Capitolo 2

Segnali nel dominio del tempo e nella frequenza

In questo capitolo affrontiamo il problema della rappresentazione dei segnali, sia nel dominio del tempo che nel dominio della frequenza. Parte di questi argomenti sono stati già sviluppati in corsi precedenti: lo scopo, in questo contesto, è quello di integrare le conoscenze al fine da acquisire le capacità necessarie per affrontare proficuamente gli argomenti successivi.

2.1 Segnali nel tempo

Definiamo con t la variabile temporale e assumiamo che essa appartenga all'insieme dei numeri reali R. Un segnale $v(t)$ è una funzione misurabile (secondo Lebesgue) che mappa i numeri reali $\mathcal{R}$ in $\mathcal{R}^n$. L'insieme dei segnali è

$$\mathcal{S} = \{v : \ \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^n\}$$

I segnali così definiti formano uno spazio vettoriale rispetto all'addizione e alla moltiplicazione per uno scalare. Importanti per le applicazioni in problemi tipici dell'ingegneria, sono i due sottospazi

$$\mathcal{S}_+ = \{v \ : v(t) = 0, \ t < 0\}, \quad \mathcal{S}_- = \{v \ : v(t) = 0, \ t > 0\}$$

La grandezza di un segnale può essere misurata attraverso la definizione di opportune norme:

Norma in $\mathcal{L}_2$

La norma $\mathcal{L}_2$, su un intervallo di tempo finito o infinito. La norma $\mathcal{L}_2$ sull'intervallo finito di tempo $[0, T]$ è definita nel modo seguente:

$$\|v\|_{2, \ [0,T]} = \left\{ \int_0^T \|v(t)\|^2 dt \right\}^{1/2}$$

L'insieme dei segnali per cui questa norma è finita si indica con il simbolo $\mathcal{L}_2[0,T]$ e comprende ovviamente i segnali continui e limitati in $[0,T]$.

Per affrontare più avanti i problemi di stabilità, occorre considerare i segnali in un intervallo infinito. La norma $\mathcal{L}_2$ su un intervallo di tempo infinito è definita nel modo seguente:

$$\|v\|_2 = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \|v(t)\|^2 dt \right\}^{1/2}$$

e lo spazio vettoriale corrispondente è indicato con il simbolo $\mathcal{L}_2(-\infty,\infty)$. Tale spazio è costituito dalla somma diretta di $\mathcal{L}_2(-\infty,0] = S_- \cap \mathcal{L}_2(-\infty,\infty)$ e $\mathcal{L}_2[0,\infty) = S_+ \cap \mathcal{L}_2(-\infty,\infty)$.
Per stabilire se un segnale è in $\mathcal{L}_2[0,\infty)$ si può procedere per passi, definendo lo spazio esteso $\mathcal{L}_{2e}$ definito come

$$\mathcal{L}_{2e} = \{v \in \mathcal{L}_2[0,T],\ \forall T < \infty\}\,.$$

Nello spazio (di Hilbert) $\mathcal{L}_2(-\infty,\infty)$ il *prodotto interno* tra due funzioni v_1 e v_2 è definito come:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_1(t)' v_2(t) dt$$

e, come ogni prodotto interno, soddisfa la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*:

$$|\,\langle v_1, v_2 \rangle\,| \le \|v_1\|_2 \|v_2\|_2$$

I due segnali si dicono *ortogonali* se $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. Ovviamente risulta $\langle v, v \rangle = \|v\|_2^2$.

Norma in $\mathcal{L}_\infty$

Riveste notevole interesse anche lo spazio $\mathcal{L}_\infty$ delle funzioni di variabile reale tale che [1]

$$\text{ess }\sup_t \|f(t)\| < \infty$$

Sullo spazio $\mathcal{L}_\infty$ la norma è definita come segue:

$$\|f\|_\infty = \text{ess }\sup_t \|f(t)\|$$

E' facile osservare che lo spazio così integrato di norma è completo e quindi di Banach.

[1] La notazione ess sup indica l'estremo superiore essenziale della funzione $\|f(t)\|$, cioè l'estremo superiore a meno di un insieme di misura nulla:

$$\text{ess }\sup_t \|f(t)\| = inf\{c : \{\|f(x)\| > c\}\ ha\ misura\ nulla\}$$

Per le funzioni continue a tratti, l'estremo superiore essenziale coincide con l'estremo superiore.

Norma in $\mathcal{L}_1$

Mentre la norma $\mathcal{L}_2$ di un segnale scalare $f(t)$ misura l'energia totale, quella $\mathcal{L}_1$ misura il suo consumo totale, ed è definita nel modo seguente:

$$\|f\|_1 = \int_0^\infty |f(t)|dt$$

L'estensione al caso vettoriale o matriciale è semplice:

$$\|f\|_1 = \int_0^\infty \|f(t)\|dt$$

dove $\|f(t)\|$ rappresenta una qualsiasi norma del vettore (o matrice) numerica $f(t)$. In particolare, se si considera la norma uno, si ha

$$\|f\|_1 = \int_0^\infty max_j \sum_i |f_{ij}(t)|$$

2.1.1 Norma $\mathcal{L}_2$ del movimento libero dello stato

Consideriamo ora un segnale x generato dalle equazioni di stato:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

dove la matrice A ha dimensioni opportune. Notiamo che il segnale x rappresenta l'evoluzione libera, per $t \geq 0$, di un sistema lineare e invariante nel tempo a partire da un certo stato iniziale x_0 al tempo zero. Scriviamo intanto la soluzione formale:

$$x(t) = e^{At}x_0$$

dove e^{At} è la *matrice di transizione* dello stato. Allora

$$\|x\|^2_{2[0,T]} = \int_0^T x(t)'x(t)dt = x_0' \left\{ \int_0^T e^{A't}e^{At}dt \right\} x_0$$

