutti i filtri. Se non è stabile, allora non esiste un filtro ammissibile con il valore di γ scelto (bisogna aumentare γ).

Note: Dati due fattori J-spettrali $X(z)$, $Y(z)$ stabili con inversa stabile di $G(z)JG(z)^{\sim}$, si ha $Y_{11}(z)^{-1}$ è stabile se e solo se $X_{11}(z)^{-1}$ è stabile.

Infatti, si consideri la formula: $X(z)^{-1}Y(z)J=J(Y^{-1}X)^{\sim}$. Quindi, poiché il primo membro è stabile e il secondo antistabile, deve essere $Y(z)^{-1}X(z)=K$ =matrice costante. Da $K^{\sim}J^{-1}K=J^{-1}$ si noti che:

$$K_{11}'K_{11}-\gamma^2K_{21}'K_{21}=I >0, \text{ col che } \|K_{21} K_{11}^{-1}\| < \gamma^2$$

Inoltre, da $G(z)JG(z)^{\sim}=Y(z)JY(z)^{\sim}$ si ha:

$$Y_{11}(z)^{\sim}Y_{11}(z)-\gamma^2Y_{12}(z)^{\sim}Y_{12}(z)=G_1(z)G_1(z)^{\sim} >0, |z|=1, \text{ col che}$$

$$\|Y_{11}(z)^{-1}Y_{12}(z)\|_{\infty} < \gamma^2$$

Infine, poiché

$$X_{11}(z)^{-1} = K_{11}^{-1} (I + Y_{11}(z)^{-1}Y_{12}(z)K_{21} K_{11}^{-1})^{-1} Y_{11}(z)^{-1}$$

Dal teorema del piccolo guadagno si ha che la stabilità di $Y_{11}(z)^{-1}$ implica quella di $X_{11}(z)^{-1}$. La conclusione opposta si ha cambiando i ruoli di $X(z)$ e $Y(z)$.

Fattore J-spettrale per la predizione ($h < 0$)

La famiglia di filtri che assicurano la norma minore di \mathbf{g} è più ampia della corrispondente famiglia di predittori. Quindi la soluzione del problema di filtraggio è necessaria per la soluzione del problema della predizione.

Possiamo allora partire da un fattore canonico $\Omega_F(z)$ del filtraggio, cioè tale che

$$\Omega_F(z) J \Omega_F(z)^{\sim} = \begin{bmatrix} G_1(z) & 0 \\ G_2(z) & I \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} G_1(z)^{\sim} & G_2(z)^{\sim} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

con $\Omega_F(z)$ stabile, con inversa stabile e $\Omega_{F11}(z)^{-1}$ stabile.

Per la predizione a $-h$ passi si ha che

$$G(z) = \begin{bmatrix} z^h G_1(z) & 0 \\ G_2(z) & I \end{bmatrix}$$

Quindi un fattore J-spettrale per la predizione è:

$$\Omega_P(z) = \begin{bmatrix} z^h I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Omega_F(z)$$

E' stabile, soddisfa $\Omega_P(z) J \Omega_P(z)^{\sim} = G(z) J G(z)^{\sim}$, però $\Omega_P(z)^{-1}$ non è causale ($\Omega_P(z)$ ha zeri all'infinito).

Matrici J-pass per l'eliminazione degli zeri

Si ricordi che una matrice J-pass (o J-unitaria) $\Gamma(z)$ è una matrice razionale propria tale che $\Gamma(z)J\Gamma(z)^{-1}=J$.

Per il nostro problema, occorrono matrici J-pass che eliminano gli zeri all'infinito (che sono particolari zeri instabili). Si può dimostrare che esiste una sequenza di matrici J-pass $\Gamma_i(z)$ tali che $\Omega_P^{(-h)}(z)$ è stabile con inversa stabile, dove

$$\Omega_P^{(0)}(z) = \Omega_F(z)$$

$$\Omega_P^{(i+1)}(z) = \begin{bmatrix} z^{-1}I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Omega_P^{(i)}(z) \Gamma_i(z), \quad i = 0, 1, \dots, -h-1$$

Forma generica di una funzione J-pass con poli all'infinito (**polinomiale**), che cancella uno zero all'infinito alla volta.

$$\Gamma(z) = I + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} (\mathbf{g}^2 D_1' D_1 - D_2' D_2) \begin{bmatrix} -\mathbf{g}^2 D_1' & D_2' \end{bmatrix} (1-z)$$

Algoritmo per la predizione

Dati h , $G(z)$ e $\gamma^2 > \|W(z)\|_\infty$

- Con l'algoritmo precedente si costruisca un fattore J-spettrale canonico $\Omega_F(z)$ per il problema del filtraggio. Se tale fattore non esiste, il problema della predizione non ha soluzione con il valore di γ scelto.

- Eliminazione zeri instabili

$$\Omega_P^{(0)}(z) = \Omega_F(z)$$

$$\Omega_P^{(i+1)}(z) = \begin{bmatrix} z^{-1}I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Omega_P^{(i)}(z) \Gamma_i(z), \quad i = 0, 1, \dots, -h-1$$

- Controllo su $\Omega_{P11}^{(-h)}(z)^{-1}$

Se $\Omega_{P11}^{(-h)}(z)^{-1}$ è stabile allora $\Omega_P^{(-h)}(z)$ è un fattore canonico per la predizione dal quale si costruiscono tutti i predittori. Se non è stabile, allora non esiste un predittore ammissibile con il valore di γ scelto (bisogna aumentare γ).

Nota: Dato un valore di γ , è possibile calcolare il massimo valore $N_{\max}(\gamma)$ dell'intervallo di predizione $-h$ che assicura l'esistenza della soluzione del problema di predizione. Dato γ per cui il problema del filtraggio ammette soluzione (altrimenti $N_{\max}(\gamma)=0$) si ha $N_{\max}(\gamma)=i$, dove i è l'indice minimo per cui l'algoritmo di eliminazione degli zeri all'infinito genera un fattore J-spettrale $\Omega_{P11}^{(i)}(z)$ con $\Omega_{P11}^{(i)}(z)^{-1}$ stabile.

Fattore J-spettrale per lo smoothing ($h>0$)

La famiglia di filtri che assicurano la norma minore di γ è più stretta della corrispondente famiglia di smoothers. Quindi la soluzione del problema di filtraggio è sufficiente per la soluzione del problema della predizione.

Possiamo comunque partire da un fattore J-spettrale (non canonico) $\Omega_F(z)$ del filtraggio, cioè tale che

$$\Omega_F(z)J\Omega_F(z)^{\sim} = \begin{bmatrix} G_1(z) & 0 \\ G_2(z) & I \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} G_1(z)^{\sim} & G_2(z)^{\sim} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

con $\Omega_F(z)$ stabile, con inversa stabile ($\Omega_{F11}(z)^{-1}$ non stabile).

Per lo smoothing a h passi si ha che

$$G(z) = \begin{bmatrix} G_1(z) & 0 \\ z^{-h}G_2(z) & I \end{bmatrix}$$

Quindi un fattore J-spettrale per lo smoothing è:

$$\Omega_S(z) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & z^{-h}I \end{bmatrix} \Omega_F(z)$$

E' stabile, soddisfa $\Omega_S(z)J\Omega_S(z)^{\sim} = G(z)JG(z)^{\sim}$, però $\Omega_S(z)^{-1}$ non è causale ($\Omega_S(z)$ ha zeri all'infinito).

Matrici J-pass per l'eliminazione degli zeri

Si ricordi che una matrice J-pass (o J-unitaria) $\Gamma(z)$ è una matrice razionale propria tale che $\Gamma(z)J\Gamma(z)^{\sim} = J$.

Per il nostro problema, occorrono matrici J-pass che eliminano gli zeri all'infinito (che sono particolari zeri instabili). Si può dimostrare che esiste una sequenza di matrici J-pass $\Gamma_i(z)$ tali che $\Omega_s^{(h)}(z)$ è stabile con inversa stabile, dove

$$\Omega_s^{(0)}(z) = \Omega_F(z)$$

$$\Omega_s^{(i+1)}(z) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & z^{-1}I \end{bmatrix} \Omega_s^{(i)}(z) \Gamma_i(z), \quad i = 0, 1, \dots, h-1$$

Forma generica di una funzione J-pass con poli all'infinito (**polinomiale**), che cancella uno zero all'infinito alla volta.

$$\Gamma(z) = I + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} (\mathbf{g}^2 D_1' D_1 - D_2' D_2) \begin{bmatrix} -\mathbf{g}^2 D_1' & D_2' \end{bmatrix} (1-z)$$

Algoritmo per la predizione

Dati h , $G(z)$ e $\gamma^2 > \|W(z)\|_\infty$

- Con l'algoritmo del filtraggio si costruisca un fattore J-spettrale stabile con inversa stabile $\Omega_F(z)$ per il problema del filtraggio. Tale fattore esiste, anche se il problema di filtraggio non ha soluzione con il valore di γ scelto.

- Eliminazione zeri instabili

$$\Omega_S^{(0)}(z) = \Omega_F(z)$$

$$\Omega_S^{(i+1)}(z) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & z^{-1}I \end{bmatrix} \Omega_S^{(i)}(z) \Gamma_i(z), \quad i = 0, 1, \dots, h-1$$

- Controllo su $\Omega_{S11}^{(h)}(z)^{-1}$

Se $\Omega_{S11}^{(h)}(z)^{-1}$ è stabile allora $\Omega_S^{(h)}(z)$ è un fattore canonico per lo smoothing dal quale si costruiscono tutti gli smoothers. Se non è stabile, allora non esiste uno smoother ammissibile con il valore di γ scelto (bisogna aumentare γ).

Nota: Dato un valore di γ , è possibile calcolare il minimo valore $N_{\min}(\gamma)$ dell'intervallo di smoother h che assicura l'esistenza della soluzione del problema di smoothing. Dato $\gamma^2 > \|W(z)\|_\infty$ per cui il problema del filtraggio non ammette soluzione (altrimenti $N_{\min}(\gamma)=0$) si ha $N_{\min}(\gamma)=i$, dove i è l'indice minimo per cui l'algoritmo di eliminazione degli zeri all'infinito genera un fattore J-spettrale $\Omega_{S11}^{(i)}(z)$ con $\Omega_{S11}^{(i)}(z)^{-1}$ stabile.

