

SEGNALI E SISTEMI  
*Per allievi di Ingegneria Matematica*

PATRIZIO COLANERI  
POLITECNICO DI MILANO, ITALIA

---

SEGNALI E SISTEMI  
*Per allievi di Ingegneria Matematica*

PATRIZIO COLANERI  
POLITECNICO DI MILANO, ITALIA

---





# Indice

<b>1</b>	<b>Stabilità e altre proprietà</b>	<b>5</b>
1.1	Molteplicità algebrica e geometrica . . . . .	7
1.2	Polinomio minimo . . . . .	8
1.2.1	Indici di Weyr e di Segre . . . . .	10
1.3	Forma canonica di Jordan . . . . .	12
1.4	Ciclicità . . . . .	13
1.5	Analisi modale e teoremi sulla stabilità . . . . .	16
1.6	Norma dello stato . . . . .	17
1.7	Disequazione di Lyapunov . . . . .	18
1.8	Raggiungibilità e stabilizzabilità . . . . .	20
1.8.1	Assegnamento degli autovalori . . . . .	23
1.8.2	Forma canonica e stabilizzabilità . . . . .	25
1.9	Osservabilità e rivelabilità . . . . .	28
1.10	Scomposizione in quattro parti e regolatore . . . . .	35
1.11	Realizzazione . . . . .	36
1.12	Problema del regolatore . . . . .	42
1.13	BIBO Stabilità . . . . .	45
<b>2</b>	<b>Segnali nel tempo e nella frequenza</b>	<b>49</b>
2.1	Segnali nel tempo . . . . .	49
2.1.1	Norma $\mathcal{L}_2$ del movimento libero dello stato . . . . .	51
2.1.2	Norma $\mathcal{L}_\infty$ del movimento forzato dello stato . . . . .	52
2.1.3	Norma $\mathcal{L}_1$ della risposta forzata . . . . .	57
2.2	Segnali in frequenza . . . . .	57
2.3	Segnali a trasformata razionale . . . . .	59
2.3.1	Sviluppo di Heaviside . . . . .	60
2.3.2	Segnali razionali limitati . . . . .	63
2.3.3	Spazi funzionali di funzioni razionali . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Zeri e poli</b>	<b>65</b>
3.1	Zeri di Trasmissione . . . . .	65
3.2	Zeri invarianti . . . . .	71
3.3	Relazione tra gli zeri . . . . .	75

3.4	Zeri all'infinito . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Norme e fattorizzazioni</b>	<b>81</b>
4.1	Sistema aggiunto . . . . .	84
4.2	Fattorizzazione canonica . . . . .	84
4.3	La matrice Hamiltoniana . . . . .	85
4.4	Fattorizzazione spettrale . . . . .	87
4.5	Norma $\mathcal{H}_2$ . . . . .	90
4.6	Norma $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	92
4.7	Sistemi all pass e fattorizzazione Inner-Outer . . . . .	96
4.8	Raggio Complesso . . . . .	99
4.9	Entropia . . . . .	102
4.10	Passività . . . . .	104
<b>5</b>	<b>Stabilizzazione statica dall'uscita</b>	<b>109</b>
5.1	Condizioni generali . . . . .	110
5.2	Sistemi con un ingresso oppure un'uscita . . . . .	114
5.2.1	Part 1 . . . . .	115
5.2.2	Part 2 . . . . .	126
<b>6</b>	<b>Parametrizzazione dei controllori</b>	<b>137</b>
6.1	Stabilità dei sistemi retroazionati . . . . .	137
6.2	Fattorizzazione doppia coprima . . . . .	141
6.3	Parametrizzazione . . . . .	144
6.4	Alcuni problemi di progetto . . . . .	149
6.4.1	Filtro ottimo $\mathcal{H}_2$ . . . . .	152
6.4.2	Controllo ottimo $\mathcal{H}_2$ . . . . .	158



# Prefazione

Queste note sono state preparate appositamente per il corso di Segnali e Sistemi tenuto per la prima volta nella primavera del 2004 nell'ambito del corso di Laurea in Ingegneria Matematica.

Tradizionalmente, i corsi di Segnali e Sistemi fanno riferimento all'area culturale delle Telecomunicazioni. Le note riflettono invece l'ambiente culturale del docente, che appartiene interamente all'area dell'Automatica. Il corso ha quindi i contenuti tipici della Teoria dei Sistemi e del Controllo, pensati per complementare la preparazione degli studenti nella materia dell'Automatica, della quale hanno avuto una breve panoramica nel corso di base svolto nell'anno accademico precedente.



# Capitolo 1

## Stabilità e altre proprietà

In questo capitolo sono richiamati alcuni risultati sulla stabilità, raggiungibilità, osservabilità, stabilizzabilità e rivelabilità dei sistemi lineari (invarianti e a dimensione finita):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

I movimenti dello stato e dell'uscita a partire da un certo stato iniziale  $x_0$  al tempo  $t_0$  sono espressi dalle *formule di Lagrange*

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) &= Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)\end{aligned}$$

dove la matrice esponenziale  $e^{A\tau}$  è la *matrice di transizione* del sistema ed è definita come

$$e^{A\tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \tau^k}{k!}$$

e soddisfa l'equazione matriciale differenziale

$$\frac{d}{d\tau} e^{A\tau} = Ae^{A\tau} = e^{A\tau} A$$

Indicando con  $\delta(t)$  la funzione <sup>1</sup> impulso, si ha che il movimento dell'uscita si può anche scrivere come:

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t [Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)]u(\tau)d\tau$$

---

<sup>1</sup>in vero, tale oggetto non è una funzione ma una distribuzione, chiamata anche distribuzione di Dirac.

Il termine tra parentesi quadre è la cosiddetta *risposta all'impulso*

$$g(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

ed esprime la risposta forzata all'impulso in forma di prodotto di convoluzione con la funzione di ingresso:

$$y_f(t) = \int_{t_0}^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

In effetti, la colonna  $i$ -esima della matrice  $g(t - t_0)$  rappresenta il movimento forzato dell'uscita quando la componente  $i$ -esima dell'ingresso è un impulso al tempo  $t_0$ .

La funzione complessa di variabile complessa  $s$ :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

è la funzione di trasferimento del sistema, e corrisponde alla trasformata (monolatera) di Laplace della risposta forzata all'impulso  $g(t)$ . E' una matrice di funzioni razionali con  $p$  righe e  $m$  colonne, che rappresentano le funzioni di trasferimento tra le varie componenti del vettore di ingresso e le varie componenti del vettore di uscita.

La stabilità è la proprietà più importante e più studiata di un sistema dinamico. Essa trae la sua origine dalla più generale nozione di stabilità (in piccolo) del movimento di un sistema dinamico che studia il comportamento della differenza tra il movimento e un movimento perturbato a fronte di una variazione del solo stato iniziale. Grazie alla linearità del sistema si può parlare di stabilità del sistema prescindendo dal particolare movimento considerato. Il sistema è *asintoticamente stabile* se e solo se il movimento libero dello stato

$$x_l(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$$

tende asintoticamente a zero per ogni stato iniziale  $x_0$  e ogni istante di tempo iniziale  $t_0$ . Analogamente, il sistema è *semplicemente stabile* se e solo se tale movimento libero rimane limitato per  $t \geq 0$  per qualunque stato iniziale e tempo iniziale. La struttura lineare di tale movimento rende subito evidente che l'asintotica stabilità e la semplice stabilità sono equivalenti alla convergenza a zero o alla limitatezza di tutti gli elementi della matrice di transizione  $e^{At}$ .

Esistono diversi concetti di stabilità di un sistema. Tra questi, riveste particolare importanza il nozione di stabilità esterna (ingresso-uscita) di un sistema con condizioni iniziali nulle. dati due spazi vettoriali  $X_1$  e  $X_2$ , la proprietà di stabilità esterna assicura che l'uscita forzata per  $t > 0$  appartenga a  $X_1$  qualunque sia l'ingresso in  $X_2$  per  $t \geq 0$ . Considerando  $X_1$  e  $X_2$  come gli spazi vettoriali delle funzioni limitate per  $t > 0$  la nozione di stabilità esterna coincide con quella di stabilità BIBO (bounded input bounded output). E'

possibile dimostrare che il sistema  $(A, B, C, D)$  è BIBO stabile se e solo se la funzione delle risposte all'impulso  $g(t)$  tende a zero per  $t \rightarrow \infty$ .

Prima di ricordare i teoremi fondamentali sulla stabilità studiamo alcune caratterizzazioni degli autovalori di una matrice  $A$ .

## 1.1 Molteplicità algebrica e geometrica

Gli autovalori di una matrice reale  $A$ , quadrata di dimensione  $n$ , sono i numeri complessi  $\bar{\lambda}$  per i quali esiste un vettore (generalmente complesso) non nullo  $x$  tale che

$$Ax = \bar{\lambda}x \quad (1.1)$$

I vettori  $x$  non nulli che soddisfano l'equazione suddetta sono chiamati *autovettori* associati a  $\bar{\lambda}$ . L'insieme degli autovettori associati ad un dato autovalore  $\bar{\lambda}$  è un sottospazio di  $\mathcal{C}^n$ , chiamato *autospazio* relativo all'autovalore  $\bar{\lambda}$ . Esso sarà indicato con il simbolo  $\mathcal{X}(\bar{\lambda})$ <sup>2</sup>.

Equivalentemente gli autovalori  $\bar{\lambda}$  possono essere visti come soluzioni dell'equazione caratteristica di  $A$ , cioè dell'equazione

$$\det[\lambda I_n - A] = 0 \quad (1.2)$$

L'equazione caratteristica (1.2) è in verità un'equazione polinomiale in quanto il determinante di  $\lambda I_n - A$  è<sup>3</sup> un polinomio di grado  $n$  e monico nell'indeterminata  $\lambda$

$$\pi_{car}(A, \lambda) := \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \quad (1.3)$$

I coefficienti  $a_i$  sono reali e sono chiamati *coefficienti del polinomio caratteristico*. L'equivalenza delle caratterizzazioni (1.1) e (1.2) è evidente. Esse esprimono, rispettivamente, la caratterizzazione *geometrica* e *algebrica* di un autovalore. Precisamente, la *molteplicità geometrica*, indicata nel seguito con il simbolo  $\nu_i$  è definita come la dimensione del sottospazio  $\mathcal{X}(\lambda_i)$ ,

$$\nu_i := \dim[\mathcal{X}(\lambda_i)],$$

mentre la *molteplicità algebrica*, indicata con  $n_i$ , è la molteplicità dell'autovalore  $\lambda_i$  come radice del polinomio caratteristico. Se  $k$  è il numero di autovalori distinti di  $A$ , denotati con  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , possiamo allora scrivere

$$\pi_{car}(A, \lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$$

<sup>2</sup>Se infatti  $x_1$  e  $x_2$  sono due autovettori relativi a  $\bar{\lambda}$ , allora per ogni  $\alpha_1 \in \mathcal{C}$  e  $\alpha_2 \in \mathcal{C}$  risulta  $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \bar{\lambda}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$  e quindi anche  $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$  è autovettore relativo a  $\bar{\lambda}$ .

<sup>3</sup>Questo fatto deriva immediatamente dalla regola di calcolo del determinante di una matrice.

## 1.2 Polinomio minimo

Data una matrice  $A$  quadrata di dimensioni  $n \times n$  e a coefficienti reali, un polinomio di grado  $r$  a coefficienti reali

$$c_0\lambda^r + c_1\lambda^{r-1} + \cdots + c_{r-2}\lambda + c_r, \quad c_0 \neq 0$$

è detto essere  $A$ -annullante se

$$c_0A^r + c_1A^{r-1} + \cdots + c_{r-1}A + c_rI_n = 0$$

E' immediato verificare che se due polinomi  $p_1(\lambda)$  e  $p_2(\lambda)$  sono  $A$ -annullanti, allora anche i polinomi formati da una loro qualsiasi combinazione lineare  $p(\lambda) = \alpha p_1(\lambda) + \beta p_2(\lambda)$  sono  $A$ -annullanti. Grazie a questa proprietà, è possibile restringere la ricerca dei polinomi annullanti di una data matrice all'insieme dei polinomi *monici*, cioè con  $c_0 = 1$ . Inoltre, grazie a queste proprietà, ha senso ricercare il polinomio  $A$ -annullante di grado  $r$  minimo. Il fatto che l'insieme in questione sia non vuoto è attestato da un risultato, notissimo in letteratura e qui di seguito riportato, che va sotto il nome di Teorema di Cayley-Hamilton.

**Teorema 1.1** *Il polinomio caratteristico di  $A$  è  $A$ -annullante.*

*Prova.* Sia

$$\pi_{car}(A, \lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

il polinomio caratteristico della matrice quadrata  $A$  di dimensione  $n \times n$ . Si noti inoltre che vale l'uguaglianza

$$A^i = \lambda^i I_n - (\lambda I_n - A)L_i(\lambda), \quad i \geq 0$$

dove

$$L_i(\lambda) = \begin{cases} \lambda^{i-1}I_n + \lambda^{i-2}A + \lambda^{i-3}A^2 + \cdots + A^{i-1} & , i > 0 \\ O_n & , i = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Si ricordi che  $(\lambda I_n - A)Adj[\lambda I_n - A] = \pi_{car}(A, \lambda)I_n$ , dove  $Adj[\cdot]$  indica la matrice dei complementi algebrici. Risulta

$$\pi_{car}(A, A) = \sum_{i=0}^n a_i A^{n-i} \quad (1.5)$$

$$= \sum_{i=0}^n a_i \lambda^{n-i} I_n - \sum_{i=0}^n a_i (\lambda I_n - A)L_{n-i}(\lambda) \quad (1.6)$$

$$= \pi_{car}(A, \lambda)I_n - (\lambda I_n - A) \sum_{i=0}^n a_i L_{n-i}(\lambda) \quad (1.7)$$

$$= (\lambda I_n - A)M(\lambda) \quad (1.8)$$

dove

$$M(\lambda) = \text{Adj}[\lambda I_n - A] - \sum_{i=0}^n a_i L_{n-i}(\lambda) := M_0 + M_1 \lambda + M_2 \lambda^2 + \cdots + M_{n-1} \lambda^{n-1}$$

Poichè  $\pi_{\text{car}}(A, A)$  non dipende da  $\lambda$ , l'equazione appena scritta deve valere per ogni valore di  $\lambda$ , e quindi  $M(\lambda) = 0, \forall \lambda$ . ■

Grazie al risultato espresso nel teorema precedente, siamo assicurati circa l'esistenza del polinomio minimo  $\pi_{\text{min}}(A, \lambda)$ , che avrà grado  $r \leq n$

$$\pi_{\text{min}}(\lambda) = \lambda^r + d_1 \lambda^{r-1} + \cdots + d_{r-1} \lambda + d_r$$

E' interessante notare che le radici del polinomio minimo sono tutte e sole quelle del polinomio caratteristico. Vale infatti il risultato seguente

**Teorema 1.2** *Siano  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, k$  le  $k$  radici distinte dell'equazione caratteristica di  $A$  (autovalori di  $A$ ) e siano  $n_1, n_2, \dots, n_k$  le loro relative molteplicità algebriche. Allora il polinomio minimo monico di  $A$  è unico e risulta*

$$\pi_{\text{min}}(A, \lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$$

con  $\sum_{i=1}^k r_i = r, 0 < r_i \leq n_i, i = 1, 2, \dots, k$ .