Definiamo ora la matrice:

$$M(\tau) = \int_\tau^T e^{A'(t-\tau)}e^{A(t-\tau)}dt$$

e notiamo che

$$\frac{d}{dt}M(t) = -I - A(t)'M(t) - M(t)A(t), \quad M(T) = 0$$

col che la norma di x si ottiene risolvedo all'indietro l'equazione differenziale matriciale precedente e risulta:

$$\|x\|^2_{2[0,T]} = x_0'M(0)x_0$$

Poichè, com'è ovvio, tale norma è finita qualunque sia T finito, si ha che $x \in \mathcal{L}_{2e}$. Possiamo ora domandarci cosa succede se $T \to \infty$. Risulta subito chiaro che $M(\tau)$ potrebbe non esistere se $T \to \infty$. D'altra parte sappiamo dalla teoria dei sistemi lineari che la norma di $e^{A(t-\tau)}$ è esponenzialmente tendente a zero, per $t \to \infty$, se e solo se tutti gli autovalori di A hanno parte reale minore di zero (la matrice A è di *Hurwitz*). In tale caso, come abbiamo già affermato nel capitolo precedente, esiste un numero positivo α e un numero positivo β (che può essere scelto di poco superiore al valore assoluto della parte reale dell'autovalore di A più vicino all'asse immaginario), tale che:

$$\|e^{A(t-\tau)}\| \leq \alpha e^{\beta(t-\tau)}, \quad t \geq \tau$$

Quindi, per $T \geq \tau$ si ha

$$\begin{aligned}
\|M(\tau)\| &= \|\int_{\tau}^{T} e^{A'(t-\tau)} e^{A(t-\tau)} dt\| \\
&\leq \int_{\tau}^{T} \|e^{A(t-\tau)}\|^2 dt \\
&\leq \int_{\tau}^{T} \alpha^2 e^{2\beta(t-\tau)} dt \\
&= \frac{\alpha^2}{2\beta}(1 - e^{2\beta(T-\tau)}) \\
&\leq \frac{\alpha^2}{2\beta}
\end{aligned}$$

Allora esiste il limite di $M(\tau)$ per $T \to \infty$ e risulta:

$$\lim_{T \to \infty} M(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} e^{A'(t-\tau)} e^{A(t-\tau)} dt$$

Tale limite non dipende da τ, è indicato con M, e si può scrivere

$$M = \int_{0}^{\infty} e^{A't} e^{At} dt$$

E' immediato poi verificare che M è una matrice simmetrica e definita positiva, unica soluzione della cosidetta *equazione di Lyapunov*:

$$A'M + MA + I = 0$$

In conclusione, il movimento libero dello stato $x \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ se e solo se A è di Hurwitz. In tale caso, $\|x\|_2^2 = x_0' M x_0$.

L'equazione di Lyapunov permette di ricavare un risultato interessante che riguarda le specifiche temporali sullo stato di un sistema asintoticamente stabile e raggiungibile.

2.1.2 Norma $\mathcal{L}_\infty$ del movimento forzato dello stato

Consideriamo il sistema

$$\dot{x} = Ax + Bw \ , \quad x(0) = 0 \tag{2.1}$$
$$z = Cx \tag{2.2}$$

dove la matrice A è di Hurwitz e la coppia (A, B) è raggiungibile. Inoltre assumiamo che $w \in \mathcal{L}_2[0\ \infty)$. Vogliamo calcolare la quantità

$$\mathcal{G} := \sup_{\|w\|_2 \leq 1} \|z\|_\infty \tag{2.3}$$

dove, per la norma della variabile di uscita $\|z\|_\infty$, sono presi in considerazione i due casi seguenti:

$$\|z\|_\infty := \sup_{t \geq 0} \sqrt{z'(t)z(t)} \tag{2.4}$$

e

$$\|z\|_\infty := \sup_{t \geq 0} \max_i |z_i(t)| \tag{2.5}$$

dove $z_i(t)$ denota la i-esima componente scalare di $z(t)$.

Lemma 2.1 *Sia P la soluzione simmetrica e definita positiva dell'equazione di Lyapunov*

$$0 = AP + PA' + BB' \tag{2.6}$$

Le seguenti condizioni sono vere:

a) Per la norma (2.4) si ha $\mathcal{G} = \lambda_{max}^{1/2}(CPC')$ dove $\lambda_{max}(\cdot)$ denota il massimo autovalore di $(\cdot)$.

b) Per la norma (2.5) si ha $\mathcal{G} = d_{max}^{1/2}(CPC')$ dove $d_{max}(\cdot)$ denota il massimo elemento sulla diagonale di $(\cdot)$.