ESEMPIO

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} w(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w(t)$$

$$r(t) = [0 \quad 1 \quad 0] x(t)$$

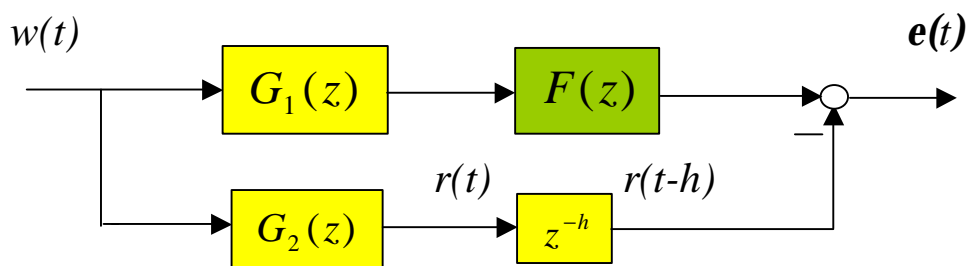
Risulta $\|W(z)\|_{\infty} = 1.1236$ per cui $\gamma_{s\infty} = \sqrt{1.1236} = 1.06$

$\gamma_F = 1.353$		
$\gamma_{P1} = 1.4071$	$\gamma_{P2} = 1.4332$	$\gamma_{P3} = 1.4486$
$\gamma_{S1} = 1.165$	$\gamma_{S2} = 1.0723$	$\gamma_{S3} = 1.0655$

H_∞ Fixed-lag smoothing: Approccio nel dominio del tempo

Sistema lineare, tempo invariante, a tempo discreto:

$$\Sigma : \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bw(t) \\ y(t) = Cx(t) + Dw(t) \\ r(t) = Lx(t) + Mw(t) \end{cases} \quad \textcircled{\text{R}} \quad \begin{aligned} G_1(z) &= C(zI - A)^{-1}B + D \\ G_2(z) &= L(zI - A)^{-1}B + M \end{aligned}$$



Il problema consiste nel trovare un filtro causale tale che

- $F(z)G_1(z) - z^{-h}G_2(z)$ stabile
- $\|F(z)G_1(z) - z^{-h}G_2(z)\|_{\infty} < \mathbf{g}$

fixed lag smoothing ($h > 0$)
filtraggio ($h = 0$)

Osservazione (Sistema esteso)

Il sistema può essere riscritto nel modo seguente:

$$\Sigma_A : \begin{cases} \bar{x}(t+1) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \\ L & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ M \end{bmatrix} w(t) \\ y(t) = [C \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \bar{x}(t) + Dw(t) \\ r(t-h) = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ I] \bar{x}(t) \end{cases}$$

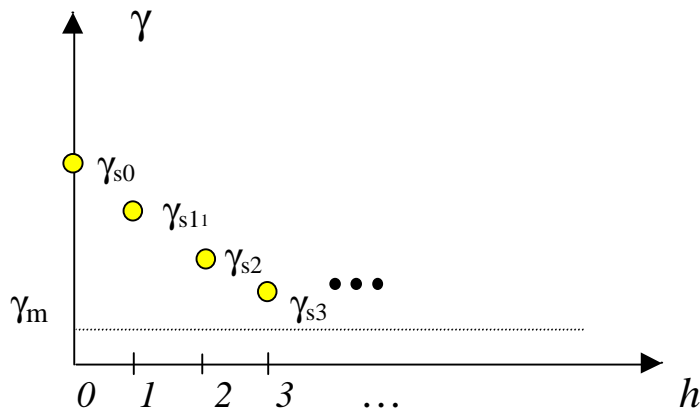
Il problema può essere riformulato come un problema di filtraggio per il sistema esteso: **FILTRAGGIO SU S_A** ° **FILTRAGGIO SU S** .

Algoritmi standard sono disponibili: Fattorizzazione J-spettrale, rappresentazione chain scattering, tecniche polinomiali, etc...

Tuttavia, le dimensioni del sistema esteso (e dell'equazione di Riccati corrispondente) possono essere troppo grandi.

Prestazioni

E' chiaro che il minimo livello di prestazione g non aumenta con h che aumenta



- g_{s0} è il minimo livello di prestazione per qualunque filtro H_{\forall}
- g_{s1} è il minimo livello di prestazione per qualunque smoother H_{\forall} di intervallo 1
-
- $g_m = g_{s\forall}$ è il minimo livello di prestazione per qualunque smoother H_{\forall} di intervallo \forall

It follows:

$$g_m^2 = \|W(z)\|_{\infty} = \left\| G_2(z) \left(I - G_1^{-1}(z) \left(G_1(z) G_1^{-1}(z) \right)^{-1} G_1(z) \right) G_2^{-1}(z) \right\|_{\infty}$$

Hence $\gamma > \gamma_m$

L'equazione di Riccati per il Filtraggio

$$P = APA' + BB' - [APC' + BD' \quad APL' + BM'] W(P) \begin{bmatrix} CPA' + DB' \\ LPA' + MB' \end{bmatrix}$$

$$W(P) = \begin{bmatrix} DD' + CPC' & CPL' + DM' \\ LPC' + MD' & -g^2 I + LPL' + MM' \end{bmatrix}^{-1}$$

- **Proprietà stabilizzante**

$$A - [APC' + BD' \quad APL' + BM'] W(P) \begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix}$$

- **Ammissibilità: P semidefinita positiva semidefinite**

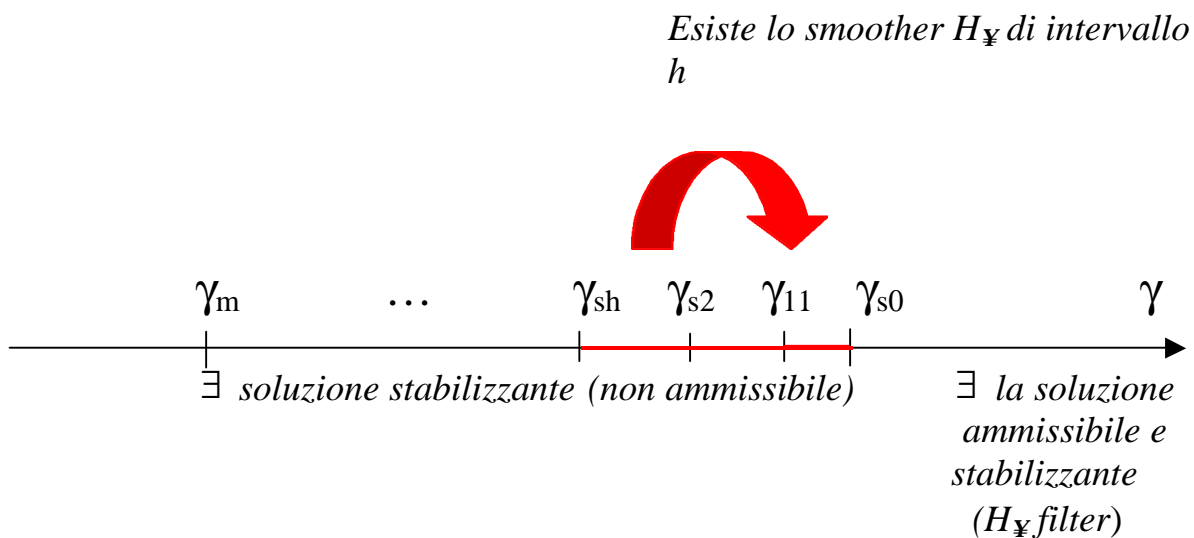
$$g^2 I - LPL' - MM' + (LPC' + MD')(DD' + CPC')^{-1}(CPL' + DM') > 0$$

L'equazione di Riccati per il Filtraggio

Esiste un filtro H_{γ} filter se e solo se esiste la soluzione ammissibile, semidefinita positiva dell'equazione. Questo succede per $g > g_{s0}$.

Teeorema 1

Esiste la soluzione stabilizzante per $g > g_m$, a parte un numero finito di punti g .



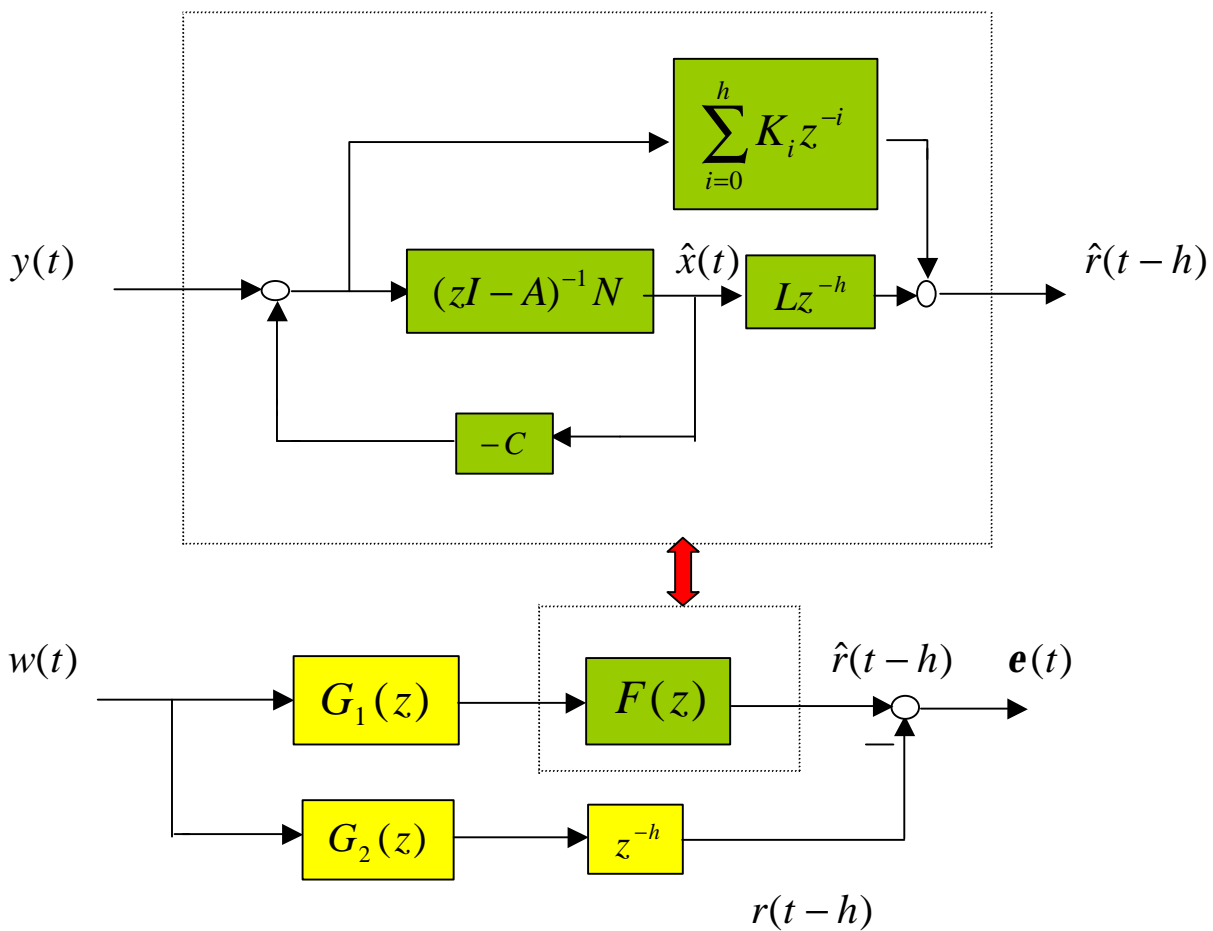
Quale ruolo è giocato dalla soluzione stabilizzante per $g \in (g_m, g_{s0})$?

Struttura dello smoother

$$\hat{x}(t+1) = A\hat{x}(t) + Ne(t)$$

$$\hat{r}(t-h) = L\hat{x}(t-h) + \sum_{i=0}^h K_i e(t-i)$$

$$e(t) = y(t) - C\hat{x}(t)$$



Incognite: N, K_0, K_1, \dots, K_h

Idea: approccio diretto

$$P = APA' + BB' - [APC' + BD' \quad APL' + BM'] H(P) \begin{bmatrix} CPA' + DB' \\ LPA' + MB' \end{bmatrix}$$

$$H(P) = \begin{bmatrix} DD' + CPC' & CPL' + DM' \\ LPC' + MD' & -\mathbf{g}^2 I + LPL' + MM' \end{bmatrix}^{-1}$$

i^{th} iterazione: $i=1, 1, \dots, h+1$

$P(0)=P$

$$P(i) = \begin{bmatrix} P_{11}(i) & P_{12}(i) & \cdots & P_{1i-1}(i) & P_{1i}(i) \\ P_{12}(i)' & P_{22}(i) & \cdots & P_{2i-1}(i) & P_{2i}(i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_{1i-1}(i)' & P_{2i-1}(i)' & \cdots & P_{i-1i-1}(i) & P_{ii}(i) \\ P_{1i}(i)' & P_{2i}(i)' & \cdots & P_{i-1i}(i)' & P_{ii}(i) \end{bmatrix}$$

Solo la prima riga di $P(h)$ concorre nella determinazione dei guadagni dello smoother!