*Prova.* L'unicità del polinomio minimo monico è ovvia. Se infatti  $\mu_1(\lambda)$  e  $\mu_2(\lambda)$  fossero due polinomi diversi, minimi e monici di  $A$  (ovviamente dello stesso grado), allora anche il polinomio ottenuto per differenza e diviso per il coefficiente non nullo di potenza più grande, sarebbe monico, annullante e di grado più piccolo, il che è una contraddizione.

Supponiamo ora che  $\bar{\lambda}$  sia un autovalore di  $A$ . Quindi esiste un vettore non nullo  $x$  tale che  $Ax = \bar{\lambda}x$ . Quindi  $A^i x = \bar{\lambda}^i x$  e  $0 = \pi_{\text{min}}(A, A)x = \mu(\bar{\lambda})x$ . Poichè  $x \neq 0$  e  $\pi_{\text{min}}(A, \bar{\lambda})$  è scalare si ha  $\pi_{\text{min}}(A, \bar{\lambda}) = 0$ , cioè  $\bar{\lambda}$  è radice del polinomio minimo.

Supponiamo viceversa che  $\bar{\lambda}$  sia una radice del polinomio minimo, cioè  $\pi_{\text{min}}(A, \bar{\lambda}) = 0$ . Allora  $\pi_{\text{min}}(A, A) = (\bar{\lambda}I_n - A)\tilde{\mu}(A)$ , dove  $\tilde{\mu}(\lambda)$  è un polinomio di grado  $n - 1$  tale che  $\tilde{\mu}(A) \neq 0$  (altrimenti si contraddirebbe la minimalità di  $\pi_{\text{min}}(A, \lambda)$ ). Quindi esiste un vettore non nullo  $x$  tale che  $y = \tilde{\mu}(A)x \neq 0$ . Allora  $(\bar{\lambda}I_n - A)y = 0$ , con  $y \neq 0$ , implica che  $\bar{\lambda}$  è autovalore di  $A$ , cioè radice del polinomio caratteristico. ■

Allo scopo di completare il confronto tra il polinomio caratteristico e il polinomio minimo di  $A$ , quel che manca da fare è caratterizzare le molteplicità  $r_i$  delle radici del polinomio minimo in termini geometrici, in funzione della sequenza di sottospazi

$$\mathcal{B}_k(\lambda_i) := \text{Ker}[(\lambda_i I_n - A)^k], \quad k = 1, 2, \dots$$

che sono ovviamente legati dalla relazione di inclusione <sup>4</sup>

$$\mathcal{B}_1(\lambda_i) \subseteq \mathcal{B}_2(\lambda_i) \subseteq \mathcal{B}_3(\lambda_i) \subseteq \dots$$

**Teorema 1.3** *Sia  $\lambda_i$  un autovalore di  $A$ , sia  $r_i$  la sua molteplicità nel polinomio minimo e si considerino i sottospazi*

$$\mathcal{B}_k(\lambda_i) := \text{Ker}[(\lambda_i I_n - A)^i k], \quad k = 1, 2, \dots$$

*Il numero  $r_i$  è il più piccolo intero per cui la successione di sottospazi  $\mathcal{B}_i(\lambda_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ,  $r_i$  diventa stazionaria.*

*Prova.* Il polinomio minimo di  $A$  si può infatti scrivere come

$$\pi_{\min}(\lambda, A) = (\lambda - \lambda_i)^{r_i} \tilde{\pi}(\lambda)$$

dove  $\tilde{\pi}(\lambda)$  è un polinomio opportuno tale che  $\tilde{\pi}(\lambda_i) \neq 0$ . Supponiamo allora per assurdo che ci sia un vettore  $x \neq 0$ , con  $x \in \mathcal{B}_{r_i+1}(\lambda_i)$ , che non appartenga a  $\mathcal{B}_{r_i}(\lambda_i)$ . Ne segue che <sup>5</sup>

$$Ay = \lambda_i y, \quad y = (\lambda_i I_n - A)^{r_i} x \neq 0$$

Allora, ricordando che il polinomio minimo è annullante (cioè  $\pi_{\min}(A, A)$ ), si ha

$$0 = \pi_{\min}(A, A)x = \tilde{\pi}(A)(A - \lambda_i I_n)^{r_i} x = \tilde{\pi}(A)y = \tilde{\pi}(\lambda_i)y$$

il che implica  $y = 0$ , il che è assurdo.

### 1.2.1 Indici di Weyr e di Segre

Un altro elemento di differenziazione tra gli autovalori di  $A$  è dato dalle caratteristiche di Weyr e dalle caratteristiche di Segre che si possono associare ad un dato autovalore  $\lambda$ . Dato un autovalore  $\lambda$  di  $A$ , si considerino ancora i sottospazi

$$\mathcal{B}_i(\lambda) := \text{Ker}[(\lambda I_n - A)^i], \quad i = 1, 2, \dots,$$

La dimensione del sottospazio  $\mathcal{B}_k(\lambda)$  è non decrescente con  $k$  e risulta uguale alla molteplicità algebrica  $n(\lambda)$  <sup>6</sup> di  $\lambda$  a partire da un certo indice  $k_\lambda$ , cioè

$$\dim[\mathcal{B}_i(\lambda)] = n(\lambda), \quad i \geq k_\lambda$$

<sup>4</sup>Infatti se  $x \in \mathcal{B}_i(\bar{\lambda})$  risulta  $(\bar{\lambda}I - A)^i x = 0$  e quindi  $(\bar{\lambda}I - A)^{i+1} x = (\bar{\lambda}I - A)(\bar{\lambda}I - A)^i x = 0$ , cioè  $x \in \mathcal{B}_{i+1}(\bar{\lambda})$

<sup>5</sup>Si noti che c'è la proprietà di quiescenza dei sottospazi  $\mathcal{B}_k(\lambda_i)$ , cioè se  $\mathcal{B}_k(\lambda_i) = \mathcal{B}_{k+1}(\lambda_i)$  allora  $\mathcal{B}_{k+j}(\lambda_i) = \mathcal{B}_k(\lambda_i)$ , per ogni  $j > 0$ .

<sup>6</sup>Infatti, se  $B$  è una matrice quadrata, il rango di  $B^k$  è costante (ed uguale al numero di autovalori non nulli) per  $k$  maggiore o uguale ad un numero sicuramente non maggiore del numero di autovalori nulli.

Risulta pertanto ben definita la sequenza di numeri interi non nulli

$$\begin{aligned} p_1(\lambda) &:= \dim[\mathcal{B}_1(\lambda)] \\ p_i(\lambda) &:= \dim[\mathcal{B}_i(\lambda)] - \dim[\mathcal{B}_{i-1}(\lambda)], \quad i = 2, 3, \dots, k_\lambda \end{aligned}$$

La sequenza

$$\{p_1(\lambda), p_2(\lambda), \dots, p_{k_\lambda}(\lambda)\}$$

è chiamata *caratteristica di Weyr* associata a  $\lambda$  e i numeri  $p_i(\lambda)$  sono gli *indici di Weyr*. Da quanto detto risulta possibile caratterizzare la molteplicità algebrica e geometrica di  $\lambda$  in funzione degli indici di Weyr nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \text{molteplicità algebrica} &= n(\lambda) = \sum_{i=1}^{k_\lambda} p_i(\lambda) \\ \text{molteplicità geometrica} &= \nu(\lambda) = p_1(\lambda) \end{aligned}$$

Il generico *indice di Segre*  $q_i(\lambda)$  si ricava dalla caratteristica di Weyr semplicemente contando il numero di indici di Weyr maggiori (strettamente) di  $i - 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, p_1(\lambda)$ , cioè

$$q_i(\lambda) := \text{numero di } p_k(\lambda) > i - 1, \quad k = 1, 2, \dots, k_\lambda$$

Si noti che ovviamente risulta

$$q_1(\lambda) = k_\lambda, \quad q_{p_1(\lambda)}(\lambda) = 1$$

Si ottiene così la *caratteristica di Segre* associata a  $\lambda$ , formata dalla sequenza non crescente degli indici Segre

$$[q_1(\lambda), q_2(\lambda), \dots, q_{p_1(\lambda)}(\lambda)]$$

Per riassumere le nozioni relative al singolo autovalore  $\lambda$  introdotte nel paragrafo presente, si consideri l'esempio seguente.

**Esempio 1.1** *Sia data la matrice  $5 \times 5$*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è  $\pi_{\text{car}}(A, \lambda) = (\lambda - 2)^5$ , e quindi l'autovalore  $\lambda = 2$  ha molteplicità algebrica uguale a cinque. Per determinare la molteplicità geometrica di  $\lambda$  si deve calcolare la dimensione dello spazio nullo di  $2I - A$ . Risulta che il generico vettore dell'autospazio è  $[\alpha \alpha \beta 0 \gamma]'$  con  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  costanti arbitrarie. Quindi la molteplicità geometrica associata a  $\lambda$  è tre. Notando poi che  $(2I - A)^2$  è la matrice identicamente nulla ( $k_\lambda = 2$ ), si ha che gli indici di Weyr associati a  $\lambda$  sono  $p_1(\lambda) = 3$  e  $p_2(\lambda) = 5 - 3 = 2$ . Gli indici di Segre sono dunque  $q_1(\lambda) = 2$ ,  $q_2(\lambda) = 2$ , e  $q_3(\lambda) = 1$ .

### 1.3 Forma canonica di Jordan

Si denoti con  $k$  il numero di autovalori distinti di  $A$ , cioè  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , con  $n_i$  la molteplicità algebrica relativa all'autovalore  $\lambda_i$ , con  $\nu_i$  la molteplicità geometrica e con  $\{g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{i\nu_i}\}$  la successione di indici di Segre associata a  $\lambda_i$ . Il teorema seguente mostra come sia sempre possibile attraverso un cambio di base portare una matrice  $A$  in una forma opportuna che mette in evidenza le caratterizzazioni degli autovalori discusse in precedenza. La dimostrazione del teorema segue <sup>7</sup> dalle considerazioni già svolte. Si osservi anche che tutte le matrici simili hanno lo stesso polinomio minimo, come è evidente dalla relazione  $\pi_{\min}(TAT^{-1}, \lambda) = T\pi_{\min}(A, \lambda)T^{-1} = \pi_{\min}(A, \lambda)$ .

**Teorema 1.4** *Esiste sempre una trasformazione di base  $T_J$  (eventualmente complessa) tale che*

$$A_J = T_J A T_J^{-1} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & J_k \end{bmatrix}$$

dove il blocco di Jordan  $J_i$  (di dimensione  $\nu_i \times \nu_i$ ) ha la struttura seguente

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{i1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_{i2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & J_{i\nu_i-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_{i\nu_i} \end{bmatrix}$$

<sup>7</sup>In verità è opportuno integrare le nozioni già viste con il concetto di catena di autovettori generalizzati. Senza entrare troppo nel dettaglio, si consideri una matrice  $n$  dimensionale  $A$  con un solo autovalore distinto  $\lambda$  di molteplicità geometrica unitaria. In questo caso, prendendo un autovettore  $x^{(0)}$  è facile riconoscere che la sequenza di vettori  $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}$  con

$$Ax^{(i)} = \lambda x^{(i)} + x^{(i-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

è tale che  $T^{-1}A = JT^{-1}$  con

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} x^{(0)} & x^{(1)} & \dots & x^{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

Tale sequenza di vettori è detta *catena di autovettori generalizzati di ordine  $n$* . In generale per ogni autovalore distinto  $\lambda_i$  è possibile costruire  $\nu_i$  catene di autovettori generalizzati di ordine  $g_{ij}$ ,  $j = 1, 2, \dots, \nu_i$ .

e il miniblocco di Jordan  $J_{ij}$  (di dimensione  $g_{ij} \times g_{ij}$ ) è così strutturato

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Inoltre Le molteplicità  $r_i$  delle radici del polinomio minimo di  $A$  coincidono con i massimi degli indici di Segre degli autovalori  $\lambda_i$  nella forma di Jordan di  $A$ , cioè:

$$\bar{g}_i = \max_{j=1,2,\dots,\nu_i} \{g_{ij}\}$$

■

Il numero  $\bar{g}_i$  è abitualmente chiamato *indice* associato all'autovalore  $\lambda_i$ , senza ulteriore specificazione. Esso coincide con la massima dimensione dei miniblocchi di Jordan associati a  $\lambda_i$  e anche con la molteplicità di  $\lambda_i$  nel polinomio minimo.

## 1.4 Ciclicità

Una matrice quadrata  $A$ , di dimensione  $n$  si dice ciclica quando esiste un vettore  $x \neq 0$  tale che i vettori  $x, Ax, A^2x, \dots, A^{n-1}x$  siano linearmente indipendenti, e quindi costituiscano una base di  $\mathcal{R}^n$ . In tale caso il vettore  $x$  è chiamato *generatore ciclico* di  $A$ .