Prova Definiamo $v(x) := x'P^{-1}x$ e consideriamo il sistema (2.1)$-$(2.2) con un ingresso arbitrario w che soddisfa $\|w\|_2 \leq 1$. La derivata di $v(\cdot)$ lungo una traiettoria di tale sistema è:

$$\begin{aligned}
\dot{v}(x) &= x'(A'P^{-1} + P^{-1}A)x + 2w'B'P^{-1}x \\
&= -x'P^{-1}BB'P^{-1}x + 2w'B'P^{-1}x \\
&= w'w - (w - B'P^{-1}x)'(w - B'P^{-1}x) \\
&\leq \|w\|^2
\end{aligned}$$

che, dopo integrazione di entrambi i membri da 0 a $t \geq 0$ fornisce:

$$v(x(t)) = x'(t)P^{-1}x(t) \leq \|w\|_2^2 \leq 1$$

Questa diseguaglianza significa che le traiettorie $x(t)$, per tutti i $t \geq 0$, sono confinate nell'insieme $x'P^{-1}x \leq 1$ quando w rimane limitato $\|w\|_2 \leq 1$.

Punto a) Con $z = Cx$ e $\tilde{x} := P^{-1/2}x$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^2 &= \sup_{\|w\|_2 \leq 1} \|z\|_\infty^2 \\
&\leq \max \left\{ x'C'Cx \ ; \ x'P^{-1}x \leq 1 \right\} \\
&\leq \max \left\{ \tilde{x}'P^{1/2}C'CP^{1/2}\tilde{x} \ ; \ \tilde{x}'\tilde{x} \leq 1 \right\} \\
&\leq \lambda_{max}(P^{1/2}C'CP^{1/2}) \\
&\leq \lambda_{max}(CPC')
\end{aligned}$$

e rimane da dimostrare che esiste una traiettoria ammissibile $w(t)$ tale che $\|z\|_\infty^2$ è arbitrariamente vicina a $\lambda_{max}(CPC')$. A questo fine, consideriamo $T > 0$ fissato ma arbitrario

$$0 < S(T) := \int_0^T e^{At}BB'e^{A't}dt \leq P$$

e il segnale di ingresso tale che $w(t) = 0$ per tutti i valori di $t > T$ e

$$w(t) = B'e^{A'(T-t)}S(T)^{-1/2}\psi \ , \quad 0 \leq t \leq T$$

dove ψ è il vettore che deve essere determinato. Semplici conti mostrano che

$$\|w\|_2^2 = \int_0^\infty w'(t)w(t)dt = \int_0^T w'(t)w(t)dt = \psi'\psi$$

e

$$z(T) = C\int_0^T e^{A(T-\tau)}Bw(\tau)d\tau = CS(T)^{1/2}\psi$$

Conseguentemente, scegliendo ψ come l'autovettore di norma unitaria associato al massimo autovalore della matrice $S(T)^{1/2}C'CS(T)^{1/2}$, l'ammissibilità del segnale di ingresso w è garantita e

$$\begin{aligned}
\|z\|_\infty^2 &= \sup_{t \geq 0} z'(t)z(t) \\
&\geq \psi'S(T)^{1/2}C'CS(T)^{1/2}\psi \\
&\geq \lambda_{max}(CS(T)C')
\end{aligned}$$

la prova è conclusa dal momento che $S(T)$ diventa arbitrariamente vicina a P quando T aumenta.

Punto b) Con $z_i = C_i x$ dove C_i è la riga i-esima della matrice C e $\tilde{x} := P^{-1/2}x$, abbiamo

$$\mathcal{G}^2 = \sup_{\|w\|_2 \leq 1} \|z\|_\infty^2$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \max_{x,i} \left\{ x'C_i'C_i x \ ; \ x'P^{-1}x \leq 1 \right\} \\
&\leq \max_{i} \max_{\tilde{x}} \left\{ \tilde{x}'P^{1/2}C_i'C_i P^{1/2}\tilde{x} \ ; \ \tilde{x}'\tilde{x} \leq 1 \right\} \\
&\leq \max_{i} \lambda_{max}(P^{1/2}C_i'C_iP^{1/2}) \\
&\leq \max_{i} C_iPC_i' \\
&\leq d_{max}(CPC')
\end{aligned}
$$

Come prima, rimane da determinare un ingresso ammissibile tale che l'uguaglianza valga. Questo può essere ottenuto dalla stessa funzione$w(t)$ già definita in precedenza e da una scelta opportuna del vettore ψ. Infatti, si prenda ψ_i come l'autovettore di norma unitaria associato al massimo autovalore della matrice $S(T)^{1/2}C_i'C_iS(T)^{1/2}$, e si scelga $\psi = \psi_l$ where $C_iS(T)C_i' \leq C_lS(T)C_l'$ per tutti gli indici $i = 1, 2, \ldots$, allora w è ammisibile e

$$
\begin{aligned}
\|z\|_\infty^2 &= \sup_{t \geq 0} \max_{i} z_i'(t)z_i(t) \\
&\geq \max_{i} \psi' S(T)^{1/2}C_i'C_iS(T)^{1/2}\psi \\
&\geq C_lS(T)C_l' \\
&\geq d_{max}(CS(T)C')
\end{aligned}
$$

la prova è allora conclusa dal momento che, come detto prima, $S(T)$ diventa arbitrariamente vicina a P quando T aumenta.

Osservazione 2.1 Nella prova del Lemma 2.1, è stato assunto che la soluzione dell'equazione lineare matriciale (2.6) è definita positiva. Questo avviene se la coppia (A, B) è raggiungibile. Se questa ipotesi non è verificata, il risultato vale ancora. In questo caso, usando la scomposizione di Kalman è immediato osservare che l'uscita $z(t)$ in (2.2) dipende solo dalla parte raggiungibile del sistema.