La ricorsione

Inizializzazione: Sia P la soluzione stabilizzante dell'equazione di Riccati e sia

$$P_{11}^{(0)} = P$$

Allora ...

Ricursione $i=0,1,\dots,h$

$$P_{11}(i+1) = AP_{11}(i)A' + BB' - (BD' + AP_{11}(i)C')(CP_{11}(i)C' + DD')^{-1}(DB' + CP_{11}(i)A')$$

$$P_{12}(i+1) = AP_{11}(i)L' + BM' - (BD' + AP_{11}(i)C')(CP_{11}(i)C' + DD')^{-1}(DM' + CP_{11}(i)L')$$

$$P_{1k}(i+1) = \left[A - (BD' + AP_{11}(i)C')(CP_{11}(i)C' + DD')^{-1}C \right] P_{1k-1}(i),$$

$$k = 3, \dots, h+1$$

$$P_{i+1i+1}(i+1) = P_{ii}(i) - P_{1i+1}'(i)C'(CP_{11}(i)C' + DD')^{-1}CP_{1i+1}(i)$$

Risultato principale

Teorema 3

Si assuma che:

1. La coppia (A,C) sia rivelabile
2. Il sistema (A,B,C,D) sia invertibile a destra e non abbia zeri invarianti sulla circonferenza di raggio uno.
3. La ricorsione ammetta una soluzione

Allora, esiste uno smoother H_∞ di intervallo h se e solo se l'equazione di Riccati equation ha una soluzione stabilizzante tale che

- a) $A - (BD' + AP_{11}^{(h)}C')(CP_{11}^{(h)}C' + DD')^{-1}C$ stabile
- b) $P_{h+1}(h+1) < g^2 I$

I guadagni dello smoother sono:

$$H = (BD' + AP_{11}(h)C')(CP_{11}(h)C' + DD')^{-1}$$

$$K_h = (MD' + LP_{11}(h)C')(CP_{11}(h)C' + DD')^{-1}$$

$$K_{h-1} = P_{12}'(h)C'(CP_{11}(h)C' + DD')^{-1}$$

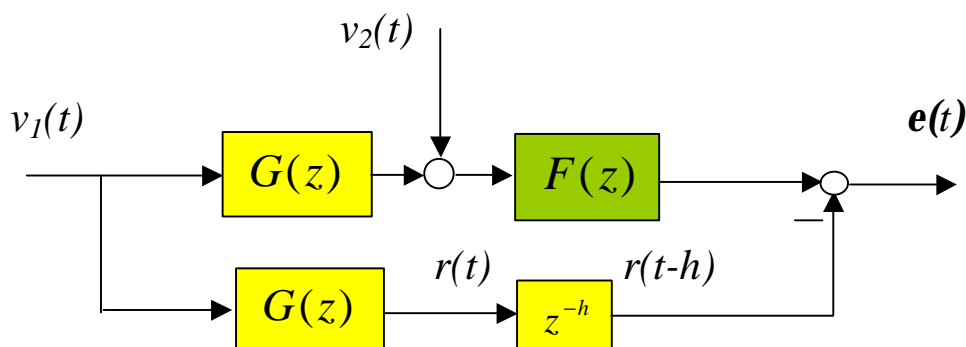
$$K_{h-2} = P_{13}'(h)C'(CP_{11}(h)C' + DD')^{-1}$$

⋮

$$K_0 = P_{1h+1}'(h)C'(CP_{11}(h)C' + DD')^{-1}$$

Filtraggio di Wiener

Il segnale $r(t)$ da ricostruire è una versione ritardata delle misure non corrotte da rumore



$$x(t+1) = Ax(t) + Bw(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Dw(t)$$

$$r(t) = Cx(t)$$

- Il filtro di Kalman assicura

$$\|F(z)(G(z) + D) - G(z)\|_{\infty} < 2\bar{S}(D)$$

- Il filtro H_{∞} centrale con parametro di progetto γ assicura

$$\|F(z)(G(z) + D) - G(z)\|_{\infty} < \frac{2\bar{S}(D)g^2}{g^2 + \bar{S}(D)^2}$$

Smoother?

Smoother di Wiener

Si donoti con γ_{s0} il minimo valore del livello di prestazione per ogni filtro, cioè per ogni smoother di intervallo $h=0$. Allora, se A è stabile:

$$\mathbf{g}_{s0}^2 = \frac{\|C(zI - A)^{-1}B\|_{\infty}^2}{1 + \|C(zI - A)^{-1}B\|_{\infty}^2}$$

Ricorda che γ_m è il minimo valore del livello di prestazione per qualunque smoother di intervallo arbitrario.

Teorema 2

- Se A è stabile, allora $\mathbf{g}_{s0} = \mathbf{g}_{s\infty} = \mathbf{g}_m < 1$
- Se A ha almeno un autovalore sulla circonferenza di raggio uno, allora $\mathbf{g}_{s0} = \mathbf{g}_{s\infty} = \mathbf{g}_m = 1$
- Se A è instabile e non possiede autovalori sulla circonferenza di raggio uno, allora $\mathbf{g}_m < \mathbf{g}_{s0} = 1$

In conclusione, se A è stabile o ha autovalori sulla circonferenza di raggio uno, lo smoother (per ogni intervallo) non migliora il minimo valore della prestazione, cioè $\mathbf{g}_{s0} = \mathbf{g}_{s1} = \mathbf{g}_{s2} = \dots = \mathbf{g}_{s\infty} = \mathbf{g}_m$

Esempio 1

Si consideri il sistema

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} -0.9 & 1 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} w(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 1]x(t) + [0 \quad 1]w(t)$$

$$r(t) = [1 \quad -1]x(t)$$

Il minimo valore della prestazione per uno smoother di intervallo infinito è $\gamma_m=1.2221$. D'altra parte, il problema di filtraggio H_∞ ($h=0$) ha una soluzione per $\gamma > \gamma_{s0}=4.3738$. Quindi, se il progettista vuole costruire uno stimatore capace di garantire un valore del livello di prestazione minore di γ_{s0} , deve fare riferimento ad uno smoother di intervallo appropriato $h > 0$. Il minimo livello di prestazione γ_{sh} associato con l'intervallo h è riportato in tabella:

	h=0	h=1	h=2	h=3	h=4
γ_{sh}	4.3738	2.5701	1.5564	1.2223	1.2221

Esempio 2

Si consideri il sistema

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & 1 \\ 0 & \mathbf{a} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} w(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 1]x(t) + [0 \quad 1]w(t)$$

$$r(t) = [1 \quad 1]x(t)$$

Questo è un esempio di stima di Wiener dal momento che $L=C$. Alla luce della teoria sviluppata, ci si aspetta di ottenere risultati diversi per diversi valori del parametro α per ciò che riguarda il minimo livello di prestazione. La tabella mostra il minimo livello della prestazione γ_h per uno smoother di intervallo h per differenti valori di α :

	$\alpha=0$	$\alpha=1$	$\alpha=2$
γ_0	0.8944	1	1
γ_1	0.8944	1	1
γ_2	0.8944	1	0.8381
γ_3	0.8944	1	0.6304
γ_4	0.8944	1	0.4660
γ_5	0.8944	1	0.3678
γ_m	0.8944	1	0.3333

In accordo con la teoria, quando A è stabile, tutti gli smoothers possono raggiungere il minimo valore di attenuazione $\gamma_m=0.8944$. Lo stesso capita quando A ha autovalori sulla circonferenza di raggio uno, ma in questo caso $\gamma_m=1$. Viceversa, I valori dell'attenuazione γ_h decresce da $\gamma_0=1$ a $\gamma_m=0.3333<1$ quando l'intervallo aumenta nel caso in cui A è instabile senza autovalori sul cerchio di raggio uno.

Sviluppi futuri

- A tempo continuo, lo smoother centrale H_∞ è un sistema a dimensioni infinite
- E' possibile incorporare perturbazioni norm-bounded sui parametric del sistema (paradigma a costo garantito).
- Quando saturano le prestazioni dello smoother H_∞ (in funzione di h)?
- Limiti robusti garantiti

H_∞ FILTERING IN DISCRETE-TIME

P. Colaneri

*Dipartimento di Elettronica e Informazione del Politecnico di
Milano*

SUMMARY

- **H_∞ analysis**

*H_∞ norm. Small gain theorem. Algebraic and difference analysis
Riccati equation*

- **H_∞ filtering (infinite horizon)**

*Stochastic filtering. Basic prediction problem. J -spectral factorization.
Duality. Krein spaces. Risk sensitivity.*

- **Mixed H_2/H_∞ filtering**

Convex optimization. \mathbf{a} procedure

- **H_∞ filtering (finite horizon)**

Feasibility. Convergence. Gamma Switching

- **Conclusions**

H_∞ NORM

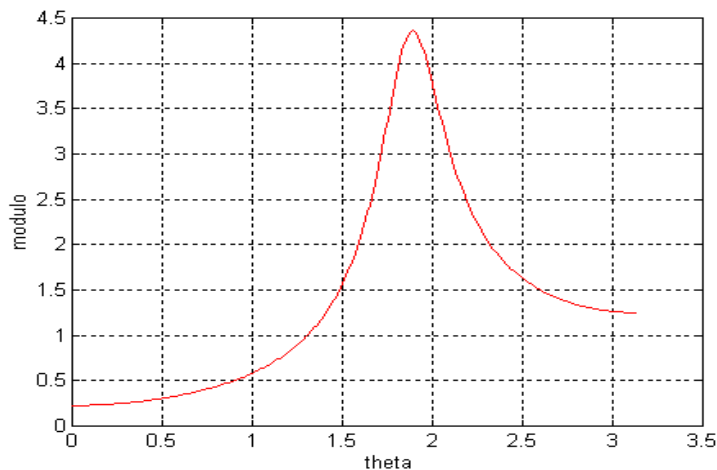
$$x(t+1) = Ax(t) + Bw(t)$$

$$z(t) = Cx(t) + Dw(t)$$

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

$$\|G(z)\|_{\infty}^2 = \sup_{J \in [0, p]} \mathbf{I}_{\max}(G(e^{jJ})G(e^{-jJ})^T) = \sup_{w \in l_2} \frac{\|y_F\|_2^2}{\|w\|_2^2} = \sup_{w(z) \in l_2} \frac{\|G(z)w(z)\|_2^2}{\|w(z)\|_2^2}$$

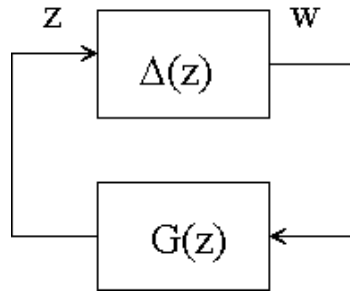
$$G(z) = \frac{z - 0.5}{z^2 + 0.5z + 0.7}$$



If $w(t)$ is a white noise, the norm represents the square-root of the peak value of the spectrum of the output

For the frequency-domain definition it is enough to require that $G(z)$ don't have poles on the unit circle (L_{∞}). It is easy to recognize that the H_{∞} norm of a function in L_{∞} coincides with the norm of its stable part $G_0(z)$ in the inner-outer factorization $G(z) = G_0(z)G_i(z)$. The time-domain definition requires the external stability of the system. The symbol l_2 indicates the set of the square-summable discrete-time functions in Z^+ . Notice that if w belongs to l_2 and the system is asymptotically stable, the forced y_F is in l_2 as well.