E' interessante notare che una matrice ciclica può essere sempre posta, attraverso una scelta opportuna della base in  $\mathcal{R}^n$ , in una forma canonica particolare, detta *forma compagna*, che assume la forma

$$A_{com} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

dove le costanti  $a_i$  sono i coefficienti del polinomio caratteristico di  $A$

$$\pi_{car}(A, \lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n$$

Tale forma canonica assume tale denominazione in quanto essa *accompagna* il polinomio caratteristico che è infatti presente attraverso i suoi coefficienti nell'ultima riga della matrice.

**Teorema 1.5** Una matrice  $A$  è ciclica se e solo se è simile alla matrice in forma compagna  $A_{com}$ .

*Prova.* Supponiamo che  $A$  sia ciclica. Allora esiste un generatore ciclico  $x \neq 0$ . Si prendano allora i seguenti vettori  $v_i, i = 0, 1, \dots, n-1$  nel modo seguente:

$$\begin{aligned} v_0 &= x \\ v_{i+1} &= Av_i + a_{i+1}x, \quad i = 0, 1, \dots, n-2 \end{aligned}$$

I vettori  $v_i, i = 0, 1, \dots, n-1$  risultano cioè essere una combinazione triangolare dei vettori  $A^i x, i = 0, 1, \dots, n-1$ . Quindi, poichè  $x$  è un generatore ciclico di  $A$ , anch'essi risultano costituire una base di  $\mathcal{R}^n$ . E' facile poi riconoscere che, grazie al Teorema di Cayley-Hamilton risulta

$$Av_{n-1} = (A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A) x = -a_n v_0$$

mentre

$$Av_i = v_{i+1} - a_{i+1} v_0, \quad i = 1, 2, \dots, n-2$$

Quindi, definendo la matrice di cambio di base come

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} v_{n-1} & v_{n-2} & \dots & v_0 \end{bmatrix}$$

si ha  $AT^{-1} = T^{-1}A_{com}$ . Quindi  $A$  è simile a  $A_{com}$ .

Viceversa, si supponga che  $A$  e  $A_{com}$  siano simili, cioè  $AT^{-1} = T^{-1}A_{com}$  per una certa matrice invertibile  $T$ . Si prenda poi il vettore  $y := [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]'$  e si noti che la matrice formata dalle colonne  $A_{com}^{n-1}y, A_{com}^{n-2}y, \dots, y$  è triangolare con determinante non nullo. Il vettore  $y$  è quindi un generatore ciclico di  $A_{com}$  e quindi il vettore  $x := T^{-1}y$  è un generatore ciclico di  $A$ , che risulta dunque essere una matrice ciclica. ■

Il risultato precedente afferma che solo le matrici cicliche possono essere poste nella forma compagna. Un semplice esempio di matrice non ciclica è quello della matrice identità o anche  $\alpha I_n$ . Tale matrice è ovviamente solo simile a se' stessa e non è dunque riconducibile attraverso un cambio di base alla forma compagna. Infatti qualunque sia il vettore  $x$ , i vettori  $x, Ax, A^2x$ , eccetera, risultano essere dipendenti tra di loro. Oltre a questa ragione, per così dire geometrica, esiste un'interessante ragione algebrica per la ciclicità o meno di una matrice  $A$ . Vale infatti il seguente risultato:

**Teorema 1.6** *Una matrice  $A$  è ciclica se e solo se il suo polinomio caratteristico  $\pi_{car}(A, \lambda)$  coincide con il polinomio minimo  $\pi_{min}(A, \lambda)$ .*

*Prova.* Si osservi dapprima che il polinomio minimo e il polinomio caratteristico coincidono se e solamente se l'indice di ogni singolo autovalore coincide con la sua molteplicità algebrica, cioè se e solo se la molteplicità geometrica di ogni singolo autovalore è unitaria.

Supponiamo quindi la matrice sia ciclica. Allora essa è simile alla matrice in forma compagna  $A_{com}$  (si ricordi il Teorema 1.5). Si consideri allora il

generico autovalore  $\lambda$  di  $A_{com}$  e si cerchino i relativi autovettori con l'equazione  $A_{com}x = \lambda x$ . Grazie alla struttura di  $A_{com}$  si ha (la semplice verifica è lasciata al lettore)

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix} \alpha$$

dove  $\alpha$  è una costante generica. Quindi l'autospazio relativo al generico autovalore  $\lambda$  di  $A_{com}$  (e quindi di  $A$ ) ha dimensione unitaria. Essendo quindi la molteplicità geometrica di tutti gli autovalori di  $A$  unitaria, il polinomio minimo e caratteristico di  $A$  coincidono.

Viceversa, si definisca il vettore  $n$ -dimensionale

$$e^0(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix}$$

e i vettori  $e^j(\lambda)$ ,  $j = 1, 2, \dots$  con prima componente unitaria costruiti nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} e^j(\lambda) = \lambda e^j(\lambda) + e^{j-1}(\lambda), \quad j = 1, 2, \dots$$

Se dunque il polinomio minimo e caratteristico di  $A$  coincidono, ogni autovalore ha molteplicità geometrica unitaria e quindi la forma di Jordan di  $A$  assume la forma:

$$A_J = T_J A T_J^{-1} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix}$$

dove il blocco di Jordan  $J_i$  coincide con l'unico miniblocco:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$$

di dimensione coincidente con la molteplicità algebrica  $n_i$ . Risulta (la verifica è lasciata al lettore)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} e^0(\lambda_1) & \cdots & e^{n_1-1}(\lambda_1) & \cdots & e^0(\lambda_k) & \cdots & e^{n_k-1}(\lambda_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix} \\ &= A_{con} \begin{bmatrix} e^0(\lambda_1) & \cdots & e^{n_1-1}(\lambda_1) & \cdots & e^0(\lambda_k) & \cdots & e^{n_k-1}(\lambda_k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e quindi la matrice  $A$  è simile alla matrice in forma compagna  $A_{com}$ , che è ciclica.

## 1.5 Analisi modale e teoremi sulla stabilità

Abbiamo testè visto che esiste sempre una trasformazione di base  $z = T_J x$  tale che, nella nuova base, la matrice  $A_J = T_J A T_J^{-1}$  è nella cosiddetta *forma di Jordan*. D'altra parte

$$e^{At} = e^{T_J^{-1} A_J T_J t} = T_J^{-1} e^{A_J t} T_J$$

E' allora evidente che  $e^{At}$  tende a zero se e solo se  $e^{A_J t} = T_J e^{At} T_J^{-1}$  tende a zero e questo succede se e solo se ogni matrice esponenziale  $e^{J_{ij} t}$  tende a zero. Se si indica ancora con  $g_{ij}$  la dimensione della matrice  $J_{ij}$  si ha:

$$e^{J_{ij} t} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{g_{ij}-2}}{(g_{ij}-2)!} & \frac{t^{g_{ij}-1}}{(g_{ij}-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{g_{ij}-3}}{(g_{ij}-3)!} & \frac{t^{g_{ij}-2}}{(g_{ij}-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \frac{t^{g_{ij}-4}}{(g_{ij}-4)!} & \frac{t^{g_{ij}-3}}{(g_{ij}-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo allora affermare che gli elementi di  $e^{At}$  non hanno tempi di fuga al finito e l'eventuale non limitatezza si può avere solo per  $t \rightarrow +\infty$ . In conclusione, si ha quanto segue:

- (i) *Il sistema è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori di  $A$  hanno parte reale negativa.*
- (ii) *Il sistema è semplicemente stabile se e solo se tutti gli autovalori di  $A$  hanno parte reale non positiva e quelli con parte reale nulla hanno identica molteplicità algebrica e geometrica.*

- (iii) *Il sistema è instabile se e solo se esiste almeno un autovalore di  $A$  con parte reale positiva oppure un autovalore di  $A$  con parte reale nulla e con molteplicità algebrica diversa da quella geometrica.*

## 1.6 Norma dello stato

Una matrice  $A$  associata ad sistema asintoticamente stabile si dice essere una *matrice di Hurwitz*. La matrice di transizione associata ad  $A$  è la matrice esponenziale  $e^{At}$ . Se  $A$  è di Hurwitz, e ragionando sulla forma di Jordan, è facile intuire che esistono sempre due costanti positive  $\alpha$  e  $\beta$  tale che

$$\|e^{At}\| \leq \alpha e^{-\beta t}$$

Il numero  $\beta$  deve essere scelto appartenere all'intervallo  $(0, \Lambda)$  dove  $\Lambda$  è il valore assoluto della parte reale dell'autovalore di  $A$  con parte reale più grande. Una conseguenza del valore inferiore alla norma della matrice esponenziale è che la norma del movimento libero dello stato è limitata inferiormente come segue:

$$\|x(t)\| \leq \alpha e^{-\beta t} \|x_0\|, \quad t \geq 0$$

che significa che lo stato di un sistema asintoticamente stabile tende a zero in modo esponenziale. Se la matrice  $A$  non è di Hurwitz è ancora possibile caratterizzare l'andamento esponenziale della norma dello stato. Infatti,

$$\frac{\|x(t+dt)\| - \|x(t)\|}{dt} \leq \left( \frac{\|e^{Adt}\| - 1}{dt} \right) \|x(t)\|$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{d\|x(t)\|}{dt} &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\|x(t+dt)\| - \|x(t)\|}{dt} \\ &\leq \lim_{dt \rightarrow 0} \left( \frac{\|e^{Adt}\| - 1}{dt} \right) \|x(t)\| = \lim_{dt \rightarrow 0} \left( \frac{\|I + Adt\| - 1}{dt} \right) \|x(t)\| \end{aligned}$$

Definendo la cosiddetta misura di Lozinski della matrice  $A$

$$\mu(A) = \lim_{dt \rightarrow 0} \left( \frac{\|I + Adt\| - 1}{dt} \right)$$

si ha in generale che

$$\frac{d\|x(t)\|}{dt} \leq \mu(A) \|x(t)\|$$

cioè

$$\|x(t)\| \leq e^{\mu(A)t} \|x_0\|, \quad t \geq 0$$

Si noti che la misura di Lozinski coincide con la metà del massimo autovalore di  $A + A'$  se la norma utilizzata è quella spettrale. Infatti, sfruttando il Teorema di de L'Hopital, si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{dt \rightarrow 0} \left( \frac{\|I + Adt\| - 1}{dt} \right) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{\lambda_{max} [I + Adt + A'dt + AA'dt^2]} - 1}{dt} \right) \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{1 + \lambda_{max}(A + A')dt} - 1}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lambda_{max}(A + A') \end{aligned}$$

## 1.7 Disequazione di Lyapunov

Il risultato seguente è un classico della teoria della stabilità dei sistemi lineari.

**Teorema 1.7** *Una matrice  $A$  è di Hurwitz se e solo se la disequazione matriciale*

$$A'P + PA < 0$$

*è verificata per una certa matrice reale, simmetrica e definita positiva  $P$ .*<sup>8</sup>

**Prova.** Supponiamo che tale  $P$  esista. Per assurdo sia  $Ax = \lambda x$  con  $x \neq 0$  e  $Re(\lambda) \geq 0$ . Allora:

$$2Re(\lambda)x^*Px < 0$$

conduce all'assurdo. Viceversa, si supponga che  $A$  sia di Hurwitz. Allora esiste

$$\bar{P} = \int_0^\infty e^{A't} Q e^{At} dt$$

per ogni matrice simmetrica e definita positiva  $Q$ . Infatti

$$\|\bar{P}\| \leq \int_0^\infty \|e^{A't}\| \|Q\| \|e^{At}\| dt \leq \alpha^2 \|Q\| \int_0^\infty e^{-2\beta t} dt = 0.5\alpha^2\beta^{-1} \|Q\| < \infty$$

Inoltre

$$A'\bar{P} + \bar{P}A = \int_0^\infty \frac{d}{dt} [e^{A't} Q e^{At}] dt = -Q < 0$$

che è la tesi. ■

La disequazione di Lyapunov genera anche un valore inferiore alla norma<sup>9</sup> della matrice di transizione di un sistema asintoticamente stabile. Infatti, se

<sup>8</sup>Una matrice reale e simmetrica  $Q$  è definita positiva se la forma quadratica  $x'Qx$  è positiva per ogni vettore non nullo  $x$ . Si dice definita negativa se  $-Q$  è definita positiva.

<sup>9</sup>I valori singolari  $\sigma_i(F)$  di una matrice  $F$  sono definiti come le radici degli autovalori di  $FF'$ . Il più grande di tali valori singolari, spesso indicato con  $\bar{\sigma}(F)$  è una norma di  $F$ , chiamata anche *norma spettrale*. Essa è dunque definita come la radice quadrata dell'autovalore più grande di  $F'F$  (o anche, che è la stessa cosa, di  $FF'$ ):  $\|F\| = \lambda_{max}(FF')^{1/2}$ .

$A$  è di Hurwitz, allora esiste  $P > 0$  tale che  $A'P + PA < 0$ . Moltiplicando a sinistra per  $e^{A't}$  e a destra per  $e^{At}$  si ha  $e^{A't}A'Pe^{At} + e^{A't}PAe^{At} < 0$ , per ogni  $t \geq 0$ , che implica che  $\frac{d}{dt} [e^{A't}Pe^{At}] < 0$  per ogni  $t \geq 0$ . La quantità tra parentesi quadre vale  $P$  per  $t = 0$  e decresce (nell'ordinamento parziale delle matrici definite positive) per  $t > 0$ . In conclusione

$$P > e^{A't}Pe^{At}, \quad t > 0$$

Questa disequazione implica  $\lambda_{\max}(P) > \|e^{At}\|^2 \lambda_{\min}(P)$  e quindi

$$\max_{t>0} \|e^{At}\|^2 < \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}$$

dove  $\lambda_{\min}$  rappresenta l'autovalore più piccolo di  $P$ . Il significato di quest'ultima disequazione è evidente. Per ogni valore del tempo  $t$  positivo, la norma della matrice di transizione è limitata dal *valore di condizionamento* della soluzione  $P$  della disequazione di Lyapunov, e quindi il movimento libero dello stato è limitato in norma da tale valore che moltiplica la norma dello stato iniziale. Se ora si prende  $\beta > 0$  tale che  $A + \beta I$  sia ancora asintoticamente stabile, seguendo il ragionamento precedente si ha che:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \alpha e^{-\beta t}, \quad t \geq 0 \\ \alpha &= \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(O)}{\lambda_{\min}(P)}} \\ 0 &> (A + \beta I)'P + P(A + \beta I), \quad P > 0 \end{aligned}$$

Si noti che la disuguaglianza di cui sopra vale anche se  $A$  non è Hurwitz e  $\beta > 0$  è tale che  $A + \beta I$  sia Hurwitz.