Osservazione 2.2 Le relazioni tra entrambe le espressioni di $\mathcal{G}$ per le norme (2.4) e (2.5) sono

$$
d_{max}(CPC') \leq \lambda_{max}(CPC') \leq \text{trace}(CPC')
$$

che anche implica, in entrambi i casi, che $\mathcal{G} \leq \|T(z, w; s)\|_2$.

Osservazione 2.3 *(Convessità)*
Una funzione matriciale $f(X)$ definita in un insieme convesso Ω si dice convessa se per ogni X_1 e X_2 in Ω si ha, per ogni $\alpha \in [0, 1]$:

$$
f(X) \leq \alpha f(X_1) + (1 - \alpha)f(X_2)
$$

Si può dimostrare che una funzione matriciale $f(X)$ definita in un insieme convesso Ω è convessa se e solo se per ogni $X_0 \in \Omega$ esiste una matrice di dimensioni opportune Λ_0 tale che, per ogni $X \in \Omega$:

$$f(X) \geq f(X_0) + < \Lambda_0, X - X_0 >$$

dove il simbolo $<, >$ indica il prodotto scalare [2].

Ad esempio, si consideri l'insieme $\mathcal{P}$ delle matricisimmetriche e definite positive. La funzione a elementi reali $g(X) : \mathcal{P} \longrightarrow R$ definita come $g(X) := \lambda_{max}(X)$ risulta una funzione convessa. Per verificare ciò si prenda un'altra matrice X_0 e l'autovettore di norma unitaria x_0 associato al suo autovalore massimo. Si ha:

$$\begin{aligned} g(X) &= \lambda_{max}(X) \\ &\geq x_0' X x_0 \\ &= x_0' X_0 x_0 + < x_0 x_0', X - X_0 > = g(X_0) + < x_0 x_0', X - X_0 > \end{aligned}$$

che implica la covessità di $g(X)$. Lo stesso è vero per la funzione $g(X) := d_{max}(X)$. Per valutare ciò, si prenda $X_0 \in \mathcal{P}$ e e_0 la colonna della matrice identità tale che $e_0' X_0 e_0 = g(X_0)$. Per tutti i valori di $X \in \mathcal{P}$ abbiamo

$$\begin{aligned} g(X) &= d_{max}(X) \\ &\geq e_0' X e_0 \\ &= e_0' X_0 e_0 + < e_0 e_0', X - X_0 > = g(X_0) + < e_0 e_0', X - X_0 > \end{aligned}$$

che è la condizione di convessità. Si noti ancora che entrambe le funzioni sono non differenziabili in $\mathcal{P}$ e sono funzioni *non decrescenti* nel senso che per ogni $X_1, X_2 \in \mathcal{P}$ tale che $X_1 \leq X_2$, si ha $g(X_1) \leq g(X_2)$.

Esempio 2.1 Si consideri il sistema (2.1)−(2.2) con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -9 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il nostro scopo è illustrare il risultato del Lemma 2.1. La soluzione definita positiva P dell'equazione di Lyapunov (2.6) fornisce

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_{max}^{1/2}(CPC') & = & 2.16 \\ d_{max}^{1/2}(CPC') & = & 1.68 \end{array} \right.$$

D'altra parte, prendendo $T = 5$, può essere verificato che $S(T) \approx P$ e quindi, in corrispondenza dell'ingresso

$$w(t) = \left\{ \begin{array}{lcl} B' e^{A'(T-t)} P^{-1/2} \psi & , & 0 \leq t \leq T \\ 0 & , & t > T \end{array} \right.$$

[2] Il prodotto scalare $< \Lambda_0, \Lambda_1 >$ tra due matrici si può definire come $\mathrm{tr}[\Lambda_0' \Lambda_1]$.

il sistema produce un'uscita $z(t)$ che permette di calcolare la funzione

$$f(t) := \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{z_1(t)^2 + z_2(t)^2} \\ \max\{|z_1(t)|, |z_2(t)|\} \end{array} \right.$$

per ogni norma usata per definire $\mathcal{G}$. E' interessante verificare che in entrambi i casi

$$\max_{t \geq 0} f(t) \approx \mathcal{G}$$

e $\|w\|_2 \approx 1$ come è richiesto nella prova del Lemma 2.1.

2.1.3 Norma $\mathcal{L}_1$ della risposta forzata

Ricordiamo che la risposta forzata si scrive come:

$$y_f(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

Abbiamo visto (Teorema 1.18) che $y_f(t)$ è limitata qualunque sia l'ingresso limitato (BIBO stabilità) se e solo se

$$\int_0^\infty \|g(t)\|dt < \infty$$

Se si prende la norma uno di $g(t)$ possiamo allora dire che il sistema è BIBO stabile se e solo se $g \in \mathcal{L}_1$, con

$$\|g\|_1 := \int_0^\infty \max_j \sum_{i=1}^p |g_{ij}(t)|dt < \infty$$

Inoltre,

$$\begin{array}{rcl} \max_i |y_{fi}(t)| & = & \max_i |\int_0^t e_i' g(t - \tau)u(\tau)d\tau| \leq \max_i \int_0^t |e_i' g(t - \tau)u(\tau)|d\tau \\ & \leq & \max_i \int_0^t \sum_{j=1}^m |g_{ij}(t - \tau)||u_j(\tau)|d\tau \\ & \leq & \max_i \int_0^t \sum_{j=1}^m |g_{ij}(\sigma)|d\sigma \max_j \max_{\tau \in (0,t)} |u_j(\tau)| \\ & \leq & \|g'\|_1 \max_t \max_j |u_j(t)| \end{array}$$