SMALL GAIN THEOREM: robust stability



Let $G(z)$ and $\mathbf{D}(z)$ stable. Then the closed-loop system (\mathbf{D}, G) is stable for each $\|\mathbf{D}(z)\|_{\infty} < \mathbf{a}$ iff $\|G(z)\|_{\infty} < \mathbf{a}^{-1}$.

$$\|G(z)\|_{\infty}^2 = \sup_{w \in l_2} \frac{\|y_F\|_2^2}{\|w\|_2^2} < \mathbf{g}^2 \quad \rightarrow \quad \|y_F\|_2^2 - \mathbf{g}^2 \|w\|_2^2 < 0, \forall w \in l_2$$

Theorem 1

Let A be stable and $\|G(z)\|_{\infty} < \mathbf{g}$. Then,

$$\sup_{w \in l_2} \|y_F\|_2^2 - \mathbf{g}^2 \|w\|_2^2 = x_0' P x_0$$

where $P \geq 0$ is the stabilizing solution of the Riccati equation

$$P = A' P A + (A' P B + C' D)(\mathbf{g}^2 I - D' D - B' P B)^{-1} (A' P B + C' D)' + C' C$$

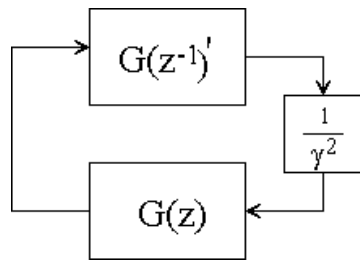
The worst disturbance is

$$w_{\text{worst}}(t) = (\mathbf{g}^2 I - D' D - B' P B)^{-1} (B' P A + D' C) x(t)$$

The fact that the H_{∞} is bounded is equivalent to the existence of the stabilizing solution of the equation (see Theorem 2). The proof of the result directly follows from the equation by pre-multiplying it by $x(t)'$ and post-multiplying it by $x(t)$, taking also into account the system equations and adding all quantities obtained from $t=0$ to $t=\infty$.

RICCATI EQUATION FOR THE H_{∞} ANALYSIS

Descriptor symplectic system:



Theorem 2

A is stable and $\|G(z)\|_{\infty} < \mathbf{g}$ iff there exists $Q \geq 0$ satisfying

- (i) $Q = AQA' + BB' + (AQC' + BD')(g^2I - DD' - CQC')^{-1}(AQC' + BD)'$
- (ii) $g^2I - DD' - CQC' > 0$ **feasibility**
- (iii) $A + (AQC' + BD')(g^2I - DD' - CQC')^{-1}C$ **stability**

Notes:

The Riccati equation (or its dual) is associated with the symplectic system written above and described by equations below.

$$\begin{bmatrix} I & -C'(\mathbf{g}^2 I - DD')^{-1} C \\ 0 & A + BD'(\mathbf{g}^2 I - DD')^{-1} C \end{bmatrix} \mathbf{h}(t+1) = \begin{bmatrix} A' + C'(\mathbf{g}^2 I - DD')^{-1} DB' & 0 \\ -B(I - \mathbf{g}^{-2} D' D)B' & I \end{bmatrix} \mathbf{h}(t)$$

For the existence of the stabilizing solution of the Riccati equation it is necessary that such a system does not have characteristic values with unitary modulus.

From the equation it readily follows that:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^2 I - G(z)G(z^{-1})' &= \Psi(z) [\mathbf{g}^2 I - DD' - CQC'] \Psi(z^{-1})', \\ \Psi(z) &= I - C(zI - A)^{-1} (BD' + AQC') (\mathbf{g}^2 I - DD' - CQC')^{-1} \end{aligned}$$

This explains the fact that $[\mathbf{g}^2 I - DD' - CQC']$ must be positive. As will be clear from the proof, the theorem can be formulated for the inequality

$$-Q + AQA' + (AQC' + BD') (\mathbf{g}^2 I - DD' - CQC')^{-1} (AQC' + BD')' \leq 0$$

without the stability condition (iii).

Notice that as $\gamma \rightarrow \infty$ (the loop in the figure opens) the Riccati equation boils down to the Lyapunov equation associated with the H_2 norm.

Proof of Theorem 2

Assume that there exists a solution Q of the Riccati equation. Such an equation can be transformed in the following way (the computations are left to the reader):

$$\mathbf{g}^2 I - G(z)G(z^{-1})' = \Psi(z) [\mathbf{g}^2 I - DD' - CQC'] \Psi(z^{-1})',$$

where

$$\Psi(z) = I - C(zI - A)^{-1} (BD' + AQC') (\mathbf{g}^2 I - DD' - CQC')^{-1}.$$

Hence, on the basis of the property $\mathbf{g}^2 I - DD' - CQC' > 0$ and invertibility of $\Psi(e^{jJ})$ we have that

$$\mathbf{g}^2 I - G(e^{jJ})G(e^{-jJ})' = \Psi(e^{jJ}) [\mathbf{g}^2 I - DD' - CQC'] \Psi(e^{-jJ})' > 0, \quad \forall J,$$

i.e. the thesis.

Vice-versa assume that $\|G(z)_\infty\| < \mathbf{g}$. We prove that the symplectic system

$$\begin{bmatrix} I & -C'(\mathbf{g}^2 I - DD')^{-1} C \\ 0 & A + BD'(\mathbf{g}^2 I - DD')^{-1} C \end{bmatrix} \mathbf{h}(t+1) = \begin{bmatrix} A' + C'(\mathbf{g}^2 I - DD')^{-1} DB' & 0 \\ -B(I - \mathbf{g}^{-2} D' D)B' & I \end{bmatrix} \mathbf{h}(t)$$

does not have characteristic values with unitary modulus. Indeed, assume, by contradiction, λ is such, i.e.

$$Ix - IC'(\mathbf{g}^2I - DD')^{-1}Cy = (A' + C'(\mathbf{g}^2I - DD')^{-1}DB')x$$

$$I(A + BD'(\mathbf{g}^2I - DD')^{-1}C)y = y - B(I - \mathbf{g}^{-2}D'D)B'x$$

for a certain $[x \ y]' \neq 0$ and define $p = (\mathbf{g}^2I - DD')^{-1}(DB'x + ICy)$. It results $G(I^{-1})G(I)' = \mathbf{g}^2I$, which is a contradiction unless $p=0$. On the other hand, $p=0$ implies $A'x = Ix$, and, since A is stable, $x=0$. Finally, $p=0$ and $x=0$ imply $(IA - I)y = 0$ so that $y=0$ (A is stable). Hence, $x=0$ and $y=0$ is a contradiction.

Since the symplectic system does not have characteristic values on the unit circle, there are n characteristic values inside (possibly in zero) and n outside (the reciprocals) the unit circle (possibly at infinity). Grouping the $2n$ -dimensional vectors associated with the n characteristic values inside the unit circle, one can construct a matrix $[X' \ Y']'$, whose range is a $2n$ -dimensional subspace. It follows

$$\begin{bmatrix} I & -C'(\mathbf{g}^2I - DD')^{-1}C \\ 0 & A + BD'(\mathbf{g}^2I - DD')^{-1}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} A' + C'(\mathbf{g}^2I - DD')^{-1}DB' & 0 \\ -B(I - \mathbf{g}^{-2}D'D)B' & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

where T is a matrix with eigenvalues inside the unit circle (stable matrix). Consider now the solutions of the system $r(t+1) = Tr(t)$, i.e. $r(t) = T^t r(0)$ and left multiply by $r(t)$ the two matrix equations above. Next, define $p(t) = B'Xr(t)$ and $q(t) = CYr(t)$. It follows

$$p(t+1) = A'p(t) + C'v_1(t), \quad v_2(t) = B'p(t) + D'v_1(t)$$

$$Aq(t+1) = q(t) - Bv_2(t), \quad v_1(t) = \frac{1}{\mathbf{g}^2}(Cq(t+1) + Dv_2(t))$$

from which, passing to the Z-transform

$$G(z)'G(z^{-1})v_1(z) = \mathbf{g}^2v_1(z), \quad G(z^{-1})G(z)v_2(z) = \mathbf{g}^2v_2(z).$$

From the assumption it is $v_1(t) = 0, v_2(t) = 0$, so that $B'X = 0$ and $C'Y = 0$. Hence, from the symplectic system it follows $A'X = XT, AYT = Y$. Assume that there exists a vector d such that $Xd = 0$ and take the minimal degree polynomial $\mathbf{v}(T)$ of T such that $\mathbf{v}(T)d = 0$. Such a polynomial can be written as $\mathbf{v}(T) = (II - T)\mathbf{m}(T)$. For the minimality of $\mathbf{v}(T)$ it results $\mathbf{m}(T)d \neq 0$. Then, $AYTd = IAYd = Yd$. Since λ has modulus less than 1, I^{-1} has modulus greater than one so that this equation contradicts the stability of A' , unless $Yd = 0$. On the other hand, this last conclusion, together with $Xd = 0$ contradicts the n -dimensionality of the range of $[X' \ Y']'$.

THE DIFFERENCE EQUATION

$$x(t+1) = Ax(t) + Bw(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Dw(t)$$

$$Q(t+1) = AQ(t)A' + (AQ(t)C' + BD')(\mathbf{g}^2 I - DD' - CQ(t)C')^{-1}(AQ(t)C' + BD')' + BB'$$

$$Q(0) = Q_0 > 0$$

Theorem 3

$$J = \sum_{t=0}^N y(t)' y(t) - \mathbf{g}^2 \sum_{t=0}^N w(t)' w(t) - \mathbf{g}^2 x(0)' Q_0^{-1} x(0) < 0, \quad \forall (w(\cdot), x(0)) \neq 0$$

iff there exists $Q(t) \geq 0$ in $[0, N]$ such that $\mathbf{g}^2 I - DD' - CQ(t)C' > 0$

Proof of Theorem 3

Consider the cost.

$$\tilde{J}(N) = \sum_{t=0}^N z(t)' z(t) - \mathbf{g}^2 \sum_{t=0}^N w(t)' w(t) + x(N+1)' P_{N+1} x(N+1) < 0, x(0) = 0, \forall w(\cdot) \neq 0$$

We proof the dual result: $\tilde{J}(N) < 0, x(0) = 0, \forall w(\cdot) \neq 0$ iff there exists the solution of the equation

$$\begin{aligned} P(t) &= A' P(t+1) A + \\ &+ (A' P(t+1) B + C' D) (\mathbf{g}^2 I - D' D - B' P(t+1) B)^{-1} (A' P(t+1) B + C' D)' + C' C, \\ P(N+1) &= P_{N+1} > 0 \end{aligned}$$

with $\gamma^2 I - D' D - B' P(t+1) B > 0$, in $[0, N+1]$. Sufficient condition: if there exists the solution with the indicated properties, then pre-premultiplying the equation by $x(t)'$ and post-multiplying by $x(t)$, and summing all terms, it results

$$\sum_{t=0}^N z(t)' z(t) - \mathbf{g}^2 \sum_{t=0}^N w(t)' w(t) + x(N+1)' P_{N+1} x(N+1) = x(0)' P(0) x(0) - \sum_{t=0}^N (w(t) - \tilde{w}(t))' (w(t) - \tilde{w}(t))$$

(*)

where

$$\tilde{w}(t) = (\mathbf{g}^2 I - D' D - B' P(t+1) B)^{-1} (A' P(t+1) B + C' D)' x(t).$$

Hence, being $x(0)=0$ we have $\tilde{J}(N) < 0, \forall w(\cdot) \neq 0$.