**Osservazione 1.1** *Il Teorema sulla disequazione di Lyapunov ammette una forma duale che fa riferimento alla disequazione*

$$AS + SA' < 0$$

*E' infatti evidente che esiste  $S > 0$  di questa disequazione se e solo se esiste  $P > 0$  di quella precedente. La ovvia corrispondenza è  $S = P^{-1}$ .*

**Osservazione 1.2** *Dal teorema precedente si evince una facile condizione sufficiente perchè una matrice sia di Hurwitz. Infatti, se la norma di Lozinski è negativa, allora si ha  $A + A' < 0$  col che la disequazione di Lyapunov è soddisfatta con  $P = I$ . In conclusione possiamo dire che  $A$  è di Hurwitz se  $\mu(A) < 0$ . Questa condizione è peraltro solo sufficiente. Infatti è facile verificare che la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

*è di Hurwitz per ogni  $\alpha$ , ma la sua misura di Lozinski è positiva solo se  $\alpha^2 > 4$ .*

La disequazione di Lyapunov può essere caratterizzata in termini frequenziali come segue. Infatti, per ogni numero complesso  $s$  la disequazione si può scrivere come  $(-sI - A')P + P(sI - A) > 0$  e quindi, ponendo  $s = j\omega$  e moltiplicando a sinistra per  $(-j\omega I - A')^{-1}$  e a destra per  $(j\omega I - A)^{-1}$  si ha:

$$P(j\omega I - A)^{-1} + (-j\omega I - A')^{-1}P > 0, \quad \forall \omega$$

Un altro modo di guardare alla stabilità asintotica fa dunque riferimento al concetto di funzione *strettamente reale positiva*<sup>10</sup>. Da ciò segue che una matrice  $A$  è di Hurwitz se e solo se esiste una certa matrice reale, simmetrica e definita positiva  $P$  tale che la matrice complessa  $P(sI - A)^{-1}$  è *strettamente reale positiva*.

## 1.8 Raggiungibilità e stabilizzabilità

Consideriamo ora il sistema stato/ingresso:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

e ci chiediamo se sia possibile, e sotto quali condizioni, raggiungere uno stato finale  $\bar{x}$ , in un istante di tempo opportuno  $\bar{t} < \infty$ , con una scelta della funzione di ingresso  $u(\cdot)$ , partendo dallo stato iniziale nullo ( $x_0 = 0$ ). Un tale stato  $\bar{x}$ , in caso di risposta positiva, si dirà essere *raggiungibile*. Se tale condizione è verificata per ogni stato  $\bar{x}$  il sistema si dirà raggiungibile. L'equazione di Lagrange si può scrivere nel modo seguente

$$x(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} e^{A(\bar{t}-t)} Bu(t) dt = [R_{\bar{t}} \odot u](\bar{t})$$

Quindi il sistema è raggiungibile se e solo se il rango dell'operatore  $R_{\bar{t}}$  risulta massimo per un certo  $\bar{t} > 0$ . D'altra parte, è facile rendersi conto che ciò è equivalente a richiedere che sia massimo (uguale a  $n$ ) il rango<sup>11</sup> della matrice

$$W_{\bar{t}} = \int_0^{\bar{t}} e^{A(\bar{t}-t)} BB' e^{A'(\bar{t}-t)} dt = \int_0^{\bar{t}} e^{At} BB' e^{A't} dt$$

In tal caso la transizione dallo stato iniziale nullo allo stato finale  $\bar{x}$  può essere ottenuta con l'ingresso

$$u(t) = B' e^{A'(\bar{t}-t)} \left( \int_0^{\bar{t}} e^{At} BB' e^{A't} dt \right)^{-1} \bar{x}$$

<sup>10</sup>Una matrice  $\Psi(s)$  della variabile complessa  $s$  si dice essere strettamente reale positiva se

$$\Psi(j\omega) + \Psi(-j\omega)' > 0, \quad \forall \omega$$

<sup>11</sup>Tale rango coincide con il rango della matrice  $W_{\bar{t}} = R_{\bar{t}} R_{\bar{t}}^*$ , dove  $R_{\bar{t}}^* = B' e^{A'(\bar{t}-t)}$ ,  $t \in [0, \bar{t}]$  è l'operatore aggiunto.

La matrice  $W_{\bar{t}}$  è il cosiddetto *Grammiano di raggiungibilità al tempo  $\bar{t}$* . E' una matrice semidefinita positiva <sup>12</sup> per ogni  $\bar{t} \geq 0$ . Fissiamo ora  $\bar{t} > 0$  e dimostriamo che

$$W_{\bar{t}} > 0 \quad \leftrightarrow \quad \text{rank} \left( \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \right) = n$$

Se infatti  $W_{\bar{t}}$  fosse singolare allora per un certo  $x \neq 0$  si avrebbe  $\int_0^{\bar{t}} \|e^{At}Bx\|^2 dt = 0$ , cioè  $x'e^{At}B = 0, \forall t \in [0, \bar{t}]$ , il che (derivando e valutando in  $t = 0$ ) implica  $x'A^k B = 0, k = 0, 1, \dots$ . Quindi  $x' \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0$  contraddice la pienezza di rango di quest'ultima matrice. Viceversa se, per un certo  $x \neq 0$  si avesse  $x'A^k B = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$ , allora per il Teorema di Cayley-Hamilton  $x'A^k B = 0, \forall k \geq 0$  e quindi  $x' \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \bar{t}^k}{k!} B = 0, \forall \bar{t} > 0$ , col che  $x'e^{At}B = 0$  e  $W_{\bar{t}}x = 0$ .

La dimostrazione del risultato precedente mette in luce il fatto che il tempo finale  $\bar{t}$  nella verifica della raggiungibilità è ininfluente. Quanto detto dimostra il seguente risultato:

**Teorema 1.8** *Il sistema è raggiungibile se e solo se la matrice di Kalman di raggiungibilità*

$$K_r = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

*ha rango massimo.*

La transizione di raggiungibilità dallo stato nullo allo stato generico  $\bar{x}$  per un sistema raggiungibile può essere operata in un intervallo di tempo  $\bar{t}$  piccolo a piacere. Si noti però che il valore massimo nel tempo della norma della funzione di ingresso che opera la transizione è tanto più grande quanto più piccolo è l'intervallo di tempo  $\bar{t}$ .

Concludiamo questo paragrafo con una caratterizzazione della raggiungibilità in termini modali. Precisamente, si consideri la matrice

$$P_{rag}(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \end{bmatrix}$$

funzione della variabile complessa  $s$ . Il risultato modale che caratterizza la raggiungibilità è conosciuto in letteratura come il PBH test di raggiungibilità (dai nomi di Popov, Belevich, Hautus).

**Teorema 1.9** *Il sistema è raggiungibile se e solo se*

$$P_{rag}(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \end{bmatrix}$$

*ha rango massimo ( $n$ ) per ogni  $s$ .*

<sup>12</sup>Una matrice reale e simmetrica  $Q$  è detta essere semidefinita positive se la forma quadratica  $x'Qx$  è non negativa per ogni  $x$ .

*Prova.* Se per un certo  $s = \lambda$  il rango di  $P_{rag}(\lambda)$  non fosse massimo, si avrebbe, per un certo  $x \neq 0$ :

$$x^*B = 0, \quad x^*A = \lambda x^*$$

Quindi  $x^*A^k B = x^*B\lambda^k = 0, \forall k \geq 0$ . Questo implica che  $x^*K_r = 0$ , contraddicendo il test di raggiungibilità. Viceversa, se  $x^*K_r = 0$  per un certo  $x \neq 0$  allora  $x^*A^k B = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$ . Sia ora  $\nu(A)$  un polinomio di  $A$  di grado minimo tale che  $x^*\nu(A) = 0$ . Tale polinomio si può scrivere come  $\tilde{\nu}(A)(\lambda I - A)$ , dove  $\tilde{\nu}(A)$  è un polinomio di  $A$  tale che  $y^* = x^*\tilde{\nu}(A) \neq 0$  (altrimenti la minimalità di  $\nu(A)$  sarebbe violata). Quindi, dalla relazione  $x^*A^k B = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$  si ha  $y^*B = 0$  e inoltre  $y^*A = \lambda y^*$ . Ciò significa che  $y^*P_{rag}(\lambda) = 0$ , il che è assurdo.

**Osservazione 1.3** Sia

$$S_{rag}(s) = \left[ \text{diag}\{\alpha_i^{rag}(s)\} \quad 0 \right]$$

la forma di Smith di  $P_{rag}(s)$ <sup>13</sup>. Un numero complesso  $\lambda$  è detto essere uno zero di disaccoppiamento di ingresso se è una radice del polinomio

$$\alpha^{rag}(s) := \alpha_1^{rag}(s)\alpha_2^{rag}(s) \cdots \alpha_n^{rag}(s)$$

E' facile che un numero complesso  $\lambda$  è uno zero di disaccoppiamento di ingresso se e solo se esiste  $w \neq 0$  tale che

$$P'_{rag}(\lambda)w = 0$$

■

Si consideri infine l'equazione di Lyapunov nell'incognita  $S$ :

$$AS + SA' + BB' = 0 \tag{1.9}$$

Nel teorema seguente dimostriamo che le soluzioni simmetriche  $S$  dell'equazione di Lyapunov sono invertibili se il sistema è raggiungibile.

**Teorema 1.10** *Sia  $(A, B)$  raggiungibile. Allora ogni soluzione simmetrica  $S$  dell'equazione di Lyapunov (1.9) è invertibile. Inoltre, l'equazione ammette una soluzione definita positiva (unica) se e solo se  $A$  è di Hurwitz. Tale soluzione si può scrivere come:*

$$W_c = \int_0^\infty e^{At} B B' e^{A't} dt$$

<sup>13</sup>A tale proposito si veda l'Osservazione 3.1.

*Prova.* Supponiamo per assurdo che  $x \in \text{Ker}[S]$ , cioè  $Sx = 0$  per un certo  $x \neq 0$ . Allora  $0 = x^*(AS + SA' + BB'x)$  implica  $B'x = 0$ . Inoltre  $0 = (AS + SA' + BB'x)$  implica  $SA'x = 0$ , col che  $A'x \in \text{Ker}[S]$  e  $B'A'x = 0$ . Procedendo in questo modo si ha che  $B'(A')^k x = 0, \forall k \geq 0$ , il che è assurdo per l'ipotesi di raggiungibilità.

Se  $A$  è di Hurvitz, allora  $W_c$  definita sopra esiste ed è semidefinita negativa. Se per assurdo  $W_c$  fosse singolare, risulterebbe per un certo  $x \neq 0, B'e^{A't}x = 0, \forall t \geq 0$ , che viola l'ipotesi di raggiungibilità.

Viceversa, sia  $S$  una soluzione definita positiva e per assurdo sia  $Ax = \lambda x$ , con  $\text{Re}(\lambda) \geq 0$  e  $x \neq 0$ . Allora  $2\text{Re}(\lambda)x^*Sx + x^*B'Bx = 0$  implica  $\text{Re}(\lambda) = 0$  e  $B'x = 0$ , che contraddice il PBH test.

Infine, se ci fossero due soluzioni  $S_1$  e  $S_2$  della stessa equazione, allora

$$A(S_1 - S_2) + (S_1 - S_2)A' = 0$$

col che, grazie all'asintotica stabilità<sup>14</sup> di  $A$ , l'unica soluzione di tale equazione è  $S_1 = S_2$ . ■

La soluzione  $W_c$  è cosidetto Grammiano di raggiungibilità su tempo infinito.