e quindi

$$\max_t \max_i |y_{fi}(t)| \leq \|g'\|_1 \max_t \max_i |u_i(t)|$$

Infine, fissato T e scegliendo l'ingresso limitato

$$u_j(t) = sgn\ g_{ij}(T - t)$$

abbiamo

$$\max_i |y_{fi}(T)| \quad = \quad \max_i |\int_0^T e_i' g(T-\tau)u(\tau)d\tau| = \max_i \int_0^T \sum_{j=1}^m |g_{ij}(T-\tau)|d\tau$$

e quindi

$$\max_t \max_i |y_{fi}(t)| = \|g'\|_1$$

La norma $\mathcal{L}_1$ di $g'(t)$ rappresenta dunque il valore massimo del rapporto tra la norma infinita dell'uscita forzata e la norma infinita dell'ingresso per ogni ingresso limitato [3]:

$$\|g'\|_1 = \sup_{u\in\mathcal{L}_\infty} \frac{\|y_f\|_\infty}{\|u\|_\infty}$$

2.2 Segnali in frequenza

Un segnale in frequenza $V(j\omega)$ è una funzione misurabile che gode della proprietà $(V(j\omega))^* = V(-j\omega)'$. La variabile ω rappresenta la frequenza misurata in radianti per unità di tempo. La norma $\mathcal{L}_2$ in frequenza è definita come:

$$\|V\|_2 = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} V(-j\omega)'V(j\omega)d\omega\right\}^{1/2}$$

I segnali che ammettono tale norma finita si dice appartenere allo spazio di Lebesgue in frequenza, indicato con il simbolo $\mathcal{L}_2$. Questo spazio è di Hilbert una volta dotato del prodotto interno:

$$\langle V_1, V_2\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V_1(-j\omega)'V_2(j\omega)d\omega$$

Si noti che il simbolo del prodotto interno è il medesimo usato per lo spazio $L_2(-\infty,\infty)$. La ragione è che tale prodotto (e quindi la norma) si conserva nella trasformazione di Fourier, definita come [4]:

$$V(j\omega) = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} v(t)e^{-j\omega t}dt$$

[3] Si osservi che se si prende la norma uno del segnale $g(t)$ nel modo seguente

$$\|g\|_1 := \int_0^\infty \|g(t)\|_\infty dt = \int_0^\infty \max_{i=1,\cdots,p}\sum_{j=1}^m |g_{ij}(t)|$$

allora risulta

$$\|g\|_1 = \sup_{u\in\mathcal{L}_\infty}\frac{\|y_f\|_\infty}{\|u\|_\infty}$$

[4] Il significato del limite è nella norma in $\mathcal{L}_2$, cioè $\|V - \int_{-T}^{T} v(t)e^{-j\omega t}dt\|_2 \to 0$, quando $T\to\infty$.

C'è quindi un isomorfismo tra $\mathcal{L}_2(-\infty,\infty)$ e $\mathcal{L}_2$ che, come abbiamo già detto, conserva il prodotto interno e la norma (*identità di Parseval*):

$$\langle V_1, V_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle\,, \quad \|V\|_2 = \|v\|_2$$

Lo spazio di Hardy $\mathcal{H}_2$ è definito dalle funzioni V di una variabile complessa s, che sono analitiche [5] nel semipiano destro aperto e tali che esista la norma:

$$\|V\|_2 = \left\{ \sup_{\alpha>0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\alpha - j\omega)' V(\alpha + j\omega) d\omega \right\}^{1/2}$$

Lo spazio associato è indicato con il simbolo $\mathcal{H}_2$. Per ogni funzione di questo spazio si ha che il limite di $V(\alpha + j\omega)$ per $\alpha \to 0$ esiste per quasi tutti i valori di ω (*Teorema di Fatou*). Possiamo allora definire

$$V_{lim}(j\omega) = \lim_{\alpha\to 0} V(\alpha + j\omega)$$

Inoltre la corrispondenza tra V e V_{lim} è lineare e iniettiva. Il valore superiore della norma avviene sempre per $\alpha = 0$, e quindi possiamo scrivere

$$\|V\|_2^2 = \|V_{lim}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V_{lim}(-j\omega)' V_{lim}(j\omega) d\omega$$

In conclusione lo spazio $\mathcal{H}_2$ può essere visto come un sottospazio proprio di $\mathcal{L}_2$. Inoltre $\mathcal{H}_2$ è isomorfo a $\mathcal{L}_2[0,\infty)$ sotto la trasformazione bilatera di Laplace (*Teorema di Paley-Wiener*), definita come:

$$V(s) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-st} dt$$

Per segnali definiti per $t \geq 0$ si usa la trasformata di Laplace *monolatera*

$$V(s) = \int_{0}^{\infty} v(t) e^{-st} dt$$

che è in effetti molto utilizzata nello studio dei segnali provenienti dai sistemi dinamici lineari. Tale trasformata sarà quindi denominata nel seguito trasformata di Laplace, senza ulteriori specificazioni.