Vice-versa, assume that $\tilde{J}(N) < 0, \forall w(\cdot) \neq 0$ and take $w(\cdot)=0$ in $[0, N-1]$. Being $x(0)=0$, with such a choice we have

$$0 > w(N)' \left[-\gamma^2 I + D' D + B P_{N+1} B' \right] w(N), \forall w(N) \neq 0$$

so that

$$-\gamma^2 I + D' D + B P_{N+1} B' > 0.$$

Furthermore, from

$$\tilde{J}(N) = \tilde{J}(N-1) - (w(N) - \tilde{w}(N))' (w(N) - \tilde{w}(N)) < 0, \forall w(\cdot) \in [0, N]$$

it turns out that

$$\tilde{J}(N-1) > 0, \forall w(\cdot) \in [0, N-1].$$

By iterating this reasoning we have

$$\gamma^2 I - D' D - B' P(t+1) B > 0$$

in $[0, N]$. Theorem 3 is proven from (*) by noticing that

$$P(t) = Q(t)^{-1} \gamma^2.$$

STOCHASTIC FILTERING

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + v_1(t) \\ z(t) = Lx(t) \\ \bar{y}(t) = \bar{C}x(t) + v_2(t) \end{cases}$$

where $v_1(t), v_2(t)$ are zero-mean white gaussian noises . Moreover,

$$E \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 & V_{12} \\ V_{12}' & V_2 \end{bmatrix}, \quad V_2 > 0$$

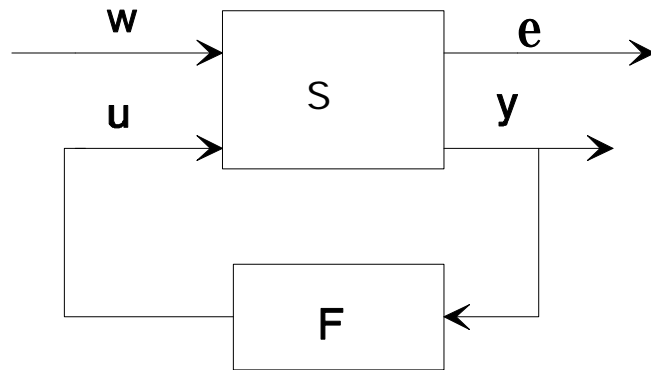
The problem is to find an estimate $\hat{z}(t)$ in H_∞ of a linear combination $z(t) = Lx(t)$ of the state, i.e. one wants to find an estimator based on the observations of $\{\bar{y}(i), i \leq t - N\}$ in such a way that the maximum of the output spectrum of the error $e = z - \hat{z}$ due to $[v_1' \ v_2']'$ is minimized (or bounded from above by a certain positive scalar γ).

Letting

$$\begin{aligned} u(t) &= -\hat{z}(t), \quad e(t) = Lx(t) + u(t), \quad y(t) = V_2^{-1/2} \bar{y}(t) \\ D &= \begin{bmatrix} 0 & V_2^{1/2} \end{bmatrix}, \quad C = \bar{C} \\ B &= \begin{bmatrix} (V_1 - V_{12} V_2^{-1} V_{12}')^{1/2} & V_{12} V_2^{-1/2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

and defining with $w(t)$ a zero mean white gaussian noise with identity covariance, it follows:

BASIC FILTERING PROBLEM



$$S : \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bw(t) \\ \mathbf{e}(t) = Lx(t) + u(t) \\ y(t) = Cx(t) + Dw(t) \end{cases}$$

$$F : \begin{cases} \hat{x}(t+1) = A_F \hat{x}(t) + B_F y(t-N) \\ u(t) = C_F \hat{x}(t) + D_F y(t-N) \end{cases}$$

Basic problem: Find A_F, B_F, C_F, D_F such that

- *(S, F) is asymptotically stable*
- $\|T_{ew}\|_{\infty} < \mathbf{g}$

If $z(t) = Lx(t)$ is the variable to be estimated and $\hat{z}(t)$ the estimated variable, it follows $u(t) = -\hat{z}(t)$. Hence $\mathbf{e}(t)$ represents the filtering error $z(t) - \hat{z}(t) = \mathbf{e}(t)$. If $w(t)$ is a white noise, the problem is that of minimizing the peak value of the error spectrum. If $w(t)$ is a generic signal in l_2 , the problem is that of minimizing the l_2 "gain" between the error and the disturbance.

SOLUTION OF THE FILTERING PROBLEM

Ipotesi: $DD' > 0$
 $A = \text{stable}$
 (A, B, C, D) does not have unstable invariant zeros

Theorem 4

There exists a filter \mathbf{F} solving the basic problem iff $\exists Q \geq 0$ solution of

$$i) Q = AQA' + BB' - \begin{bmatrix} CQA' + DB' \\ LQA' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DD' + CQC' & CQL' \\ LQC' & -g^2 I + LQL' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} CQA' + DB' \\ LQA' \end{bmatrix}$$

$$ii) V = g^2 I - LQL' + LQC'(DD' + CQC')^{-1}CQL' > 0 \quad \text{filter feasibility}$$

$$iii) \hat{A} = A - \begin{bmatrix} CQA' + DB' \\ LQA' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DD' + CQC' & CQL' \\ LQC' & -g^2 I + LQL' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix} \quad \text{stable}$$

CENTRAL FILTER

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + F_1(y(t) - C\mathbf{x}(t)), \quad F_1 = (AQC' + BD')(CQC' + DD')^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{z}}(t) = L\mathbf{x}(t) + F_2(y(t) - C\mathbf{x}(t)), \quad F_2 = LQC'(CQC' + DD')^{-1}$$

The assumption on the zeros is equivalent to the stabilizability of the pair

$(\tilde{A}, \tilde{B}), \tilde{A} = A - BD'(DD')^{-1}C, \tilde{B} = B(I - D'(DD')^{-1}D)$. The assumption of stability of A can be weakened to the assumption of detectability of (A,C) if one is only interested in the stability of the filter.

NOTES

- If $G \neq 0$, one obtains the central filter

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + F_1(y(t) - C\mathbf{x}(t)) + Gu(t)$$

$$\hat{\mathbf{z}}(t) = L\mathbf{x}(t) + F_2(y(t) - C\mathbf{x}(t))$$

- As $g \rightarrow \infty$ the H_2 filtering is obtained, where F_1 e F_2 depend on the stabilizing solution of the standard Riccati equation:

$$Q = AQA' + BB' - (CQA' + DB')'(DD' + CQC)^{-1}(CQA' + DB')$$

- Notice that in the $H_{\mathbb{Y}}$ filter the solution depends on L , i.e. on the particular linear combination of the state to be estimated. This is a difference between H_2 , and $H_{\mathbb{Y}}$ design.
- The “gains” F_1 and F_2 are related by:

$$F_2 = LK$$

$$F_1 = [A - BD'(DD')^{-1}C]K - BD'(DD')^{-1}$$

with

$$K = QC'(CQC' + DD')^{-1}$$

In the uncorrelated case ($DB'=0$) these relations become

$$F_2 = LK, \quad F_1 = AK$$

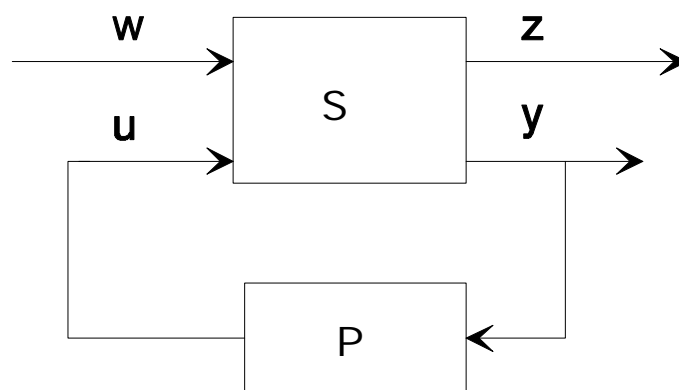
Hence

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + AK[y(t) - C\mathbf{x}(t)]$$

$$\hat{\mathbf{r}}(t) = L\mathbf{x}(t) + LK[y(t) - C\mathbf{x}(t)]$$

BASIC ONE-STEP PREDICTION PROBLEM

Assume that we want to estimate $z(t) = Lx(t)$ on the basis of the data $y(i), i \leq t$.



$$S : \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bw(t) + Gu(t) \\ \mathbf{e}(t) = Lx(t) + u(t) \\ y(t) = Cx(t) + Dw(t) \end{cases}$$

$$P : \begin{cases} \tilde{x}(t+1) = A_p \tilde{x}(t) + B_p y(t) \\ u(t) = C_p \tilde{x}(t) \end{cases}$$

Basic problem: Find A_p, B_p, C_p such that:

- (S, F) asymptotically stable
- $\|T_{rw}\|_\infty < \gamma$

If $z(t) = Lx(t)$ is the variable to be estimated and $\tilde{z}(t)$ is the estimated variable, then $u(t) = -\tilde{z}(t)$ so that $\mathbf{e}(t)$ represents the prediction error. .

SOLUTION OF THE ONE-STEP PREDICTION PROBLEM

Assumption:

$A = \text{stable}, DD' > 0, (A, B, C, D)$ without unstable zeros

Theorem 5

There exists a one-step predictor \mathbf{P} solving the problem iff $\exists Q \geq 0$ satisfying

$$i) Q = AQA' + BB' - \begin{bmatrix} CQA' + DB' \\ LQA' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DD' + CQC' & CQL' \\ LQC' & -g^2 I + LQL' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} CQA' + DB' \\ LQA' \end{bmatrix}$$

$$ii) g^2 I - LQL' > 0$$

$$iii) \hat{A} = A - \begin{bmatrix} CQA' + DB' \\ LQA' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DD' + CQC' & CQL' \\ LQC' & -g^2 I + LQL' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C \\ -L \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{predictor feasibility} \\ \text{stable} \end{matrix}$$

CENTRAL PREDICTOR

$$\mathbf{h}(t+1) = A\mathbf{h}(t) + F_3(y(t) - C\mathbf{h}(t))$$

$$\tilde{z}(t) = L\mathbf{h}(t)$$

$$F_3 = (AQC' + BD')(CQC' + DD')^{-1} + A_X QL' V^{-1} LQC' (CQC' + DD')^{-1}$$

$$A_X = A - (AQC' + BD')(CQC' + DD')^{-1} C$$

$$V = g^2 I - LQL' + LQC' (DD' + CQC')^{-1} CQL'$$

The assumption on the zeros is equivalent to the stabilizability of the pair $(\tilde{A}, \tilde{B}), \tilde{A} = A - BD'(DD')^{-1}C, \tilde{B} = B(I - D'(DD')^{-1}D)$. The assumption of stability of A can be weakened to that of detectability of (A, C) , if one is only interested to the stability of the predictor.