### 1.8.1 Assegnamento degli autovalori

Un sistema raggiungibile è algebricamente equivalente ad un sistema in forma canonica di controllo, che, nel caso di sistemi a semplice ingresso, è esprimibile nella forma

$$A_{con} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B_{con} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

dove i numeri  $a_i$  sono i coefficienti del polinomio caratteristico di  $A$ , cioè:

$$\det(sI - A) = s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \cdots + a_n$$

Per un sistema raggiungibile a singolo ingresso esiste sempre una trasformazione di base  $T_{con}$  tale che  $T_{con}AT_{con}^{-1} = A_{con}$ ,  $T_{con}B = B_{con}$ . E' facile

<sup>14</sup>L'equazione omogenea di Lyapunov  $A'X + XA + Q = 0$  con  $A$  quadrata  $n$  dimensionale può essere riscritta come  $\bar{A}\bar{x} = -\bar{q}$ , dove  $\bar{x} = \text{vec}(X)$  è il vettore  $n^2$  dimensionale ottenuto componendo per righe la matrice  $X$ ,  $\bar{q} = \text{vec}(Q)$  è il vettore  $n^2$  dimensionale ottenuto componendo la matrice  $Q$  per righe mentre  $\bar{A}$  è una matrice quadrata  $n^2$  dimensionale ottenuta attraverso la somma di Kronecker  $\bar{A} = A' \oplus A'$  (questa somma è definita come  $A' \otimes I + I \otimes A'$ , dove  $\otimes$  indica il prodotto di Kronecker). Gli autovalori di  $\bar{A}$  sono costituiti da tutte le possibili somme degli autovalori di  $A$ . Se quindi  $A$  non ha autovalori con somma nulla (questo succede per esempio se  $A$  è di Hurvitz), la matrice  $\bar{A}$  risulta invertibile e l'equazione di Lyapunov ammette una sola soluzione. Nel caso  $Q = 0$  l'unica soluzione è, per ispezione,  $X = 0$ .

poi rendersi conto che tale trasformazione è data da:

$$T_{con}^{-1} = K_r \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove  $K_r$  indica ancora la matrice di Kalman di raggiungibilità, definita nel Teorema 1.8. Una proprietà importante della raggiungibilità è la possibilità di posizionare ad arbitrio gli autovalori del sistema in anello chiuso attraverso una legge di controllo

$$u(t) = Kx(t)$$

dove  $K$  è una matrice di dimensioni ovvie. Il sistema ad anello chiuso è caratterizzato dalla matrice dinamica  $A + BK$  i cui autovalori dipendono in modo complicato dalla scelta della matrice  $K$ . Fissati  $n$  numeri complessi (a due a due complessi coniugati)  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  è però possibile trovare almeno una matrice  $K$  in modo tale che gli autovalori di  $A + BK$  coincidano con i  $\lambda_i$  assegnati. Questo problema è noto in letteratura come problema dell'assegnamento degli autovalori (pole placement). Nel caso di sistemi con un ingresso, la scelta di  $K$  è molto semplice. Consideriamo allora il caso  $m = 1$  e ricordiamo che un sistema è raggiungibile se e solo se è scrivibile nella forma canonica di controllo  $(A_{con}, B_{con})$ . Indicando con

$$K_{con} = \begin{bmatrix} K_{cn} & K_{c(n-1)} & K_{c(n-2)} & \cdots & K_{c1} \end{bmatrix}$$

un vettore riga generico e con

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix}$$

il vettore formato dai coefficienti  $\beta_i = a_i - K_{ci}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , risulta chiaro che

$$K = K_{con}T_{con}$$

è tale che

$$\begin{aligned} A + BK &= T_{con}^{-1}(A_{con} + B_{con}K_{con})T_{con} = \\ &= T_{con}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\beta_n & -\beta_{n-1} & -\beta_{n-2} & \cdots & -\beta_1 \end{bmatrix} T_{con} \end{aligned}$$

col che gli autovalori di  $A + BK$  possono essere assegnati ad arbitrio scegliendo i parametri  $K_{ci}$  del polinomio caratteristico ad anello chiuso:

$$\det(sI - A - BK) = s^n + (a_1 - K_1)s^{n-1} + (a_2 - K_2)s^{n-2} + \cdots + a_n - K_n$$

Quindi, se i  $\beta_i$  indicano i coefficienti del polinomio caratteristico desiderato e con  $a_i$  quelli di  $A$ , si arriva alla cosiddetta *formula di Bass-Gura*:

$$K = [a_n - \beta_n \quad a_{n-1} - \beta_{n-1} \quad \cdots \quad \beta_1 - a_1] T_{con}$$

Tale formula assume anche la forma

$$K = -[0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1] K_r^{-1} (A^n + \beta_1 A^{n-1} + \beta_2 A^{n-2} + \cdots + \beta_n I)$$

che è conosciuta come *Formula di Ackermann*.

La trattazione del caso multi-ingresso è molto più complessa in quanto in generale la soluzione non è unica. Essa esula dagli scopi prefissi in questa sede. In generale possiamo però affermare che

*Un sistema è raggiungibile se e solo se, per ogni scelta di  $n$  numeri complessi (a due a due complessi coniugati) è possibile trovare  $K$  tale che gli autovalori di  $A + BK$  coincidano con tali numeri complessi.*

### 1.8.2 Forma canonica e stabilizzabilità

La matrice di Kalman  $K_r$  è ancora importante anche quando il sistema non è raggiungibile. Infatti, in tale caso è possibile trovare una trasformazione di stato  $T_{rag}$  tale che nella nuova parametrizzazione il sistema risulta scomposta in due parti, chiamate rispettivamente *parte raggiungibile* e parte non raggiungibile. A tale scopo, si indichi con

$$\mathcal{X}_r = \text{Im}[K_r], \quad r = \dim[\mathcal{X}_r]$$

e si noti che il sottospazio  $\mathcal{X}_r$ , chiamato *sottospazio di raggiungibilità* è  $A$ -invariante<sup>15</sup>. Una conseguenza dell'invarianza è la seguente: si scelga una base  $x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rr}$  di  $\mathcal{X}_r$  e si definisca la matrice

$$T_{r1} = \begin{bmatrix} x_{r1} & x_{r2} & \cdots & x_{rr} \end{bmatrix}$$

Allora si ha:

$$AT_{r1} = T_{r1}A_r$$

dove  $A_r$  ha dimensioni  $r \times r$  ed è chiamata *restrizione* di  $A$  rispetto alla base scelta del sottospazio di raggiungibilità  $\mathcal{X}_r$ . Si noti ancora che

$$\text{Im}[B] \subset \mathcal{X}_r$$

<sup>15</sup>Un sottospazio  $\mathcal{X}$  si dice invariante rispetto ad una trasformazione  $A$  se  $A\mathcal{X} \subset \mathcal{X}$ , cioè se per ogni vettore  $x \in \mathcal{X}$  risulta  $Ax \in \mathcal{X}$ . Sia ora  $\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}\lambda^i$  il polinomio caratteristico di  $A$  e supponiamo che  $x = \sum_{i=0}^{n-1} A^i B \alpha_{n-i}$  sia un elemento di  $\mathcal{X}_r$ . Allora, grazie al teorema di Cayley Hamilton, anche  $Ax = \sum_{i=0}^{n-1} A^i B \beta_i$  appartiene a  $\mathcal{X}_r$ , con  $\beta_{n-i} = \alpha_{n-i+1} - \alpha_1 a_{n-i}$ ,  $\beta_n = -\alpha_1 a_n$ .

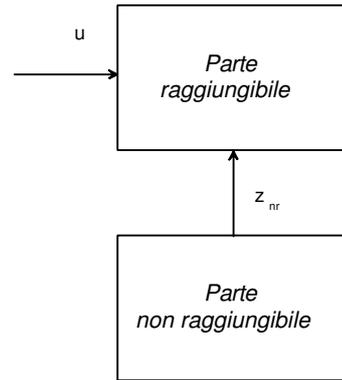


Figura 1.1: La scomposizione di Kalman di raggiungibilità

Anzi, è possibile dimostrare che  $\mathcal{X}_r$  è il più piccolo sottospazio  $A$ -invariante che contiene  $\text{Im}[B]$ . Infine, si completi la base di  $\mathcal{X}_r$  con  $n - r$  vettori  $x_{nr1}, x_{nr2}, \dots, x_{nr(n-r)}$ , tali da completare lo spazio  $n$ -dimensionale, e si definisca la matrice

$$T_{rag}^{-1} = \begin{bmatrix} x_{r1} & x_{r2} & \cdots & x_{rr} & x_{nr1} & \cdots & x_{nr(n-r)} \end{bmatrix}$$

Si ha

$$T_{rag}AT_{rag}^{-1} = \begin{bmatrix} A_r & \tilde{A}_r \\ 0 & A_{nr} \end{bmatrix}, \quad T_{rag}B = \begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

La parte  $(A_r, B_r)$  è detta *parte raggiungibile* mentre  $A_{nr}$  è la matrice della *parte non raggiungibile*. La coppia  $(A_r, B_r)$  risulta ovviamente raggiungibile. Indicando con  $z_r$  e  $z_{nr}$  le componenti del vettore  $z = T_{rag}x$  relative alle due parti, il sistema, nelle nuove coordinate, si può scrivere come:

$$\begin{aligned} \dot{z}_r(t) &= A_r z_r(t) + \tilde{A}_r z_{nr}(t) + B_r u(t) \\ \dot{z}_{nr}(t) &= A_{nr} z_{nr}(t) \end{aligned}$$

La conclusione è evidente: la dinamica della parte non raggiungibile è autonoma, cioè non è influenzata nè direttamente nè indirettamente dalle variabili di ingresso, vedi Figura 1.1. La forma appena introdotta prende il nome di *scomposizione di Kalman di raggiungibilità*.

**Osservazione 1.4** Consideriamo un sistema lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

e la sua funzione di trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Se la coppia  $(A, B)$  non è raggiungibile, il sistema si può scrivere scomposto nella parte raggiungibile e nella parte non raggiungibile, attraverso la trasformazione  $T_{rag}$ . La trasformazione  $C$  nella nuova base diventa:

$$CT_{rag}^{-1} = \begin{bmatrix} C_r & C_{nr} \end{bmatrix}$$

Quindi, il sistema, nella nuova base, si può scrivere come:

$$\begin{aligned} \dot{z}_r(t) &= A_r z_r(t) + \tilde{A}_r z_{nr}(t) + B_r u(t) \\ \dot{z}_{nr}(t) &= A_{nr} z_{nr}(t) \\ y(t) &= C_r z_r(t) + C_{nr} z_{nr}(t) + Du(t) \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento non dipende dalla base scelta per lo spazio di stato, e quindi risulta:

$$G(s) = C_r (sI - A_r)^{-1} B_r + D$$

che corrisponde alla funzione di trasferimento della sola *parte raggiungibile*. ■

Uno dei problemi più importanti della teoria del controllo è il cosiddetto problema della stabilizzazione dallo stato, cioè se sia possibile o no, data una coppia  $(A, B)$ , trovare una legge di controllo dallo stato capace di rendere il sistema ad anello chiuso asintoticamente stabile. Si può dimostrare che non è lesivo della generalità limitare l'attenzione a leggi di controllo statiche, lineari e invarianti nel tempo del tipo:

$$u = Kx$$

dove  $K$  è una matrice, di ovvie dimensioni, che renda  $A + BK$  asintoticamente stabile (se possibile). Risulta chiaro, da quanto abbiamo detto sul problema dell'assegnamento degli autovalori, che la raggiungibilità è una condizione sufficiente di stabilizzabilità. Osservando la forma scomposta del sistema nelle due parti si ha che la stabilizzazione è possibile se e solo se  $K_{rag} = KT_{rag}^{-1}$  è tale che  $T_{rag}AT_{rag}^{-1} + T_{rag}BK_{rag}$  è asintoticamente stabile. Suddividendo la matrice  $K_{rag}$  nel modo seguente  $K_{rag} = [K_{1rag} \ K_{2rag}]$  con  $K_{1rag}$  di dimensioni  $m \times r$ , si ha:

$$T_{rag} (A + BK) T_{rag}^{-1} = \begin{bmatrix} A_r + B_r K_{1rag} & \tilde{A}_r + B_r K_{2rag} \\ 0 & A_{nr} \end{bmatrix}$$

Poichè  $(A_r, B_r)$  è raggiungibile, da quanto detto in precedenza, è possibile assegnare ad arbitrio (in particolare stabilizzare) la parte raggiungibile, cioè fare in modo che  $A_r + B_r K_{1rag}$  sia di Hurvitz. Viceversa, non è possibile modificare gli autovalori della parte non raggiungibile. In conclusione:

*Il sistema è stabilizzabile se e solo se la parte non raggiungibile è asintoticamente stabile.*

La stabilizzabilità può anche essere testata attraverso la matrice  $P_{rag}(s)$  introdotta in precedenza. Risulta di facile comprensione il fatto che i numeri complessi  $s$  che abbassano il rango di  $P_{rag}(s)$  sono autovalori della parte non raggiungibile. Senza andare nei dettagli (la dimostrazione è del tutto simile a quella del Teorema 1.9), si ha il cosiddetto PBH test di stabilizzabilità:

*Il sistema è stabilizzabile se e solo se  $P_{rag}(s)$  ha rango massimo per ogni  $s$  con  $\text{Re}(s) \geq 0$ .*

Si noti ancora che nel caso il sistema sia stabilizzabile è possibile costruire una retroazione stabilizzante  $K = K_{rag}T_{rag}$  scegliendo  $K_r = [K_{1rag} \ K_{2rag}]$ , dove  $K_{1rag}$  è qualunque matrice che stabilizza  $A_r + B_r K_{1rag}$  (per esempio posiziona gli autovalori di tale matrici in posizioni stabilite del semipiano sinistro). Come si vede, la soluzione, se esiste, non è unica. E' molto interessante osservare che è possibile parametrizzare tutte le soluzioni  $K$  del problema della stabilizzazione, facendo riferimento alla disequazione di Lyapunov. Si ricordi infatti (Osservazione 1.1) che  $A + BK$  è asintoticamente stabile se e solo se esiste  $S > 0$  soluzione di

$$(A + BK)S + S(A + BK)' = AS + SA' + BKS + SK'B' < 0$$

Si noti che, nel problema di sintesi di  $K$ , questa disequazione ha due incognite  $S > 0$  e  $K$  che appaiono bilinearmente nella disequazione stessa. Possiamo affermare che l'insieme di tutti i  $K$  che rendono  $A + BK$  di Hurwitz non è convesso in generale. E' pero' possibile sovrapparametrizzare la soluzione rendendo il problema della stabilizzazione un problema tipicamente convesso. A tale scopo si definisca la variabile:

$$W = KS$$

e si riscriva la disequazione di Lyapunov nel modo seguente:

$$AS + SA' + BW + W'B' < 0$$

Si noti che tale disequazione è lineare nella coppia  $(S, W)$ . Allora:

*Tutte le soluzioni  $K$  del problema della stabilizzazione si possono scrivere come  $K = WS^{-1}$  dove  $W$  e  $S > 0$  soddisfano la disequazione lineare*

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S & W' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} < 0$$

## 1.9 Osservabilità e rivelabilità

Consideriamo ora il sistema stato/uscita:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

che esprime il movimento libero dell'uscita, e si indichi con  $x_0$  lo stato iniziale. Ci chiediamo se esistano stati iniziali  $x_0$  tali da generare un movimento libero dell'uscita identicamente nullo, per ogni  $t \geq 0$ . Un tale stato iniziale si dirà essere non osservabile, tale proprietà esprimendo la sua indistinguibilità dallo stato iniziale nullo (che genera ovviamente un movimento libero dell'uscita identicamente nullo). Se non esiste alcun  $x_0 \neq 0$  che genera movimento libero identicamente nullo, il sistema si dice osservabile. L'espressione del movimento libero è la seguente:

$$y(t) = Ce^{At}x_0, \quad t \geq 0$$

Ciò significa che  $x_0$  è tale che  $CA^k x_0 = 0, \forall k \geq 0$ . Da questo fatto e dal Teorema di Cayley-Hamilton segue che

**Teorema 1.11** *Il sistema è osservabile se e solo se la matrice di Kalman di non osservabilità*

$$K_\omega = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

ha rango massimo (uguale a  $n$ ).