Si può definire $\mathcal{H}_2^-$ come il sottospazio proprio di $\mathcal{L}_2$ costituito dalle funzioni analitiche nel semipiano sinistro, o anche come le funzioni $V(s)$ tali che $V(-s) \in \mathcal{H}_2$. Ovviamente tale spazio è isomorfo a $\mathcal{L}_2(-\infty, 0]$ e le sue funzioni sono ortogonali a quelle di $\mathcal{H}_2$.

[5] Una funzione $V(s)$ si dice analitica in un insieme aperto e connesso Ω se per ogni $s_0 \in \Omega$ esiste finito il

$$\lim_{s\to s_0} \frac{V(s) - V(s_0)}{s - s_0}$$

Una discussione a parte meritano le funzioni (vettoriali) $V(s)$ per cui

$$\|V(s)\|_\infty = \sup_\omega \|V(j\omega)\| < \infty$$

Lo spazio di tali funzioni è normalmente indicato con il simbolo $\mathcal{L}_\infty$. Se $V(s)$ è inoltre analitica nel semipiano complesso destro aperto ed ivi limitata, lo spazio corrispondente è indicato con il simbolo $\mathcal{H}_\infty$ e viene dotato della norma

$$\|V(s)\|_\infty = \sup_{\sigma>0,\ \omega} \|V(\sigma + j\omega)\|$$

Sempre per il teorema di Fatou esiste, per quasi tutti i valori di ω, il $\lim_{\sigma\to 0_+} V(\sigma + j\omega)$. Indicando ancora con $V_{lim}(j\omega)$ tale limite, risulta inoltre (*Teorema del massimo modulo*)

$$\|V(s)\|_\infty = \text{ess } \sup_\omega \|V_{lim}(j\omega)\|$$

Di fatto, la norma in $\mathcal{L}_\infty$ e in $\mathcal{H}_\infty$ si calcola gaurdando il valore superiore della norma di $V(s)$ sull'asse immaginario.

Osservazione 2.4 *Le considerazioni espresse per le norme dei segnali scalari o vettoriali viste in precedenza si possono generalizzare facilmente al caso matriciale. Se $V(s)$ è una funzione matriciale in $\mathcal{L}_\infty$ o in $\mathcal{H}_\infty$ allora*

$$\|V(s)\|_\infty = \sup_\omega \|V(j\omega)\| < \infty$$

dove la norma della matrice è intesa essere la norma spettrale, cioè il massimo valore singolare della matrice. Infine, se $V(s)$ è una funzione matriciale in $\mathcal{L}_2$ o in $\mathcal{H}_2$ si ha:

$$\|V(s)\|_2 = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}\left[V(-j\omega)'V(j\omega)\right] d\omega \right\}^{1/2}$$

2.3 Segnali a trasformata razionale

In questo paragrafo studiamo due probemi specifici relativi ai segnali scalari temporali con trasformata di Laplace razionale, cioè esprimibile come rapporto di polinomi della variabile complessa: l'antitrasformazione attraverso lo sviluppo di Heaviside e la limitatezza espressa nel dominio delle trasformate.

2.3.1 Sviluppo di Heaviside

Tra i metodi di antitrasformazione di un segnale a trasformata razionale un ruolo concettualmente rilevante è giocato dal cosidetto *sviluppo di Heaviside.* Consideriamo dunque una funzione razionale propria, cioè scrivibile come rapporto di polinomi:

$$V(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

I coefficienti b_i e a_i dei due polinomi $N(s)$ e $D(s)$ sono supposti essere reali. Il metodo che sarà ora esposto ha come presupposto la conoscenza delle radici del denominatore di $V(s)$, cioè dei suoi poli $p_1, p_2, \cdots, p_n$. Per semplificare la procedura, lasciando ovviamente al lettore la semplice estensione, supponiamo anche che la funzione razionale $V(s)$ sia *propria*, cioè $m \leq n$. Inoltre, senza ledere la generalità supponiamo che il polinomio a denominatore $D(s)$ sia monico, cioè $a_0 = 1$. Quindi

$$V(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

L'idea alla base dello sviluppo di Heaviside è quello di scomporre la funzione razionale $V(s)$ nella somma di n funzioni razionali più semplici, e cioè facilmente antitrasformabili. Più precisamente, se q è il numero di poli distinti la somma in questione prende la struttura

$$V(s) = \sum_{i=1}^{q} C_i(s) \tag{2.7}$$

dove $C_i(s), i = 1, \cdots q$ sono funzioni razionali ognuna delle quali è associata al polo i-esimo.
Sebbene non strettamente necessario, suddividiamo la successiva spiegazione del metodo in due parti, la prima delle quali è relativa al caso più semplice nel quale i poli p_i di $V(s)$ sono distinti, cioè $q = n$.