NOTES

- If $G \rightarrow 0$, the so-called central predictor is obtained

$$\begin{aligned}\mathbf{m}(t+1) &= A\mathbf{h}(t) + F_3 (y(t) - C\mathbf{h}(t)) + Gu(t) \\ \tilde{\mathbf{z}}(t) &= L\mathbf{h}(t)\end{aligned}$$

- When $g \rightarrow \infty$ the H_2 predictor is recovered. Moreover, $F_3 \rightarrow F_1$, i.e. the gain of the predictor and the gain of the filter coincide and depend on the stabilizing solution of the standard Riccati equation:

$$Q = AQA' + BB' - (CQA' + DB')'(DD' + CQC)^{-1}(CQA' + DB')$$

- Notice that the $H_{\mathbf{y}}$ predictor depends on L , i.e. on the particular linear combination of the state to be estimated. This is a difference between H_2 , and $H_{\mathbf{y}}$ design.
- The “gain” F_3 of the predictor and the “gains” F_1 and F_2 of the filter are related by:

$$F_3 = F_1 + [A - F_1C]QL'V^{-1}F_2$$

In the uncorrelated case ($DB'=0$) and under the assumption of reachability of (A,B) , the Riccati equation of Theorem 3 can be rewritten in the following way:

$$Q = A \left[Q^{-1} + C'(DD')^{-1}C - \frac{1}{g^2} L'L \right]^{-1} A' + BB'$$

Feasibility condition for the predictor $g^2 I - LQL' > 0$

Feasibility condition for the filter $Q^{-1} + C'C - L'Lg^{-2} > 0$

Filter/Predictor

$$F_1 = A(Q^{-1} + C'C)^{-1}C', \quad F_2 = L(Q^{-1} + C'C)^{-1}C', \quad F_3 = A(Q^{-1} + C'C - \frac{1}{g^2} L'L)C'$$

PREDICTOR VS FILTER

The Riccati equation is the same, but the feasibility conditions are different

System for the prediction error

$$\mathbf{m}(t+1) = (A - F_3 C)\mathbf{m}(t) + (F_3 C - B)w(t)$$

$$e(t) = L\mathbf{m}(t)$$

feasibility (analysis) : $\mathbf{g}^2 I - LQL' > 0$

System for the filtering error

$$\mathbf{h}(t+1) = (A - F_1 C)\mathbf{h}(t) + (F_1 D - B)w(t)$$

$$e(t) = (L - F_2 C)\mathbf{h}(t) + F_2 D w(t)$$

feasibility (analysis) :

$$\mathbf{g}^2 I - LQL' + LQC'(DD' + CQC')^{-1}CQL' - (F_2 - \bar{F}_2)(DD' + CQC')(F_2 - \bar{F}_2)' > 0$$

$$\bar{F}_2 = LQC'(CQC' + DD')^{-1}$$

- 1) At γ fixed, the feasibility condition of the predictor is more stringent than that of the filter. They coincide as γ tends to infinity, to witness the fact that the Kalman predictor and filter share the same existence conditions.
- 2) Assuming the existence of the stabilizing solution of the Riccati equation satisfying the feasibility condition, the sufficient part of Theorem 3 is proved from the analysis result. Indeed, the analysis Riccati equation coincides with the synthesis Riccati equation once the gains F_1, F_2 (for the filter) or F_3 (for the predictor) are substituted there.

Proof of Theorem 4/5

For simplicity we study the case where $DB=0$, $DD=I$, (A,B) reachable. Moreover, we limit the proof to filters (predictors) in observer form. This is a restriction, but the analysis of all filters (predictors) ensuring the norm bounded is far from being trivial and is not within our scope. Notice that if $F_1=AK$ e $F_2=LK$ are the characteristic gains of a generic filter, the transfer function from the disturbance to the error is

$$T_{ew}=(L-LKC)(zI-A+AKC)^{-1}(AKD-B)+LKD$$

So that the analysis Riccati equation is

$$Q = A(X^{-1} - L' Lg^{-2})^{-1} A' + BB', \quad X = (I - KC)Q(I - KC)' + KK' \quad (1)$$

with the feasibility condition

$$g^2 I - LXL' > 0 \quad (2)$$

and asymptotic stability of

$$A(I - KC) + AXL' (g^2 I - LXL')^{-1} (I - KC)' L' \quad (3)$$

On the other hand, if F_3 is the gain of a generic one-step predictor, the transfer function is

$$T_{ew}=L(zI-A+F_3C)^{-1}(F_3D-B),$$

and then the analysis Riccati equation is:

$$Q = A(Q^{-1} + C'C - L' Lg^{-2})^{-1} + BB' + (F_3 - AYC'(I + CYC')^{-1})(I + CYC')(F_3 - AYC'(I + CYC')^{-1})' \\ Y = (Q^{-1} - L' Lg^{-2}) \quad (4)$$

with the feasibility condition

$$g^2 I - LQL' > 0 \quad (5)$$

and asymptotic stability of

$$A - F_3C + (A + F_3C)QL' (g^2 I - LQL')^{-1} L' \quad (6)$$

Now, assume that there exists $Q \geq 0$ satisfying $Q=A[Q^{-1}+C'C-L'L\gamma^2]^{-1}+BB'$, and such that $Q^{-1}+C'C-L'L\gamma^2 > 0$ and $A(Q^{-1}+C'C-L'L\gamma^2)^{-1} Q^{-1}$ stable. Take the filter characterized by $F_1=AK$, $F_2=LK$, with $K=(Q^{-1}+C'C)^{-1}C'$. From (1) it results $X=(Q^{-1}+C'C)^{-1}$ and hence

$$Q = AXA' + BB' + AXL' (g^2 I - LXL')^{-1} LXA' = A(X^{-1} - L' Lg^{-2})^{-1} A' + BB' = A(Q^{-1} + C'C - L' Lg^{-2})^{-1} A' + BB'$$

Therefore, the analysis Riccati equation admits a positive semidefinite solution with $g^2 I - LXL' = g^2 I - LQL' LQC' (I + CQC')^{-1} CQL' > 0$,

so that the feasibility condition is satisfied. Also the stability condition (3) is satisfied.

Hence the norm is less than γ .

Assume now that there exists $Q \geq 0$ satisfying $Q=A[Q^{-1}+C'C-L'L\gamma^2]^{-1}+BB'$, and such that $Q^{-1}-L'L\gamma^2 > 0$ and $A(Q^{-1}+C'C-L'L\gamma^2)^{-1} Q^{-1}$ stable. Take a predictor defined by $F_3=A(Q^{-1}+C'C-L'L\gamma^2)^{-1}C'$. From (4) it results that $F_3=AYC'(I+CYC')^{-1}$ and hence $Q=AYA'+BB'-AYC'(I+CYC')^{-1}CYA'=A(Q^{-1}+C'C-L'L\gamma^2)^{-1}A'+BB'$. The analysis Riccati equation admits a positive semidefinite solution and $Q^{-1}-L'L\gamma^2 > 0$ coincides with the feasibility condition (5) for the predictor. Also the stability condition (6) is satisfied.

Hence the norm is less than γ .

Vice-versa, assume that there exists a filter such that the norm is less than γ . Then, there exists Q solving (1)-(3). On the other hand, $X=(Q^{-1}+C'C)^{-1}+(K-(Q^{-1}+C'C)^{-1}C')(I+CQC')(K-(Q^{-1}+C'C)^{-1}C') \geq (Q^{-1}+C'C)^{-1}$ and hence $X^{-1} \leq Q^{-1}+C'C$ implies that Q solves the inequality $Q \geq A(Q^{-1}+C'C-L'L\gamma^2)^{-1}A'+BB'$ whereas $\gamma^2 I - LXL' > 0$ with $X > 0$ implies that $Q^{-1}+C'C-L'L\gamma^2 > 0$. The existence of Q solving $Q=A(Q^{-1}+C'C-L'L\gamma^2)^{-1}A'+BB'$ with $Q^{-1}+C'C-L'L\gamma^2 > 0$ and satisfying the stability condition follows from standard monotonicity results of the solutions of the Riccati equation.

Finally, assume that there exists a predictor such that the norm is less than γ . Then, there exists Q solving (4)-(6). Hence $Q \geq A(Q^{-1}+C'C-L'L\gamma^2)^{-1}A'+BB'$ with $\gamma^2 I - LQL' > 0$. The existence of Q solving $Q=A(Q^{-1}+C'C-L'L\gamma^2)^{-1}A'+BB'$ with $\gamma^2 I - LQL' > 0$ and satisfying the stability condition follows from standard monotonicity results of the solutions of the Riccati equation

J-SPECTRAL FACTORIZATION

The Riccati equation underlying the problem solution can be compactly written as:

$$Q = AQA' + BB' - [AQ\tilde{C}' + B\tilde{D}'] [R + \tilde{C}Q\tilde{C}']^{-1} [\tilde{C}QA' + \tilde{D}B']$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix}, \tilde{D} = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} DD' & 0 \\ 0 & -\mathbf{g}^2 I \end{bmatrix}$$

Let define:

$$\begin{aligned} H_1(z) &= D + C(zI - A)^{-1} B \\ H_2(z) &= L(zI - A)^{-1} B \end{aligned} \quad H(z) = \begin{bmatrix} H_1(z) & 0 \\ H_2(z) & I \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\mathbf{g}^2 I \end{bmatrix}$$

Theorem 6

Assume that A is stable. There exists a stable filter $F(z)$ such that $H_2(z) - F(z)H_1(z)$ is stable and

$$H_2(z) - F(z)H_1(z) \quad \text{stable}$$

$$\|H_2(z) - F(z)H_1(z)\|_{\infty} < \mathbf{g}$$

if and only if there exists a square $\Omega(z)$, stable with stable inverse, with stable $[\Omega(z)^{-1}]_{11}$, solving the factorization problem

$$H(z)JH(z^{-1})' = \Omega(z)J\Omega(z^{-1})'$$

All feasible filters can be parametrized in the following way:

$$F(z) = (\Omega_{21}(z) - \Omega_{22}(z)U(z))(\Omega_{11}(z) - \Omega_{12}(z)U(z))^{-1}, U(z) \in H_{\infty}, \|U(z)\|_{\infty} < \mathbf{g}$$

Notes:

From $z = H_2(z)w$, $y = H_1(z)w$, $\hat{z} = F(z)y$, it results $z - \hat{z} = (H_1(z) - F(z)H_2(z))w$ and then the filtering problem can be equivalently rewritten as a model matching problem.

Proof of Theorem 6

Assume that there exists a feasible filter. We limit ourselves to the case where the filter is in the observer form. From Theorem 4 we know that there exists a positive semidefinite solution Q of the Riccati equation. Moreover, such a solution is stabilizing and feasible. It is a matter of cumbersome computations to show that

$$\Omega(z) = \left[I + \tilde{C}(zI - A)^{-1}(B\tilde{D}' + AQC\tilde{C}') \right]^{-1} \begin{bmatrix} (DD' + CQC')^{1/2} & 0 \\ LQC'(DD' + CQC')^{-1/2} & \frac{1}{g}V^{1/2} \end{bmatrix}$$

$$V = g^2I - LQL' + LQC'(DD' + CQC')^{-1}CQL'$$

is a J -spectral factor. The stability of $\Omega(z)$ follows from stability of A . Stability of $\Omega(z)^{-1}$ and $[\Omega(z)^{-1}]_{11}$ follows from Q being a stabilizing solution. Existence of $V^{1/2}$ follows from the feasibility condition.