Analogamente a quanto fatto per la raggiungibilità, esiste una caratterizzazione modale dell'osservabilità che fa riferimento alla matrice:

$$P_{oss}(s) = \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}$$

funzione della variabile complessa  $s$ . Il risultato che caratterizza l'osservabilità è di seguito riportato senza prova, in quanto completamente analoga a quella del Teorema 1.9.

**Teorema 1.12** *Il sistema è osservabile se e solo se*

$$P_{oss}(s) = \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}$$

ha rango massimo ( $n$ ) per ogni  $s$ .

**Osservazione 1.5** *Sia*

$$S_{oss}(s) = \begin{bmatrix} \text{diag}\{\alpha_i^{oss}(s)\} \\ 0 \end{bmatrix}$$

la forma di Smith di  $P_{oss}(s)$ <sup>16</sup>. Un numero complesso  $\lambda$  è detto essere uno zero di disaccoppiamento d'uscita se è una radice del polinomio

$$\alpha^{oss}(s) := \alpha_1^c(s)\alpha_2^{oss}(s) \cdots \alpha_n^{oss}(s)$$

<sup>16</sup>A tale proposito si veda l'Osservazione 3.1.

E' facile dimostrare che un numero complesso  $\lambda$  è uno zero di disaccoppiamento di uscita se e solo se esiste  $z \neq 0$  tale che

$$P_{oss}(\lambda)z = 0$$

■

Si consideri infine l'equazione di Lyapunov nell'incognita  $P$ :

$$A'P + PA + C'C = 0 \quad (1.10)$$

Il teorema seguente è analogo al Teorema 1.10 e riguarda l'invertibilità e la definizione positiva delle soluzioni dell'equazione precedente. Ancora la dimostrazione è omessa in quanto analoga a quella del teorema testè ricordato.

**Teorema 1.13** *Sia  $(A, C)$  osservabile. Ogni soluzione simmetrica dell'equazione di Lyapunov (1.10) è non singolare. Inoltre, questa equazione ammette una soluzione definita positiva (unica) se e solo se  $A$  è di Hurwitz. Tale soluzione si può scrivere come:*

$$W_o = \int_0^\infty e^{A't} C' C e^{At} dt$$

La soluzione  $W_o$  è il cosiddetto Grammiano di osservabilità su tempo infinito.

### Assegnamento degli autovalori

Un sistema osservabile è algebricamente equivalente ad un sistema in forma canonica di ricostruzione, che, nel caso di sistemi a semplice uscita, è esprimibile nella forma

$$A_{ric} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{ric} = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

dove i numeri  $a_i$  sono i coefficienti del polinomio caratteristico di  $A$ , cioè:

$$\det(sI - A) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n$$

Per un sistema osservabile a singola uscita esiste sempre una trasformazione di base  $T_{ric}$  tale che  $T_{ric} A T_{ric}^{-1} = A_{ric}$ ,  $C T_{ric}^{-1} = C_{ric}$ . Tale trasformazione è data da:

$$T_{ric} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} K_\omega$$

Una proprietà importante dell'osservabilità è la possibilità di posizionare ad arbitrio gli autovalori del ricostruttore dello stato:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= Ax(t) + L(C\hat{x}(t) - y(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t)\end{aligned}$$

dove  $L$  è una matrice di dimensioni ovvie. La dinamica di tale ricostruttore (questo termine sarà chiarito nel seguito) è data dalla matrice  $A + LC$ . Ci si chiede se sia possibile assegnare ad arbitrio tali autovalori. Un momento di riflessione mostra che la matrice trasposta è  $A' + C'L'$  ha la struttura di  $A + BK$ , studiata in precedenza, pur di sostituire  $A$  con  $A'$ ,  $B$  con  $C'$  e  $K$  con  $L'$ . Si può allora affermare che è possibile posizionare ad arbitrio gli autovalori di  $A + LC$  se e solo se è possibile per  $A' + C'K$  e questo è possibile se e solo se la coppia  $(A', C')$  è raggiungibile. Tuttavia si noti che la matrice di raggiungibilità di  $(A', C')$  è la trasposta della matrice di non osservabilità di  $(A, C)$ . Si ha quindi l'affermazione seguente:

*Un sistema è osservabile se e solo se, per ogni scelta di  $n$  numeri complessi (a due a due complessi coniugati) è possibile trovare  $L$  tale che gli autovalori di  $A + LC$  coincidano con tali numeri complessi.*

Nel caso a singola uscita, fissati  $n$  numeri complessi (a due a due complessi coniugati)  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  è facile trovare una matrice  $L$  in modo tale che gli autovalori di  $A + LC$  coincidano con i  $\lambda_i$  assegnati. Senza ripetere il procedimento delineato nel caso della raggiungibilità, se  $\beta_i$  sono i coefficienti del polinomio caratteristico desiderato, si possono agevolmente ricavare le formule di Bass-Gura e di Ackermann seguenti:

$$L = T_{ric}^{-1} \begin{bmatrix} a_n - \beta_n \\ a_{n-1} - \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

$$L = - \left( A^n + \beta_1 A^{n-1} + \beta_2 A^{n-2} + \dots + \beta_n I \right) K_\omega^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

### Forma canonica e rivelabilità

La matrice di Kalman  $K_o$  determina la dimensione del sottospazio di non osservabilità. Infatti, in tale caso è possibile trovare una trasformazione di stato  $T_{oss}$  tale che nella nuova parametrizzazione il sistema risulta scomposta in due parti, chiamate rispettivamente *parte non osservabile* e *parte osservabile*. A tale scopo, si indichi con

$$\mathcal{X}_{no} = \text{Ker}[K_\omega], \quad \omega = \dim[\mathcal{X}_{no}]$$

e si noti che il sottospazio  $\mathcal{X}_{no}$ , chiamato *sottospazio di non osservabilità* è  $A$ -invariante. Conseguentemente, scelta una base  $x_{no1}, x_{no2}, \dots, x_{now}$  di  $\mathcal{X}_{no}$  si ha

$$AT_{o1} = T_{o1}A_{no}$$

dove

$$T_{o1} = \begin{bmatrix} x_{no1} & x_{no2} & \cdots & x_{now} \end{bmatrix}$$

Ovviamente  $A_{no}$  ha dimensioni  $\omega \times \omega$  ed è chiamata *restrizione* di  $A$  rispetto alla base scelta del sottospazio di non osservabilità  $\mathcal{X}_{no}$ . Si noti ancora che

$$\mathcal{X}_{no} \subset \text{Ker}[C]$$

Anzi, è possibile dimostrare che  $\mathcal{X}_{no}$  è il più grande sottospazio  $A$ -invariante contenuto in  $\text{Ker}[C]$ . Infine, si completi la base di  $\mathcal{X}_{no}$  con  $n - \omega$  vettori  $x_{o1}, x_{o2}, \dots, x_{o(n-\omega)}$ , tali da completare lo spazio  $n$ -dimensionale, e si definisca la matrice

$$T_{oss}^{-1} = \begin{bmatrix} x_{no1} & x_{no2} & \cdots & x_{now} & x_{o1} & \cdots & x_{o(n-\omega)} \end{bmatrix}$$

Si ha

$$T_{oss}AT_{oss}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{no} & \tilde{A}_{no} \\ 0 & A_o \end{bmatrix}, \quad CT_{oss}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & C_o \end{bmatrix}$$

La parte  $(A_o, C_o)$  è detta *parte osservabile* mentre  $A_{no}$  è la matrice della *parte non osservabile*. La coppia  $(A_o, C_o)$  ovviamente risulta essere osservabile. Indicando con  $z_{no}$  e  $z_o$  le componenti del vettore  $z = T_{oss}x$  relative alle due parti, il sistema, nelle nuove coordinate, si può scrivere come:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{no}(t) &= A_{no}z_{no}(t) + \tilde{A}_{no}z_o(t) \\ \dot{z}_o(t) &= A_oz_o(t) \\ y(t) &= C_oz_o(t) \end{aligned}$$

La conclusione è evidente: la dinamica della parte non osservabile non riceve informazioni nè direttamente nè indirettamente dalle variabili di uscita. La forma appena introdotta prende il nome di *scomposizione di Kalman di osservabilità*, si veda la Figura 1.2.

**Osservazione 1.6** Analogamente a quanto fatto nell'Osservazione 1.4, consideriamo un sistema lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

e la sua funzione di trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

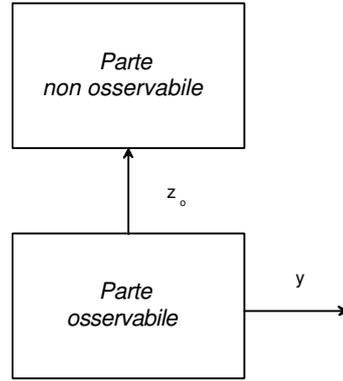


Figura 1.2: La scomposizione di Kalman di osservabilità

Se la coppia  $(A, C)$  non è osservabile, il sistema si può scrivere scomposto nella parte osservabile e nella parte non osservabile, attraverso la trasformazione  $T_{oss}$ . La trasformazione  $B$  nella nuova base diventa:

$$T_{oss}B = \begin{bmatrix} B_{no} \\ B_o \end{bmatrix}$$

Quindi, il sistema, nella nuova base, si può scrivere come:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{no}(t) &= A_{no}z_{no}(t) + \tilde{A}_{no}z_o(t) + B_{no}(t)u \\ \dot{z}_o(t) &= A_oz_{no}(t) + B_o(t)u \\ y(t) &= C_o(t)z_o + Du(t) \end{aligned}$$

Com'è noto (e facile da verificare) la funzione di trasferimento non dipende dalla base scelta per lo spazio di stato, e quindi risulta:

$$G(s) = C_o(sI - A_o)^{-1}B_o + D$$

che corrisponde alla funzione di trasferimento della sola *parte osservabile*. ■

Affrontiamo ora il problema della *ricostruzione asintotica dello stato*, cioè se sia possibile o no, trovare un sistema dinamico alimentato dalle misure  $y$  ed eventualmente dagli ingressi  $u$ , che fornisca asintoticamente una ricostruzione dello stato (e dell'uscita) indipendentemente dall'errore commesso sulla conoscenza dello stato iniziale. Si può dimostrare che per affrontare questo problema non è lesivo della generalità limitarsi ai ricostruttori asintotici in forma di osservatore, cioè a sistemi dinamici del tipo:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= Ax(t) + L(C\hat{x}(t) - y(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{aligned}$$

dove  $L$  deve essere progettata in maniera da assicurare che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) - x(t) \rightarrow 0$$

per qualunque  $\hat{x}(0), x(0)$ . Un semplice conto dimostra che, indicando con

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$

la differenza tra lo stato vero  $x(t)$  e quello ricostruito  $\hat{x}(t)$ , si ha

$$\dot{e}(t) = (A + LC)e(t) \quad (1.11)$$

e quindi per risolvere il problema basta ed occorre che  $A + LC$  sia di Hurwitz. Si dirà che un sistema (una coppia  $(A, C)$ ) è rivelabile se e solo se è possibile trovare  $L$  tale che  $A + LC$  è asintoticamente stabile. Risulta chiaro, da quanto abbiamo detto sul problema dell'assegnamento degli autovalori, che la osservabilità è una condizione sufficiente di rivelabilità. Osservando la forma scomposta del sistema nelle due parti (osservabile e non osservabile) si ha anche che la rivelabilità è possibile se e solo se la parte non osservabile (che non è influenzata da  $L$ ) è asintoticamente stabile. In conclusione:

*Il sistema è rivelabile se e solo se la parte non osservabile è asintoticamente stabile*

La rivelabilità può anche essere testata attraverso la matrice  $P_{oss}(s)$  introdotta in precedenza. Risulta di facile comprensione il fatto che i numeri complessi  $s$  che abbassano il rango di  $P_{oss}(s)$  sono autovalori della parte non osservabile. Senza andare nei dettagli (la dimostrazione è del tutto simile a quella del Teorema 1.9), si ha il cosiddetto PBH test di rivelabilità:

*Il sistema è rivelabile se e solo se  $P_{oss}(s)$  ha rango massimo per ogni  $s$  con  $\text{Re}(s) \geq 0$ .*

Si noti ancora che nel caso il sistema sia rivelabile è possibile costruire una ricostruttore asintoticamente stabile scegliendo  $L = T_{oss}^{-1}L_{oss}$  dove  $L_{oss} = [L'_{1oss} \ L'_{2oss}]'$ , dove  $L_{2oss}$  è qualunque matrice che stabilizza  $A_o + L_{1oss}C_o$  (per esempio posiziona gli autovalori di tale matrice in posizioni stabilite del semipiano sinistro). Come si vede, la soluzione, se esiste, non è unica.

E' interessante osservare (come fatto per la stabilizzabilità) che è possibile parametrizzare tutte le soluzioni  $L$  del problema della ricostruzione asintotica, facendo riferimento alla disequazione di Lyapunov. Si ricordi infatti (Osservazione 1.1) che  $A + LC$  è asintoticamente stabile se e solo se esiste  $P > 0$  soluzione di

$$(A + LC)'P + P(A + LC) = A'P + PA + C'L'P + PLC < 0$$

Questa disequazione ha due incognite  $P > 0$  e  $L$  che appaiono bilinearmente nella disequazione stessa. Possiamo affermare che l'insieme di tutti i  $L$  che

rendono  $A + LC$  di Hurwitz non è convesso in generale. E' però ancora possibile sovrapparametrizzare la soluzione rendendo il problema della ricostruzione asintotica un problema tipicamente convesso. A tale scopo si definisca la variabile:

$$\Omega = PL$$

e si riscriva la disequazione di Lyapunov nel modo seguente:

$$A'P + PA + \Omega C + C'\Omega' < 0$$

Si noti che tale disequazione è lineare nella coppia  $(S, \Omega)$  Allora:

*Tutte le soluzioni  $L$  del problema della stabilizzazione si possono scrivere come  $L = P^{-1}\Omega$  dove  $\Omega$  e  $S > 0$  soddisfano la disequazione lineare*

$$\begin{bmatrix} P & \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A' & C' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ \Omega' \end{bmatrix} < 0$$

**Osservazione 1.7** La trattazione dell'osservabilità e della rivelabilità è stata condotta senza dimostrazioni in quanto i risultati possono essere direttamente ricavati da quelli già esposti nel paragrafo dedicato alla raggiungibilità e stabilizzabilità. Infatti la coppia  $(A, B)$  è raggiungibile (stabilizzabile) se e solo se la coppia  $(A', B')$  è osservabile (rivelabile). Questo è un fatto caratterizzante la cosiddetta *teoria della dualità*.

