

Capitolo 7

Appendice

Sia $\mathcal{V}$ uno spazio vettoriale. Definiamo su tale spazio la *norma* come ogni applicazione a valori reali non negativi che gode delle proprietà:

$$\begin{aligned}\|x\| &= 0 \quad \rightarrow x = 0 \\ \|\alpha x\| &= |\alpha| \|x\| \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\|\end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathcal{V}$, $y \in \mathcal{V}$ e α scalare.

Per esempio, nello spazio $\mathcal{V} = \mathcal{C}^n$ si possono definire diverse norme, tra le quali la norma p -esima, definita come

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Particolarmente importanti per le applicazioni sono la norma uno ($p = 1$), la norma due ($p = 2$), e la norma infinita, che si ottiene come limite della norma p per p che tende all'infinito. Si ha ¹

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

¹Infatti, si ha, da una parte

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \geq \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\max_{i=1, \dots, n} |x_i|^p \right)^{1/p} = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

e dall'altra

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \left(n \max_{i=1, \dots, n} |x_i|^p \right)^{1/p} \leq \lim_{p \rightarrow \infty} (n)^{1/p} \max_{i=1, \dots, n} |x_i| = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

Le norme introdotte per i vettori inducono altrettante norme per le matrici $A \in \mathcal{C}^{n \times m}$. Infatti si può definire:

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Tale norma di matrice gode delle proprietà ²:

$$\begin{aligned} \|A\| &= 0 \quad \rightarrow A = 0 \\ \|\alpha A\| &= |\alpha| \|A\| \\ \|A + B\| &\leq \|A\| + \|B\| \\ \|AB\| &\leq \|A\| \|B\| \end{aligned}$$

Ad esempio, la norma p -esima di A è:

$$\|A\|_p = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

e risulta :

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{j=1, \dots, m} \sum_{i=1}^n |A_{ij}| \\ \|A\|_\infty &= \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |A_{ij}| \\ \|A\|_2 &= (\lambda_{\max}(A^*A))^{1/2} = (\lambda_{\max}(AA^*))^{1/2} \end{aligned}$$

Rispetto a tutte le norme indotte (o naturali) così definite, il raggio spetttrale $\rho(A)$ di una matrice quadrata è quella più piccola. Infatti se λ è l'autovalore in modulo più grande di A , cioè il suo raggio spetttrale, e x autovettore di norma unitaria, risulta $\|Ax\| = |\lambda|$ e quindi per qualunque norma si ha $\|A\| \geq \|Ax\| = |\lambda| = \rho(A)$. Quindi

$$\rho(A) = \inf \|A\|$$

rispetto a tutte le norme naturali. Se A è hermitiana, si ha ovviamente $\rho(A) = \|A\|_2$. Infine si noti che il raggio spetttrale può essere visto come valore limite di una successione di norme. Cioè, qualunque sia la norma naturale scelta, si ha il seguente risultato:

Teorema 7.1

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\|A^k\| \right)^{1/k}$$

²Dimostriamo le proprietà. 1) Se $\|A\| = 0$, allora per ogni x , si ha $\|Ax\| = 0$, cioè $Ax = 0$. Poichè x è generico, risulta $A = 0$. 2) $\|\alpha A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|\alpha Ax\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} |\alpha| \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\alpha| \|A\|$. 3) $\|A+B\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\| + \|Bx\|}{\|x\|} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \max_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| + \|B\|$. 4) $\|AB\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|(AB)x\|}{\|x\|} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\|A\| \|Bx\|}{\|x\|} \leq \|A\| \max_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \|B\|$.

Prova. Si noti dapprima che per ogni matrice A e k intero positivo finito, gli autovalori di

$$\tilde{A} = \frac{1}{\rho(A)\gamma_\epsilon} A, \quad \gamma_\epsilon = (1 + \epsilon)$$

hanno modulo minore di uno. Si prenda ora $P = \sum_{i=0}^{\infty} (\tilde{A}')^i \tilde{A}^i$, che soddisfa $(A')^k P A^k < P$. Quindi $\|\tilde{A}^k\|_2 \leq \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(P)}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}$. Questo è vero qualunque sia la norma di A : esiste un numero positivo α per cui $\|\tilde{A}^k\| < \alpha$, per ogni $k > 0$. Allora $\|A^k\| < \alpha \rho(A)^k (1 + \epsilon)^k$, col che, per ogni ϵ positivo:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\|A^k\|)^{1/k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(A) \alpha^{1/k} (1 + \epsilon)^{1/k} = \rho(A)(1 + \epsilon)$$

Il risultato segue per $\epsilon \rightarrow 0$. Viceversa, se λ è un qualunque autovalore di A e $Ax = \lambda x$, si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\|A^k\|)^{1/k} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|A^k x\|}{\|x\|}^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda^k|^{1/k} = |\lambda| \geq \rho(A)$$