Vice-versa, assume that $\Omega(z)$ with the given properties exists and take the formula defining all filters $F(z)$. It follows

$$\begin{bmatrix} F(z) & -I \end{bmatrix} = -(\Omega_{22}(z) - \Omega_{21}(z)\Omega_{11}(z)^{-1}\Omega_{12}(z)) \left(I - U(z)\Omega_{11}(z)^{-1}\Omega_{21}(z) \right)^{-1} \begin{bmatrix} U(z) & I \end{bmatrix} \Omega(z)^{-1} \quad (*)$$

Notice that, thanks to the small gain theorem,

$$\left(I - U(z)\Omega_{11}(z)^{-1}\Omega_{21}(z) \right)^{-1}$$

is stable. Indeed, $U(z)$ is stable and $\|U(z)\|_\infty < \gamma$ and $\|\Omega_{11}(z)^{-1}\Omega_{21}(z)\| < \gamma^{-1}$ since $\Omega_{11}(z)\Omega_{11}(z)^{-1} - \gamma^2\Omega_{11}(z)\Omega_{11}(z)^{-1} = H_1(z)H_1(z)^{-1} > 0$ on the unit circle. Hence, stability of $F(z)$ follows from (*).

$$F(z)H_1(z) - H_2(z) = \begin{bmatrix} F(z) & -I \end{bmatrix} H(z) =$$

$$\left(\Omega_{22}(z) - \Omega_{21}(z)\Omega_{11}(z)^{-1}\Omega_{12}(z) \right) \left(I - U(z)\Omega_{11}(z)^{-1}\Omega_{21}(z) \right)^{-1} \begin{bmatrix} U(z) & I \end{bmatrix} \Omega(z)^{-1} H(z)$$

so that $F(z)H_1(z) - H_2(z)$ is stable. Finally,

$$(F(z)H_1(z) - H_2(z))J(F(z)H_1(z) - H_2(z))^\sim = \begin{bmatrix} F(z) & -I \end{bmatrix} H(z)JH(z)^\sim \begin{bmatrix} F(z)^\sim \\ -I \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F(z) & -I \end{bmatrix} \Omega(z)J\Omega(z)^\sim \begin{bmatrix} F(z)^\sim \\ -I \end{bmatrix} = (F(z)\Omega_{12}(z) - \Omega_{22}(z)) [U(z)U(z)^\sim - g^2I] (F(z)\Omega_{12}(z) - \Omega_{22}(z))^\sim$$

so that the norm of $F(z)H_1(z) - H_2(z)$ is less than γ .

DUALITY'

The prediction problem is dual with respect to the full-state control problem (x is measurable).

The filtering problem is dual with respect to the full-information control problem (x and w are measurable).

$$S : \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bw(t) + \\ \mathbf{e}(t) = Lx(t) + u(t) \\ y(t) = Cx(t) + Dw(t) \end{cases} \quad \text{OE}$$

$$S'_R : \begin{cases} \tilde{x}(t+1) = A'\tilde{x}(t) + L'\tilde{\mathbf{e}}(t) + C'\tilde{y}(t) \\ \tilde{w}(t) = B'\tilde{x}(t) + D'\tilde{y}(t) \end{cases} \quad \text{FI-SF}$$

Theorem 7

$\tilde{y}(t) = -K_1\tilde{x}(t) - K_2\tilde{\mathbf{e}}(t)$ stabilizes S'_R and $\|T_{\tilde{w}\tilde{\mathbf{e}}}\|_\infty < \mathbf{g}$ iff

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + K_1'(y(t) - C\mathbf{x}(t))$$

$$-u(t) = L\mathbf{x}(t) + K_2'(y(t) - C\mathbf{x}(t))$$

stabilizes S and $\|T_{\mathbf{e}w}\|_\infty < \mathbf{g}$.

Notice that if K_2 is zero (state-feedback), the filter is indeed a predictor. The proof of Theorem 7 is immediate. It is enough to verify that for any K_1 and K_2 it results $T_{\mathbf{e}w} = T_{\tilde{w}\tilde{\mathbf{e}}}'$. Actually, an extended version of this result allows to link any full-information controller $K(z)$ for system S'_R to a filter $F(z)$ for system S .

KREIN SPACES

The filtering (prediction) problem can be interpreted as a Kalman filtering (prediction) problem in the Krein space (instead of Hilbert space).

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + v_1(t) \\ z(t) = Lx(t) \\ y(t) = \tilde{C}x(t) + v_2(t) \end{cases}$$

with

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix}, \quad E \left[\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1' & v_2' \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} BB' & BD' & 0 \\ DB' & DD' & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{g}^2 I \end{bmatrix}$$

RISK SENSITIVITY

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + v_1(t) \\ y(t) &= Cx(t) + v_2(t)\end{aligned}$$

where the noises are white gaussian noises with zero mean.

The problem of the risk sensitive filter is to minimize

$$\min_{\hat{z}(y)} \mathbf{m}(\mathbf{J}) = \min_{\hat{z}(y)} \left[-\frac{2}{\mathbf{J}} \log \left(E \left(e^{-\frac{\mathbf{J}}{2} \|\hat{z}(y) - Lx\|^2} \right) \right) \right]$$

The parameter \mathbf{q} is the risk parameter

$\mathbf{q}=0$ risk-neutral	Kalman
$\mathbf{q}>0$ risk-seeking	modified Kalman
$\mathbf{q}<0$ risk-adverse	H_∞

The solution of the problem with $\mathbf{q}<0$ coincides with the solution of the H_∞ filter with $\mathbf{g}^2 = -\mathbf{q}^{-1}$.

MIXED H_2/H_∞ FILTERING

It makes sense to distinguish between two classes of disturbances: those whose statistics is known and those which are only requested to be bounded. For instance, in general, the spectral characteristics of the transducer errors are known whereas those related to modelling errors are unknown. Consequently, we can write a mixed filtering problem associated to a variable $z(t)$:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bw(t) = Ax(t) + B_1w_1(t) + B_2w_2(t)$$

$$z(t) = Lx(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Dw(t) = Cx(t) + D_1w_1(t) + D_2w_2(t)$$

$$\mathbf{e}(t) = z(t) - \hat{z}(t)$$

Mixed Problem

Find a filter solving:

$$\inf \left\{ \|T_{\mathbf{e},w_1}(F)\|_2 \text{ s.t. } \|T_{\mathbf{e},w_2}(F)\|_\infty \leq \mathbf{g} \right\}$$

The solution to this problem is non trivial if $\mathbf{g} < \|T_{\mathbf{e},w_2}(\text{Kalman})\|_\infty$.

Up to now there not exist a closed-form solution. It can be proven that the optimal mixed solution F^o is on the “boundary”, i.e. such that

$$\|T_{\mathbf{e},w_2}(F^o)\|_\infty = \mathbf{g}$$

Obviously, the mixed problem makes sense since there exist an infinite number of filters F (a parametrized family) such that $\|T_{\mathbf{e},w_2}(F)\|_\infty \leq \mathbf{g}$

OBSERVATIONS

The gain F_3 of the predictor ensuring the norm less than \mathbf{g} can be parametrized in the following way: $F_3 = W_1^{-1} W_2$, where (W_1, W_2) satisfies an elliptic equation.

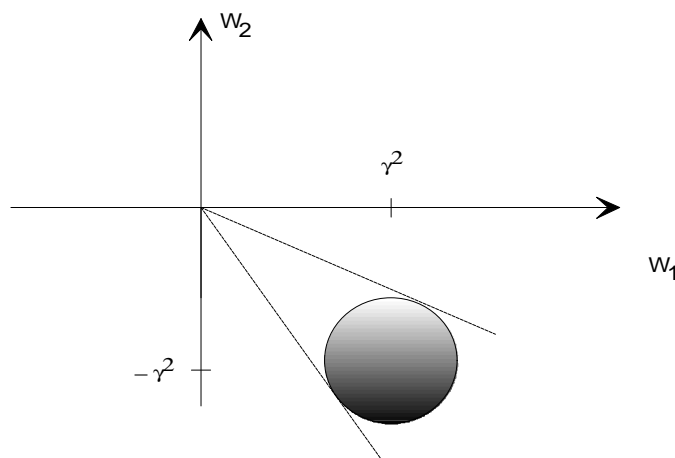
Convex Optimization

$$\min \text{tr}(XW) \geq \min \left\| T_{\text{ew}}(W_1^{-1} W_2) \right\|_2^2, \quad W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix}$$

where X depends from the data. If $w_1 = w_2$, then one obtains the central predictor. In this way one simply minimizes an upper bound of the real cost. The solution may be too conservative.

Search for boundary values

The boundary values are (norm equal to \mathbf{g}) on the tangent sets between the ellipsoid and the planes passing through the origin.

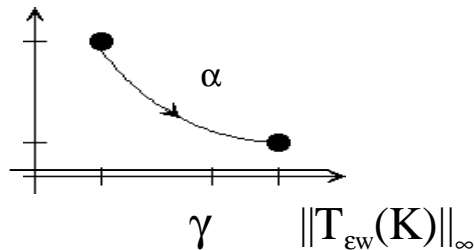


a - PROCEDURE

We can parametrize with a scalar variable a family of predictor (defined by the only gain K) which ensure the norm less than \mathbf{g} with minimal two norm.

Idea

$$\|T_{\varepsilon w}(K)\|_2$$



$$K(\alpha) = (1-\alpha)K_c + \alpha[AQ(\alpha)C' + BD'] (CQ(\alpha)C' + DD')^{-1}$$

$$Q = \bar{A}Q\bar{A}' + \bar{B}\bar{B}' - (2\mathbf{a} - \mathbf{a}^2) (\bar{A}QC' + \bar{B}D') (CQC' + DD')^{-1} (\bar{A}QC' + \bar{B}D')$$

$$\bar{A} = A - K_c C, \quad \bar{B} = B - K_c D$$

where K_c is such that $\|T_{\varepsilon w}(K_c)\|_{\infty} < \mathbf{g}$

Theorem 8

Assume that (A, C) detectable and (A, B, C, D) without unstable zeros. Then there always exists $Q(\mathbf{a}) \geq 0$, " $\mathbf{a} \in \hat{\mathbf{I}} [0, 2]$ " with $A - K(\mathbf{a})C$ stable. The norm $\|T_{\varepsilon w}(K(\alpha))\|_2$ is nondecreasing, " $\mathbf{a} \in \hat{\mathbf{I}} [0, 1]$ ". There exists $\mathbf{a}^* \in \hat{\mathbf{I}} [0, 2]$ such that $\|T_{\varepsilon w}(K(\alpha^*))\|_{\infty} = \mathbf{g}$ and $\|T_{\varepsilon w}(K(\alpha))\|_2$ is minimized.

We need to compute the value of α closer to one and such that $\|T_{\varepsilon w}(K(\alpha^*))\|_{\infty} = \mathbf{g}$ (search)

FINITE HORIZON

$$S : \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bw(t) \\ z(t) = Lx(t) \\ y(t) = Cx(t) + Dw(t) \end{cases}$$

Finite horizon problem in $[1, T]$:

Find a linear causal filter based on $y(1), y(2), \dots, y(t), t \leq T$ providing an estimate $\hat{z}(t)$ guaranteeing a level of attenuation $\mathbf{g} > 0$, i.e. such that $J_F < 0$ for each $[w(\cdot) \ (x(0) - \hat{x}_0)'] \neq 0$, where

$$J_F = \sum_{t=1}^T \|z(t) - \hat{z}(t)\|^2 - \mathbf{g}^2 \left[\sum_{t=0}^T \|w(t)\|^2 + (x(0) - \hat{x}_0)' \Psi (x(0) - \hat{x}_0) \right]$$

Simplifying assumptions:

$$DB' = 0, \quad DD' = I$$

Theorem 9

A filter guaranteeing an attenuation level γ exists iff there exist two positive definite matrices Q, S such that

$$Q(t+1) = AS(t)^{-1}A + BB'$$

$$S(t+1) = Q(t+1)^{-1} + C'C - L'L / \mathbf{g}^2, \quad S(0) = \Psi'$$

The vector \hat{x}_0 is an a-priori estimate of x_0 , and $R > 0$ is a weighting matrix (it plays the role played by the initial covariance matrix in the Kalman filter design). Putting the two equations together we get the difference

Riccati equation: $Q(t+1) = A \left[Q(t)^{-1} + C'C - L'L / \mathbf{g}^2 \right]^{-1} + BB'$, with $Q(1) = A\Psi^{-1}A' + BB'$.