**Osservazione 1.8** Supponiamo che il sistema sia descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Si consideri inoltre il sistema dinamico

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + L(C\hat{x}(t) + Du(t) - y(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t) \end{aligned}$$

che ha come ingresso  $u$  e  $y$ . Tale sistema dinamico è ancora un ricostruttore asintotico dello stato del sistema se  $L$  è scelta in maniera tale da rendere  $A + LC$  asintoticamente stabile. Infatti, indicando ancora con  $e(t)$  l'errore di ricostruzione, è facile riconoscere (grazie alla linearità) che la dinamica di tale errore è ancora governata dal sistema autonomo (1.11).

## 1.10 Scomposizione in quattro parti e regolatore

Abbiamo visto in precedenza come sia possibile trovare delle parametrizzazioni che consentano di evidenziare le parti dello spazio di stato che sono raggiungibili, non raggiungibili, osservabili e non osservabili. Queste scomposizioni

sono state ricavate singolarmente per quanto riguarda le proprietà di raggiungibilità, da una parte, e di osservabilità dall'altra. Mettiamo ora brevemente insieme le considerazioni svolte, per arrivare in modo diretto ad una scomposizione nella quattro parti *raggiungibile e non osservabile*, *raggiungibile ed osservabile*, *non raggiungibile ed osservabile*, *non raggiungibile e non osservabile*.

Si ricordi dapprima che il sottospazio di raggiungibilità  $\mathcal{X}_r$ , così come quello di non osservabilità  $\mathcal{X}_{no}$ , sono  $A$ -invarianti. Allora l'intersezione di questi due sottospazi  $\mathcal{X}_a = \mathcal{X}_r \cap \mathcal{X}_{no}$  è ancora  $A$ -invariante. Sia poi  $\mathcal{X}_b$  un sottospazio tale che  $\mathcal{X}_a + \mathcal{X}_b = \mathcal{X}_r$  e  $\mathcal{X}_c$  un sottospazio tale che  $\mathcal{X}_a + \mathcal{X}_c = \mathcal{X}_{no}$ . Gli elementi di  $\mathcal{X}_a$  possono a buona ragione essere chiamati stati non osservabili e raggiungibili, mentre quelli di  $\mathcal{X}_b$  osservabile e raggiungibili e quelli di  $\mathcal{X}_c$  non raggiungibili e non osservabili. Chiamiamo  $\mathcal{X}_d$  un sottospazio tale che  $\mathcal{X}_a + \mathcal{X}_b + \mathcal{X}_c + \mathcal{X}_d$  completi lo spazio  $n$ -dimensionale. Si definisca  $T^{-1}$  una matrice formata giustapponendo le basi di  $\mathcal{X}_a, \mathcal{X}_b, \mathcal{X}_c$  e  $\mathcal{X}_d$ . Per costruzione risulta:

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix}, \quad TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$CT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix}$$

Gli stati relativi alle quattro parti si influenzano come indicato nella Figura 1.3.

Com'è evidente, la funzione di trasferimento del sistema dipende solo dalla parte che è contemporaneamente raggiungibile ed osservabile, cioè:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = C_2(sI - A_{22})^{-1}B_2 + D$$

Una conseguenza importante della scomposizione è l'osservazione che gli autovalori delle parti non raggiungibile e/o non osservabili non possono essere modificati da una retroazione dall'uscita, nè statica, nè dinamica. Affinchè il sistema possa essere stabilizzato da una retroazione dall'uscita è quindi necessario (e si verà, anche sufficiente) che il sistema sia stabilizzabile e rivelabile, cioè che gli autovalori di  $A_{11}$ ,  $A_{33}$  e  $A_{44}$  siano a parte reale strettamente negativa.

## 1.11 Realizzazione

Lo scopo di questo paragrafo è ricordare il problema della realizzazione in spazio di stato. Si parla, in generale, di realizzazione, come del procedimento atto a ricavare le equazioni in spazio di stato di un sistema dinamico di cui si abbia a disposizione un modello ingresso-uscita. Per semplicità supponiamo

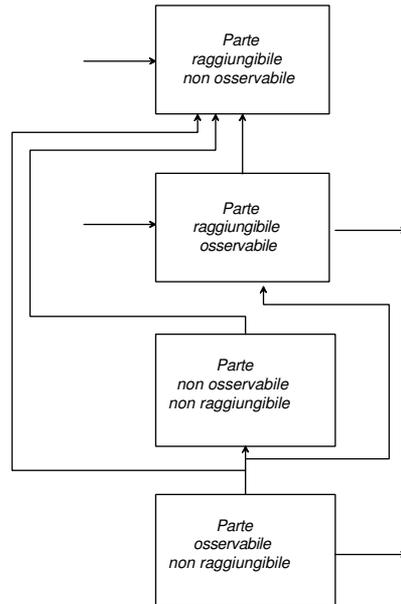


Figura 1.3: La scomposizione di Kalman nelle quattro parti

qui di avere a disposizione una funzione (anche matriciale)  $G(s)$  e di volere ricavare le equazioni di un sistema lineare, a dimensioni finite, e invariante nel tempo, cioè una quadrupla di matrici  $(A, B, C, D)$  di cui  $G(s)$  sia la funzione di trasferimento, cioè:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Una facile condizione necessaria per l'esistenza di una realizzazione si ricava immediatamente dalla consapevolezza che ogni elemento della funzione di trasferimento di un tale sistema è per costruzione una funzione razionale propria, cioè un rapporto di polinomi con il numeratore di grado non superiore al grado del denominatore. Una volta dimostrata l'esistenza di una qualunque realizzazione, diventa importante il problema della ricerca di una *realizzazione minima*, cioè di una realizzazione con ordine (dello spazio di stato) non superiore a quello di qualsiasi altra realizzazione.

Per quello che segue è bene introdurre la definizione di *parametri di Markov* di una sistema. La funzione  $G(s)$  si può sviluppare intorno a  $s = \infty$  nel modo seguente:

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k s^{-k}$$

Notiamo anche che  $(sI - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-k-1}$ . Quindi, data una realizzazione  $(A, B, C, D)$  risulta

$$M_0 = D, \quad M_i = CA^{i-1}B$$

Le matrici  $M_i$  sono chiamate parametri di Markov e ammettono una semplice interpretazione in termini di risposta impulsiva del sistema  $(A, B, C)$ . Tale risposta è data da  $g(t) = Ce^{At}B$  e risulta quindi che  $M_{i+1}$  rappresenta la derivata di ordine  $i$ -esimo di  $g(t)$  valutata in  $t = 0$ .

E' spesso utile organizzare i parametri di Markov in matrici a blocchi. La *matrice di Hankel* di ordine  $k$  è la seguente:

$$H_k = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & \cdots & M_k \\ M_2 & M_3 & M_4 & \cdots & M_{k+1} \\ M_3 & M_4 & M_5 & \cdots & M_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_k & M_{k+1} & M_{k+2} & \cdots & M_{2k-1} \end{bmatrix}$$

Si noti che  $H_k$  può essere scritta come:

$$H_k = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{k-1}B \end{bmatrix}$$

Ricordando le definizioni di matrici di Kalman di raggiungibilità e non osservabilità, questa scrittura mette in luce un fatto importante, affermato nel risultato seguente.

**Teorema 1.14** *Se il sistema dinamico  $(A, B, C, D)$  di ordine  $n$  è raggiungibile ed osservabile, il rango di  $H_{n+i}$  è uguale a  $n$  per ogni  $i \geq 0$ .*

*Prova.* La matrice di Hankel di ordine  $n$  si scrive come:

$$H_n = K_\omega K_r$$

dove  $K_\omega$  e  $K_r$  sono le matrici di Kalman di raggiungibilità ed osservabilità. Tali matrici hanno rispettivamente  $n$  colonne e  $n$  righe. Il rango di  $H_{n+i}$ ,  $i > 0$  non può dunque essere maggiore di  $n$ . Essendo il sistema raggiungibile ed osservabile il rango di  $K_\omega$  e il rango di  $K_r$  è esattamente uguale alla dimensione  $n$  del sistema. Supponiamo ora che  $K_\omega K_r$  abbia rango minore di  $n$ . Quindi esistono  $n$  vettori linearmente dipendenti  $u_i$  tali che i vettori  $K_\omega K_r u_i$  risultino linearmente dipendenti, cioè tali che per certi numeri  $\alpha_i$  risulti:

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i K_\omega K_r u_i = K_\omega \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i K_r u_i \right]$$

Per l'osservabilità ciò significa che

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i K_r u_i$$

che però viola la  $n$ -dimensionalità dello spazio immagine di  $K_r$  (raggiungibilità). ■

A proposito di realizzazione minima, si hanno i seguenti risultati.

**Teorema 1.15** *Due realizzazioni  $(A_1, B_1, C_1, D_1)$  e  $(A_2, B_2, C_2, D_2)$ , entrambe raggiungibili ed osservabili, hanno lo stesso ordine.*

*Prova.* Siano  $n_1$  e  $n_2$  i due ordini e dimostriamo che  $n_1 = n_2$ . Supponiamo per assurdo che  $n_1 > n_2$ . Si indichino con  $H_{n_2}^{(i)}$  le due matrici di Hankel di ordine  $n_2$  associate ai due sistemi,  $i = 1, 2$ . Per l'affermazione precedente si ha che le due matrici di Hankel hanno ordine  $n_1$  e  $n_2$ , rispettivamente. Essendo i parametri di Markov associati alle due realizzazioni gli stessi (sono realizzazioni della stessa funzione di trasferimento) si ha però che  $H_{n_2}^{(1)} = H_{n_2}^{(2)}$ , col che  $n_1 = n_2$ . La dimostrazione del caso  $n_2 < n_1$  è completamente analoga.

**Teorema 1.16** *Una realizzazione è minima se e solo se è raggiungibile ed osservabile.*

*Prova.* Se la realizzazione non è raggiungibile o non è osservabile, allora ne esiste un'altra raggiungibile o osservabile di ordine inferiore, ricavabile attraverso la scoposizione di Kalman (si ricordino le Osservazioni 1.4 e 1.6). Quindi essa non può essere minima. D'altra parte, se la realizzazione raggiungibile ed osservabile non fosse minima, ne esisterebbe una minima di ordine inferiore che, per quanto appena detto, sarebbe raggiungibile ed osservabile. L'assurdo segue dal teorema precedente che afferma che tutte le realizzazioni raggiungibili ed osservabili hanno la stessa dimensione. ■

Siccome tutte le realizzazioni minime hanno lo stesso ordine e sono raggiungibili ed osservabili, possiamo chiederci se esse siano algebricamente equivalenti, cioè se sia possibile passare da una all'altra realizzazione attraverso un cambio di coordinate nello spazio di stato. La risposta a tale questione è positiva. Se  $x^i$  rappresenta lo stato della realizzazione  $i = 1, 2$  allora la trasformazione di base è la seguente:

$$x^1 = Tx^2, \quad T = \left( (K_\omega^2)' K_\omega^2 \right)^{-1} (K_\omega^2)' K_\omega^1$$

dove  $K_\omega^i$ ,  $i = 1, 2$  sono le matrici di non osservabilità del sistema  $i$ -esimo. In base a questo risultato possiamo affermare che *la realizzazione minima è unica a meno di un cambio di base.*

### Caso scalare

Supponiamo di avere a disposizione la funzione una funzione scalare razionale propria  $G(s)$ . Un minimo di riflessione fa comprendere che una tale funzione

può sempre essere scritta come:

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^{n-1} + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n} + d$$

Allora, per costruzione si dimostra che

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \dots & b_2 & b_1 \end{bmatrix}, \quad D = d$$

è una realizzazione di  $G(s)$ , chiamata *realizzazione in forma canonica di controllo*. Infatti, la struttura di  $A$  e  $B$  mette in evidenza che tale coppia è in forma canonica di controllo e corrisponde pertanto ad un sistema per costruzione raggiungibile. Il sistema risulta anche osservabile (la semplice verifica è lasciata al lettore) se e solo se i due polinomi al numeratore e al denominatore sono coprimi. In tale caso la realizzazione è una realizzazione minima.

La forma duale può essere definita facendo riferimento alla *realizzazione in forma canonica di ricostruzione*:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & \dots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \dots \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = d$$

Il sistema così costruito è osservabile e risulta raggiungibile se e solo se i due polinomi al numeratore e al denominatore sono coprimi. In tale caso la realizzazione è una realizzazione minima.

Si osservi che se la funzione di trasferimento  $G(s)$  è scritta come la somma di funzioni di trasferimento (più semplici)  $G_i(s)$ , ognuna delle quali possiede poli diversi dalle altre, allora una realizzazione minima  $(A, B, C, D)$  si ottiene ponendo in parallelo le singole realizzazioni  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$  delle funzioni addizionate e risulta:

$$A = \text{blkdiag}\{A_i\}, \quad B = \text{col}\{B_i\}, \quad C = \text{row}\{C_i\}, \quad D = \sum_i D_i$$

### Caso multivariabile

Il caso multivariabile è ovviamente molto più complicato di quello scalare. Esistono molti metodi per ottenere una realizzazione minima, tutti con pregi e difetti dal punto di vista computazionale. C'è da osservare, come prima cosa, che l'ottenimento di una realizzazione (non minima) di una funzione razionale propria  $G(s)$  è relativamente semplice. Iniziamo infatti da una  $G(s)$  costituita da  $p$  righe e una sola colonna, cioè:

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \\ \vdots \\ G_p(s) \end{bmatrix}$$

dove le funzioni  $G_i(s)$  sono razionali proprie. E' sempre possibile ricavare il minimo comune multiplo dei denominatori di ciascuna delle  $G_i(s)$  e scrivere:

$$G_i(s) = \frac{b_1^i s^{n-1} + b_2^i s^{n-2} + \dots + b_n^i}{s^{n-1} + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n} + d_i, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

Dovrebbe a questo punto essere banale verificare che la quadrupla  $(A, B, C, D)$  è una realizzazione minima di  $G(s)$ , con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_n^1 & b_{n-1}^1 & \dots & b_1^1 \\ b_n^2 & b_{n-1}^2 & \dots & b_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n^p & b_{n-1}^p & \dots & b_1^p \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_p \end{bmatrix}$$

A questo punto una realizzazione non minima si può trovare da una generica matrice di elementi razionali propri  $G(s)$ , realizzando le varie colonne e sommando i vari vettori di uscita. Ovviamente le stesse considerazioni possono essere fatte per la realizzazione per righe.