Poli distinti

Si suppongano quindi poli di $V(s)$ distinti e si calcolino le quantità seguenti:

$$A_0 = \lim_{s\to\infty} V(s) \tag{2.8}$$

$$A_k = \lim_{s\to p_k} V(s)(s-p_k), \;\; k = 1, 2, \cdots n \tag{2.9}$$

I numeri A_k sono i *residui* relativi ai poli p_k. Risulta (la semplice verifica delle equazioni (2.8), (2.9) è lasciata al lettore):

$$V(s) = A_0 + \frac{A_1}{(s-p_1)} + \frac{A_2}{(s-p_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(s-p_n)}$$

e quindi, nell'equazione (2.7)

$$C_0(s) = A_0, \;\; C_k(s) = \frac{A_k}{(s-p_k)}, \;\; k = 1, 2, \cdots, n$$

Esempio 2.2 *Si vuole determinare il segnale $v(t)$, $t \geq 0$, che ammette come trasformata di Laplace la funzione razionale*

$$V(s) = \frac{(1-s)^2}{s(s+1)}$$

I due poli della funzione $V(s)$ sono $p_1 = 0$ e $p_2 = -1$. I residui si calcolano attraverso le equazioni (2.8), (2.9). Risulta $A_0 = 1$, $A_1 = 1$ e $A_2 = -4$. Quindi

$$V(s) = 1 + \frac{1}{s} - \frac{4}{(s+1)}$$

Conseguentemente $v(t) = \delta(t) + 1 - 4e^{-t},\ t \geq 0$.

Esempio 2.3 *Si vuole determinare il segnale $v(t)$, $t \geq 0$, che ammette come trasformata di Laplace la funzione razionale*

$$V(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2},\ \xi \in [0,\ 1),\ \omega_n > 0$$

Si noti che sotto le ipotesi fatte sui parametri, i due poli della funzione $V(s)$ sono complessi coniugati, cioè $p_1 = p_2{}^* = \alpha + j\beta$, con $\alpha = -\xi\omega_n$ e $\beta = \omega_n(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}$. Il parametro ξ è detto coefficiente di smorzamento mentre ω_n è la pulsazione naturale. I residui si calcolano attraverso le equazioni (2.8), (2.9). Risulta $A_0 = 0$, $A_1 = A_2{}^* = (2j\beta)^{-1}$. Quindi

$$v(t) = 2\mathrm{Re}(A_1 e^{p_1 t}) = \frac{1}{\beta} e^{\alpha t} sin(\beta t),\ t \geq 0 \tag{2.10}$$

Il segnale $v(t)$ ha dunque un andamento oscillatorio smorzato, di periodo $T = \frac{2\pi}{\beta}$ e smorzamento direttamente proporzionale a $-\alpha$. Se il coefficiente di smorzamento è zero ($\xi = 0$) allora $\alpha = 0$ e $v(t) = (1/\omega_n) sin(\omega_n t)$ è un segnale periodico.
Si noti infine che quando $\xi = 1$ i poli di $V(s)$ sono reali coincidenti in $-\omega_n$ e risulta $\alpha = -\omega_n$ e $\beta = 0$. Il segnale $v(t)$ può essere ricavato direttamente dalla (2.10) calcolando il limite per $\beta \to 0$ e risulta $v(t) = te^{-\omega_n t}$.

Poli coincidenti

Si suppone ora che i poli p_i possano essere coincidenti. Precisamente, si denoti con q il numero di poli distinti e con r_i la molteplicità del polo p_i, $i = 1, 2, \cdots q$, cosicchè $n = \sum_{i=1}^{q} r_i$ e

$$\begin{aligned}
&p_1 = p_2 = \cdots = p_{r_1} \\
&p_{r_1+1} = p_{r_1+2} = \cdots = p_{r_1+r_2} \\
&p_{r_1+r_2+\cdots+r_{q-1}} = p_{r_1+r_2+\cdots+r_{q-1}+1} = p_{r_1+r_2+\cdots+r_{q-1}+2} = \cdots = p_n
\end{aligned}$$

$$A_0 = \lim_{s\to\infty} V(s) \tag{2.11}$$

$$A_{i,r_i-k} = \lim_{s\to p_i} \frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k} V(s)(s-p_i)^{r_i},\ k = 0, 1, \cdots r_i - 1 \tag{2.12}$$

Il numero A_{i,r_i-k}, $i = 1, 2, \cdots q$, $k = 1, 2, \cdots r_i - 1$ è il residuo di ordine k del polo p_i. Risulta (la semplice verifica delle equazioni (2.11), (2.12) è lasciata al lettore):

$$\begin{aligned} V(\lambda) = A_0 + & \\ & + \frac{A_{1,1}}{(s-p_1)} + \frac{A_{1,2}}{(s-p_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1,r_1}}{(s-p_1)^{r_1}} \\ & + \frac{A_{2,1}}{(s-p_2)} + \frac{A_{2,2}}{(s-p_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2,r_2}}{(s-p_2)^{r_2}} \\ & + \cdots \\ & + \frac{A_{q,1}}{(s-p_q)} + \frac{A_{q,2}}{(s-p_q)^2} + \cdots + \frac{A_{q,r_q}}{(s-p_q)^{r_q}} \end{aligned}$$

e quindi, nell'equazione (2.7)

$$C_0(\lambda) = A_0,\ C_i(s) = \sum_{j=1}^{r_i} \frac{A_{i,j}}{(s-p_i)^j},\ i = 1, 2, \cdots, q \tag{2.13}$$

Alternativamente, i residui di ordine $k \geq 1$ possono essere ricavati senza ricorrere alle derivazioni, nel seguente modo ricorsivo:

$$A_{i,r_i-k} = \lim_{s \to p_i} \left[V(s) - \sum_{g=0}^{k-1} \frac{A_{i,r_i-g}}{(s-p_i)^{r_i-g}} \right] \quad k = 1, \cdots r_i - 1$$