SOLUTION OF THE FINITE HORIZON PROBLEM

$$\mathbf{h}(t+1) = A\mathbf{h}(t) + K(t+1)[y(t+1) - CA\mathbf{h}(t)]$$

$$\hat{\mathbf{z}}(t) = L\mathbf{h}(t)$$

The gain is given by:

$$K(t) = Q(t)C'[I + CQ(t)C']^{-1}$$

where $Q(t)$ is the solution of the difference Riccati equation

QUESTIONS

Under which conditions it is possible to guarantee the existence of the time-varying filter for an arbitrarily long interval?

Under which conditions it is possible to guarantee the convergence for $t \rightarrow \infty$ to the H ∞ filter?

The time-varying filter can be written as

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + AK(t)[y(t) - C\mathbf{x}(t)]$$

$$\hat{\mathbf{z}}(t) = L\mathbf{x}(t) + LK(t)[y(t) - C\mathbf{x}(t)]$$

The gains $F_1(t) = AK(t)$, $F_2(t) = LK(t)$ have the same structure as in the stationary case (uncorrelated noises).

FEASIBILITY AND CONVERGENCE

1) A invertible

2) There exists the stabilizing solution Q_s of

$$Q = A \left[Q^{-1} + \tilde{C}' R^{-1} \tilde{C} \right]^{-1} A' + BB'$$

3) The pair (A, B) is reachable

Thanks to these assumptions, there exists the unique (positive semidefinite) solution of the Lyapunov equation

$$Y = \left[Q_s^{-1} + \tilde{C}' R^{-1} \tilde{C} \right]^{-1} A' Y A \left[Q_s^{-1} + \tilde{C}' R^{-1} \tilde{C} \right]^{-1} - \left[\tilde{C}' (R + \tilde{C} Q_s \tilde{C}')^{-1} \tilde{C} \right]$$

Theorem 10

(i) The solution $Q(t)$ of the difference Riccati equation is feasible, " $t > 0$, if, for some \mathbf{e} :

$$0 < Q(1) < Q_s + \left\{ \left[Y - \left[\tilde{C}' (R + \tilde{C} Q_s \tilde{C}')^{-1} \tilde{C} \right] \right] + \mathbf{e} I \right\}^{-1}$$

(ii) The solution $Q(t)$ of the difference Riccati equation is feasible and converges to the stabilizing solution Q_s if

$$0 < Q(1) < Q_s + [Y + \mathbf{e} I]^{-1}$$

It is possible to see that the conditions introduced in the theorem are also necessary in two significant cases: $L=0$ ($\gamma \rightarrow \infty$) and $C=0$. In the first case $Y=0$ and therefore one recovers the condition of convergence for the Kalman filter ($Q(1) > 0$), whereas, in the second case the condition of convergence is equivalent to $S(1) = Q(1)^{-1} + C'C - LL\gamma^2 > S_a$, where S_a is the antistabilizing solution of $S = (AS^{-1}A' + BB')^{-1} + C'C - LL\gamma^2$

g-SWITCHING

If $Q(1)$ is "too large", nothing can be said on the convergence of $Q(t, \gamma_s)$ towards the stabilizing solution $Q_s(\gamma)$ associated with a given value of $\gamma = \gamma_s$.

The convergence condition is: $0 < Q(1) < Q_s(\mathbf{g}) + [Y(\mathbf{g}) + \mathbf{e}I]^{-1}$.

Theorem 11

- (i) The solution $Y(\gamma)$ of the Lyapunov equation goes to zero for $\gamma \rightarrow \infty$
- (ii) The stabilizing solution $Q_s(\gamma)$ of the Riccati equation increases as γ increases

Thanks to point (i) of the theorem, if $Q(1)$ does not satisfy the convergence condition, one can find a value of $\gamma = \gamma_1 > \gamma_s$ such that the convergence condition is satisfied for $\gamma = \gamma_1$. The solution of the Riccati equation with $\gamma = \gamma_1$ converges to $Q_s(\gamma_1)$. On the other hand, thanks to point (ii) of the theorem, one can say that

$$Q_s(\gamma_1) \leq Q_s(\gamma_s) < Q_s(\gamma_s) + (Y(\gamma_s)^{-1} + \mathbf{e}I)^{-1}$$

So that $\mathbf{e} > 0$ and $t_e > 0$ are such that

$$Q(t_e, \gamma_1) < Q_s(\gamma_s) + (Y(\gamma_s)^{-1} + \mathbf{e}I)^{-1}.$$

Finally, imposing

$$\mathbf{g}(t) = \begin{cases} \mathbf{g}_1, & 1 \leq t < t_e \\ \mathbf{g}_s, & t \geq t_e \end{cases}$$

the solution $Q(t, \gamma(t))$ tends to $Q_s(\gamma_s)$ as $t \rightarrow \infty$.

The γ -switching strategy modifies the cost:

$$\tilde{J}_F = \sum_{t=1}^T \frac{\|r(t) - \hat{r}(t)\|^2}{\mathbf{g}^2(t)} - \left[\sum_{t=0}^T \|w(t)\|^2 + (x(0) - \hat{x}_0)' \Psi (x(0) - \hat{x}_0) \right]$$

EXAMPLE

$$A=0.5, B=[1 \ 0], C=3, D=[0 \ 1], L=2, T=1/12$$

$$Q(t+1) = 0.25 \frac{1}{Q(t)^{-1} + 9 - 4g^{-2}} + 1, \quad Q(1) = 4$$

Feasibility condition

$$Q(t) < \frac{g^2}{4 - 9g^2}$$

Algebraic Riccati equation

$$Q = 0.25 \frac{1}{Q^{-1} + 9 - 4g^{-2}} + 1 \quad \textcircled{R} \quad \text{there existse } Q_s(\gamma) \text{ for } \gamma > 0.6576$$

Choice: $\gamma_s = 0.66$

Hence, $Q_s(\gamma_s) = 1.5318$ is the stabilizing solution

$Q(1) < 5.4724$ feasibility condition

$Q(1) < 3.572$ convergence condition

Integrating the equation with $\gamma = \gamma_s$ it results $Q(t) = 4, 4.7167, 9.5394, -2.2089, 0.6066, \dots$ and then the feasibility is lost after three steps. Taking γ_1 in such a way that $4 < Q_s(\gamma_s) + Y^{-1}(\gamma_1)$. For example γ_1 close to γ_s satisfying this inequality is $\gamma_1 = 0.661$. Integrating the equation with $\gamma = \gamma_1$ it results $Q(t) = 4, 3.63, 3.07, \dots$ Since $Q(3) < 3.572$, it is possible to impose $\gamma = \gamma_s$ in the equation at time $t=3$ so that the solution converges to $Q_s(\gamma_s)$.

REFERENCES

- T.Basar, P.Bernhard, "H_∞ -Optimal Control and related minimax design problems- a dynamic game approach", Birkhauser, 1991.
- P.Bolzern, P.Colaneri, G.De Nicolao, "Transient and asymptotic analysis of discrete-time H_∞ filters", *European Journal of Control*, to appear.
- J.C.Geromel, P.L.D.Peres, S.R.Souza, "A convex approach to the mixed H₂/H_∞ control problem for discrete-time uncertain systems", *SIAM J. Control and Optimization*, Vol. 33, 6, pp. 1816-1833, 1995.
- M.Green, K.Glover, D.Limebeer, J.Doyle, "A J-spectral factorization approach to H_∞ control", *SIAM J. Control and Optimization*, 25,6, pp. 1350-1371.
- M.J.Grimble, A. El Sayed, "Solution of the H_∞ optimal linear filtering problem for discrete-time systems", *IEEE Trans. ASSP*, 38, 7, pp. 1092-1104, 1990.
- W.Haddad, D.Bernstein, D.Mustafa, "Mixed H₂/H_∞ - regulation and estimation", *Systems and Control Letters*, 16, 1991.
- B.Hassibi, T.Kailath, "H_∞ bounds for recursive-least square algorithms", *33rd Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista, pp. 3927-3938, 1994.
- B.Hassibi, T.Kailath, "H_∞ optimality of the LMS algorithms", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 44, 2, pp. 267-280, 1996.
- B.Hassibi, A.H.Sayed, T.Kailath, "Linear estimation in Krein spaces - Part II: Applications", *IEEE Trans. AC*, 41, pp. 34-49, 1996.
- B.Hassibi, A.H.Sayed, T.Kailath, "Linear estimation in Krein spaces - Part I: Theory", *IEEE Trans. AC*, 41, pp. 18-33, 1996.
- B.Hassibi, A.H.Sayed, T.Kailath, "H_∞ Optimality of the LMS algorithm", *IEEE Trans. ASSP*, 44, pp. 267-1022, 1996.
- D.H.Jacobson, "Optimal stochastic linear systems with exponential performance criteria and their relation to deterministic games", *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-18, 2, 1973.
- P.Lancaster, L.Rodman, "Algebraic Riccati Equations", Oxford Series Pub., 1995.
- D.J.Limebeer, M.Green, D.Walker, "Discrete-time H_∞ control", *Proc. 28th Conference on Decision and Control*, Tampa (USA), pp. 392-396, 1989.

H.Rotstein, M.Sznaier, M.Idan, "H₂/H_∞ filtering theory and an aerospace application", *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 6, pp. 347-366, 1996.

J.Speyer, J.Deyst, D.H.Jacobson, "Optimization of stochastic linear systems with additive measurement and process noise using exponential performance criteria", *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-19, pp.358-366, 1974.

J.L.Speyer, C.Fan, R.N.Banavar, "Optimal stochastic estimation with exponential cost criteria", *Proc. Conference on Decision and Control*, pp. 2293-2298, 1992.

A.A.Stoorvogel, A.Saberi, B.M.Chen, "The discrete-time H_∞ control problem with measurement feedback", *Int. J. Robust and Nonlinear Contr.*, 4, pp. 457-479, 1994.

Y.Theodor, U.Shaked, N.Berman, "Time-domain H_∞ identification", *IEEE Trans. on Aut. Control*, 41, pp. 1019-1022, 1996.

M.Vidyasagar, "Control System Synthesis: a factorization approach", MIT Press Series, 1985.

P.Whittle, "Risk Sensitive Optimal Control", New York: Wiley, 1990.

I.Yaesh, U.Shaked, "Game theory approach to optimal linear estimation in the minimum H_∞ norm sense", *28th Conference on Decision and Control*, Tampa, pp. 421-425, 1989.

I.Yaesh, U.Shaked, "A transfer function approach to the problem of discrete-time systems: H_∞-optimal linear control and filtering", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 36, 11, pp. 1264-1271, 1991.

I.Yaesh, U.Shaked, "Game theory approach to state-estimation of linear discrete-time processes and its relation to H_∞-optimal estimation", *Int. J. on Control*, 55, 6, pp. 1443-1452, 1992.