Da quanto detto ci si rende conto che esiste sempre una realizzazione di una data  $G(s)$  razionale propria. Ha senso quindi cercare una realizzazione minima. Un metodo diretto per la costruzione di una realizzazione minima è quello di Ho, efficace in quanto richiede solo manipolazioni di matrici costanti. In primo luogo si noti che poichè la funzione razionale propria

$$G(s) = \sum_{i=0}^{\infty} M_i s^{-i}$$

ammette sempre una realizzazione (anche non minima), allora è possibile ricavare un numero  $k$  tale che

$$M_{k+i} = -\sum_{j=1}^k M_{k-j+i}, \quad \forall i \geq 1$$

Infatti, se  $\bar{A}$  è la matrice dinamica di una qualunque realizzazione,  $k$  può essere scelto come il grado del polinomio minimo associato ad  $\bar{A}$ . Una volta individuato il numero  $k$  è possibile ricavare una realizzazione minima nel modo seguente. Si consideri la matrice di Hankel  $H_k$  di ordine  $k$  e si trovino due matrici quadrate non singolari  $P$  e  $Q$ , di dimensioni  $kp$  e  $km$  tali che:

$$PH_kQ = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove  $n$  è il rango di  $H_k$ . Si definisca la matrice

$$E_N^M = \begin{cases} \begin{bmatrix} I_M & 0 \end{bmatrix} & \text{se } M < N \\ I_M & \text{se } M = N \\ \begin{bmatrix} I_N \\ 0 \end{bmatrix} & \text{se } M > N \end{cases}$$

e infine la matrice

$$\tilde{H}_k = \begin{bmatrix} M_2 & M_3 & M_4 & \cdots & M_{k+1} \\ M_3 & M_4 & M_5 & \cdots & M_{k+2} \\ M_4 & M_5 & M_6 & \cdots & M_{k+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k+1} & M_{k+2} & M_{k+3} & \cdots & M_{2k} \end{bmatrix}$$

Una realizzazione minima (la prova è costruttiva ed è omessa) è data da:

$$A = E_{kp}^n P \tilde{S} Q E_n^{km}, \quad B = E_{kp}^n P H_k E_m^{km}, \quad C = E_{kp}^p H_k Q E_n^{km}, \quad D = M_0$$

## 1.12 Problema del regolatore

Concludiamo il capitolo fornendo una procedura di sintesi di un regolatore dinamico capace di stabilizzare gli autovalori del sistema risultante o di assegnarli ad arbitrio. Si consideri il sistema ad anello chiuso in Figura 1.4 dove  $S$  è governato dalle equazioni di stato

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

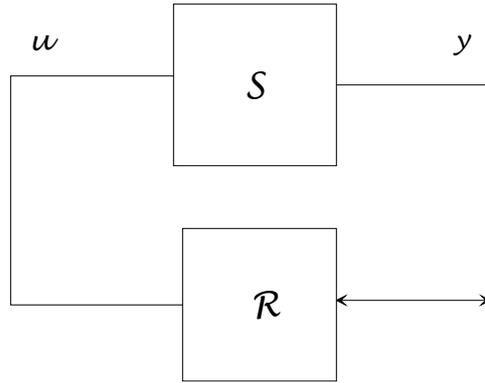


Figura 1.4: Sistema retroazionato

mentre  $R$  è il regolatore da progettare, avente equazioni di stato

$$\begin{aligned}\dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + B_r y(t) \\ u(t) &= C_r x_r(t) + D_r y(t)\end{aligned}$$

Come si vede il regolatore ha come ingresso l'uscita del sistema da regolare e come uscita l'ingresso dello stesso sistema. Affinchè il sistema retroazionato sia ben posto occorre e basta che

$$\det[I - DD_r] \neq 0$$

In caso contrario, infatti, il sistema retroazionato perderebbe la proprietà di essere un sistema dinamico proprio.

La configurazione di Figura 1.4 è quella di un sistema di controllo in retroazione, autonomo:

$$\dot{z}(t) = A_f z(t), \quad A_f = \begin{bmatrix} A & BC_r \\ B_r C & A_r + B_r DC_r \end{bmatrix}$$

Si noti che la dimensione del sistema complessivo (e quindi della matrice  $A_f$ ) è  $n + n_r$ , dove  $n$  è la dimensione del sistema e  $n_r$  quella del regolatore.

**Teorema 1.17** *Se il sistema è stabilizzabile e rivelabile esiste sempre un regolatore tale che il sistema in anello chiuso risulti asintoticamente stabile.*

*Prova.* Come già abbiamo più volte osservato, la mancanza di stabilizzabilità e/o di rivelabilità pregiudica la modifica degli autovalori instabili delle parti corrispondenti e quindi la possibilità di stabilizzare con un regolatore (anche dinamico) il sistema. Se viceversa il sistema è stabilizzabile e rivelabile è possibile costruire un regolatore di ordine  $n_r = n$  nel modo seguente:

$$A_r = A + LC + LDK + BK, \quad B_r = -L, \quad C_r = K, \quad D_r = 0$$

dove  $K$  e  $L$  sono matrici (si ricordi che esistono) tali da rendere asintoticamente stabile  $A + BK$  e  $A + LC$ , rispettivamente. Per verificare che il sistema in anello chiuso  $2n$  dimensionale ha tutti autovalori nel semipiano sinistro, basta definire la variabile  $e(t) = x(t) - x_r(t)$ . Risulta:

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= Ax(t) + Bu(t) - (A + LC + LDK + BK)x_r(t) + Ly(t) \\ &= Ae(t) + BKx_r(t) - (LC + LDK + BK)x_r(t) + LC(t)x(t) + LDKx_r(t) \\ &= (A + LC)e(t) \\ \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) = Ax(t) + BKx_r(t) \\ &= Ax(t) + BK(x(t) - e(t)) = (A + BK)x(t) - BKe(t)\end{aligned}$$

e quindi il sistema complessivo si può scrivere come:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + LC & 0 \\ -BK & A + BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

La matrice del sistema complessivo in anello chiuso  $A_f$  è quindi simile ad una matrice triangolare a blocchi che ha come autovalori quelli di  $A + LC$  e quelli di  $A + BK$ . ■

Il regolatore strutturato nella prova del teorema precedente gode del *principio di separazione*, poichè, applicato al sistema lineare è tale da separare gli autovalori ottenuti per il ricostruttore asintotico dello stato e quelli ottenuti da una legge di controllo dello stato. Infatti è facile verificare che il regolatore si può scrivere come:

$$\begin{aligned}\dot{x}_r(t) &= Ax_r(t) + Bu(t) + L(Cx_r(t) + Du(t) - y(t)) \\ u(t) &= Kx_r(t)\end{aligned}$$

Tali equazioni mettono in evidenza la struttura del regolatore come formato da un ricostruttore asintotico dello stato che si chiude con una legge di controllo sullo stato.

Come considerazione finale si osservi che se il sistema è raggiungibile ed osservabile, gli autovalori di  $A + BK$  e di  $A + LC$  sono assegnabili ad arbitrio. In questo caso è possibile costruire un regolatore  $n$  dimensionale tale che il sistema risultante abbia  $2n$  autovalori arbitrariamente assegnati (a due e due complessi coniugati). La costruzione invece di regolatori stabilizzanti di dimensioni ridotte attraverso la teoria dell'*osservatore di Luenberger* è rimandata a testi specializzati. A titolo illustrativo, si consideri l'esempio seguente.

**Esempio 1.2** *Si consideri l'esempio scalare:*

$$G(s) = \frac{1}{s - 2}$$

Quindi  $A = 2$ ,  $B = C = 1$  e  $D = 0$ . Scegliendo  $L = -3$  e  $K = -4$  si ha un regolatore con funzione di trasferimento

$$R(s) = \frac{-12}{s+5}$$

per cui il polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso è:

$$1 - R(s)G(s) = 0 \quad \rightarrow \quad (s+2)(s+1) = 0$$

Quindi gli autovalori del sistema ad anello chiuso sono  $-1 = A + LC$  e  $-2 = A + BK$ . Si noti che è possibile trovare un regolatore stabilizzante di ordine minore, per esempio  $R(s) = -3$ , che dà origine ad un polinomio caratteristico in anello chiuso coincidente con

$$1 - R(s)G(s) = 0 \quad \rightarrow \quad s+1 = 0$$

L'esempio mette in luce come sia possibile, in generale, ricavare un regolatore stabilizzante di ordine inferiore all'ordine del sistema.

### 1.13 BIBO Stabilità

In questa sezione si mettono in luce le relazioni esistenti tra asintotica stabilità e BIBO stabilità, per un sistema lineare e invariante nel tempo del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.12)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.13)$$

Alla luce di tutte le discussioni fatte, sappiamo già che la stabilità asintotica dipende solo dalla matrice  $A$  ed è assicurata se e solo se essa è di Hurwitz. Viceversa, la stabilità BIBO riguarda il rapporto tra la risposta forzata dell'uscita e l'ingresso. Come già anticipato, si ha stabilità BIBO se qualunque sia la funzione di ingresso  $u(t)$  limitata per  $t \geq 0$ , la risposta forzata dell'uscita, data da

$$y_f(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

è limitata per  $t > 0$ . D'altra parte la funzione delle risposte all'impulso si può sempre scrivere come

$$g(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) = \hat{C}e^{\hat{A}t}\hat{B} + D\delta(t)$$

dove  $(A, B, C, D)$  è il sistema dato e  $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$  è una realizzazione minima di  $g(t)$  (o della funzione di trasferimento  $G(s)$ , sua trasformata di Laplace). Quindi, (si ricordi la forma di Jordan) ogni elemento  $g_{ij}(t)$  della matrice delle risposte all'impulso è una combinazione di termini esponenziali, cioè:

$$g_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{p=0}^{g_k-1} \alpha_{kp} t^p e^{\lambda_k t} \quad (1.14)$$

dove  $\mu$  è il numero di autovalori distinti di  $\hat{A}$ ,  $\lambda_k$  sono gli autovalori di  $\hat{A}$  e  $g_k$  è l'indice (dimensione del più grande miniblocco di Jordan) relativo all'autovalore  $\lambda_k$ . Si ha il seguente risultato.

**Teorema 1.18** *Il sistema (1.12), (1.13) è BIBO stabile se e solo se vale una delle due condizioni equivalenti:*

(i)

$$\int_0^{\infty} \|g(\tau)\| d\tau < \infty$$

(ii)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$$

*Prova.*

(i)  $\rightarrow$  BIBO. E' evidente che se vale la condizione (i) allora, per ogni funzione di ingresso limitata, cioè  $\|u(r)\| < M, \forall r \geq 0$ , si ha

$$\begin{aligned} \|y_f(t)\| &= \left\| \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \right\| \leq \int_0^t \|g(\tau)\| \|u(t-\tau)\| d\tau \\ &\leq \int_0^{\infty} \|g(\tau)\| \|u(t-\tau)\| d\tau \leq M \int_0^{\infty} \|g(\tau)\| d\tau < \infty \end{aligned}$$

(ii)  $\rightarrow$  (i). Se vale la condizione (ii), la matrice  $\hat{A}$  è di Hurwitz. Quindi  $\|e^{\hat{A}t}\| \leq \alpha e^{-\beta t}$  con  $\alpha$  e  $\beta$  positivi. Quindi

$$\int_0^{\infty} \|g(\tau)\| d\tau \leq \|C\| \|B\| \alpha \int_0^{\infty} e^{-\beta\tau} d\tau + \|D\| \leq \frac{\|C\| \|B\| \alpha}{\beta} + \|D\|$$

BIBO  $\rightarrow$  (ii). Se la condizione (ii) non vale, allora esiste un elemento  $g_{ij}(t)$  di  $g(t)$  tale che

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} |g_{ij}(\tau)| \neq 0$$

Prendiamo allora  $T > 0$  e un segnale di ingresso del tipo:

$$u(t) = e_j \operatorname{sgn}(T-t)$$

dove  $e_j$  è il vettore  $j$ -esimo della matrice unitaria di dimensione  $m$ . Se denotiamo con  $y_{fi}(t)$  la componente  $i$ -esima della risposta forzata, si ha, per  $t \geq 0$ :

$$y_{fi}(T) = \int_0^T e'_i g(\tau) u(T-\tau) d\tau = \int_0^T |g_{ij}(\tau)| d\tau$$

Ci si rende conto facilmente che essendo  $|g_{ij}(t)|$  non asintotico a zero, la risposta  $y_{fi}(T)$  non è limitata per  $T$  che tende all'infinito. ■

Si noti che l'equivalenza tra le condizioni (i) e (ii) vale per la classe di sistemi considerati e non può essere estesa, ad esempio, ai sistemi lineari varianti nel tempo. Infatti, si consideri il sistema scalare

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{t+1}x(t) + u(t), \quad y(t) = x(t)$$

E' facile riconoscere che la funzione della risposta all'impulso a partire dall'istante iniziale  $t = 0$  è

$$g(t) = \frac{1}{t+1}$$

Tale funzione soddisfa la condizione (ii) ma non la condizione (i) in quanto

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t |g(\tau)| d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \log(|t+1|) = \infty$$