Esempio 2.4 *Si vuole determinare il segnale $v(t)$, $t \geq 0$, che ammette come trasformata di Laplace la funzione razionale*

$$V(s) = \frac{2s-3}{(s+1)^2(s+2)}$$

La funzione ha due poli distinti ($q = 2$), che sono $p_1 = -2$ e $p_2 = -1$. Dalle (2.11), (2.12) si ottiene $A_0 = 0$, $A_{1,1} = -7$, $A_{2,1} = 7$, $A_{2,2} = -5$. Quindi

$$v(t) = -7e^{-2t} + 7e^{-t} - 5te^{-t},\ t \geq 0$$

2.3.2 Segnali razionali limitati

Un segnale scalare $v(t)$ si dice limitato in $t \geq 0$ quando esiste un numero positivo M tale per cui

$$\sup_{t \geq 0} |v(t)| < M \tag{2.14}$$

Nel caso di segnali definiti in $t \geq 0$ con trasformata razionale $V(s)$ la condizione di limitatezza espressa dall'equazione (2.14) può essere agevolmente tradotta *nel dominio della frequenza*, in funzione della posizione dei poli di $V(\lambda)$. A tale scopo basta considerare lo sviluppo di Heaviside di $V(\lambda)$ fornito dall'espressione (2.7), (2.13). E' infatti ovvio che il segnale $v(t)$ sarà limitato se e solo se è limitato il segnale $c_i(t)$ associato al polo i-esimo p_i e che corrisponde alla trasformata $C_i(\lambda)$ in (2.13). D'altra parte la limitatezza del segnale $c_i(t)$ è diretta conseguenza della posizione e molteplicità dei poli di $C_i(\lambda)$. Infatti,

$$\begin{aligned} c_0(t) &= A_0\delta(t), \ t \geq 0 \\ c_i(t) &= A_{i,1}e^{p_i t} + \sum_{j=2}^{r_i} \frac{A_{i,j}}{(j-1)!}t^{j-1}e^{p_i t}, \ t \geq 0, \ i = 1, 2, \cdots, q \end{aligned}$$

Il segnale $c_i(t)$ sarà dunque limitato se e solo se, oltre ad essere $A_0 = 0$ (cioè $V(s)$ strettamente propria), i poli p_i hanno parte reale minore di zero oppure uguale a zero ma con molteplicità uno (in quest'ultimo caso $r_i = 1$ cosicchè la somma nel secondo termine della seconda equazione si riduce al solo primo termine che risulta limitato in quanto $\mathrm{Re}(p_i) = 0$).

Teorema 2.1 *Sia $V(s)$ una funzione razionale e propria della variabile complessa s. Il segnale a tempo continuo $v(t)$ di cui $V(s)$ è la trasformata di Laplace è limitato per $t \geq 0$ se e solo se valgono le tre condizioni seguenti:*

(i) La funzione $V(\lambda)$ è strettamente propria ($A_0 = 0$)

(ii) I poli p_i di $V(\lambda)$ hanno parte reale minore o uguale a zero

(iii) I poli p_i di $V(\lambda)$ con parte reale nulla hanno molteplicità unitaria.

Osservazione 2.5 *Si osservi che le conclusioni espresse nel teorema precedente possono essere naturalmente estese al caso di segnali $v(t)$ vettoriali, cioè*

$$v(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_m(t) \end{bmatrix}$$

La condizione di limitatezza è espressa attraverso la norma di $v(t)$

$$\sup_{t \geq 0} \|v(t)\| < M \tag{2.15}$$

e può essere tradotta nel dominio delle frequenze richiedendo che la trasformata di ogni componente $v_i(t)$ di $v(t)$ obbedisca alle condizioni espresse nel Teorema 2.1.

Osservazione 2.6 *Si osservi ancora che se la limitatezza è ristretta a $t > 0$, cioè se il tempo iniziale $t = 0$ è escluso, la condizione (i) del teorema 2.1 può essere eliminata. La ragione sta nel fatto che una trasformata razionale non strettamente propria è originata da un segnale temporale che ha componenti impulsive (eventualmente con derivate di ordine superiore) che agiscono solo in $t = 0$.*

2.3.3 Spazi funzionali di funzioni razionali

Facciamo qui brevemente riferimento alle sole funzioni razionali scalari

$$V(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

dove $N(s)$ e $D(s)$ sono polinomi coprimi. Ricordiamo che le radici di $N(s)$ sono gli *zeri* e le radici di $D(s)$ i *poli* di $V(s)$ (o, anche, del segnale). In base alle definizione degli spazi funzionali che abbiamo visto nei paragrafi precedenti, e con possiamo affermare quanto segue:

(i) Le funzioni razionali $V(s)$ appartengono a $\mathcal{L}_2$ se e solo se $V(s)$ è strettamente propria senza poli sull'asse immaginario.

(ii) Le funzioni razionali $V(s)$ appartengono a $\mathcal{H}_2$ se e solo se $V(s)$ è strettamente propria con poli a parte reale negativa.

(iii) Le funzioni razionali $V(s)$ appartengono a $\mathcal{L}_\infty$ se e solo se $V(s)$ è propria senza poli sull'asse immaginario.

(iv) Le funzioni razionali $V(s)$ appartengono a $\mathcal{H}_\infty$ se e solo se $V(s)$ è propria con poli a parte reale negativa.

Per funzioni vettoriali o anche matriciali, le stesse considerazioni valgono immutate, pur di definire bene il concetto di zeri e poli, che sarà oggetto di un capitolo successivo.