

Capitolo 3

Zeri e poli

In questo capitolo ricordiamo alcune proprietà della funzione di trasferimento, estendendole al caso di sistemi con più ingressi e uscite. Le nozioni che studiamo sono quelle di *poli* e *zeri* del sistema. Partiamo dalle equazioni che descrivono un sistema lineare, a dimensioni finite e invariante nel tempo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

con n stati, m ingressi e p uscite. Indichiamo per brevità questo sistema con il simbolo $\Sigma(A, B, C, D)$ o semplicemente Σ se non vi è ambiguità.

Facciamo anche riferimento alla funzione di trasferimento, che, com'è noto, assume la forma:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Ricordiamo che $G(s)$ è una matrice razionale di dimensioni $p \times m$. Per evitare casi banali assumiamo che la funzione di trasferimento abbia rango massimo, cioè coincidente con il minimo tra m e p , indicato nel seguito con la lettera r .

3.1 Zeri di Trasmissione

Data la funzione razionale $G(s)$ è sempre possibile trovare due matrici polinomiali unimodulari $U_1(s)$ e $U_2(s)$ ¹ tali che $G(s) = U_1(s)M(s)U_2(s)$, con

$$M(s) = \left[\begin{array}{ccccc} f_1(s) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & f_2(s) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_r(s) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right] \}_{p-r \text{ rows}} \quad (3.1)$$

¹Una matrice quadrata polinomiale $U(s)$, cioè con elementi polinomi di s , si dice essere unimodulare se la matrice inversa $U(s)$ è anch'essa una matrice polinomiale.

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{m-r \text{ columns}}$$

con

$$f_i(s) = \frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

e

- $\varepsilon_i(s)$ e $\psi_i(s)$ sono polinomi monici e coprimi, $i = 1, 2, \dots, r$
- $\varepsilon_i(s)$ divide $\varepsilon_{i+1}(s)$, $i = 1, 2, \dots, r$
- $\psi_{i+1}(s)$ divide $\psi_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, r$

La forma (3.1) è chiamata *Forma di Smith-McMillan* di $G(s)$. Ora definiamo i polinomi $\pi_p(s)$ e $\pi_{zt}(s)$ nel modo seguente

$$\begin{aligned} \pi_p(s) &:= \psi_1(s)\psi_2(s) \cdots \psi_r(s) \\ \pi_{zt}(s) &:= \varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s) \cdots \varepsilon_r(s) \end{aligned}$$

I poli di $G(s)$ sono definiti come le radici di $\pi_p(s)$ e gli zeri di $G(s)$ come le radici di $\pi_{zt}(s)$.

La definizione di zeri e poli di una funzione razionale $G(s)$ coincide con quella di *zeri di trasmissione* e *poli di trasmissione* del sistema Σ avente $G(s)$ come funzione di trasferimento. Generalmente, i poli di trasmissione sono chiamati semplicemente poli del sistema.

Osservazione 3.1 Su una matrice polinomiale si definiscono tre *operazioni elementari*, che sono (1) lo scambio di due righe (o di due colonne), (2) la moltiplicazione di una riga (o di una colonna) per un numero diverso da zero, e (3) la somma di una riga (o colonna) con un'altra riga (o un'altra colonna) moltiplicata per un polinomio.

Data ora una matrice razionale $G(s)$, si può estrarre il polinomio $\psi(s)$ che è il minimo comune denominatore di tutti gli elementi e ottenere così una matrice polinomiale $N(s)$ tale che

$$G(s) = \frac{N(s)}{\psi(s)}$$

La forma di Smith-McMillan di $G(s)$ si può ottenere dalla *forma di Smith* $\tilde{N}(s)$ della matrice polinomiale $N(s)$,

$$\tilde{N}(s) = \left[\begin{array}{ccccc} n_1(s) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n_2(s) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n_r(s) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{ccccc} n_1(s) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n_2(s) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n_r(s) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} p-r \text{ rows} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{m-r \text{ columns}} \end{array}$$

dove i polinomi $n_i(s)$ sono monicii e $n_i(s)$ divide $n_{i+1}(s)$. Tale forma di Smith si ottiene attraverso le operazioni elementari sopra definite, che forniscono le due matrici unimodulari $U_1(s)$ e $U_2(s)$ per cui $N(s) = U_1(s)\tilde{N}(s)U_2(s)$ ².

Per calcolare i polinomi $n_i(s)$ della forma di Smith $\tilde{N}(s)$ di una matrice polinomiale $\tilde{N}(s)$, si può dimostrare che è possibile scrivere

$$n_i(s) = \frac{D_i(s)}{D_{i-1}(s)}, \quad D_0(s) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

dove $D_i(s)$ è il massimo comun divisore (monico) di tutti i minori di ordine i di $N(s)$.

Esempio 3.1 Consideriamo il sistema lineare $\Sigma(A, B, C, D)$ definito dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -13 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La funzione di trasferimento e la sua forma di Smith-Mc-Millan sono date da:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{(s-3)(s+1)}{(s-5)(s-2)} \\ \frac{(s-3)}{(s-5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ s-2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(s-3)}{(s-5)(s-2)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi c'è un solo zero di trasmissione in $s = 3$. ■

²Siano $n_{ij}(s)$ gli elementi (i, j) di $N(s)$. 1) Attraverso due operazioni elementari sulle righe e colonne di $N(s)$, si porti in posizione $(1, 1)$ un polinomio diverso da zero e di grado minimo. 2) Si scrive l'elemento $(2, 1)$ di $N(s)$ come $n_{21}(s) = n_{11}(s)\gamma(s) + \beta(s)$, con $\beta(s)$ tale che $\deg[\beta(s)] < \deg[n_{11}(s)]$. Si moltiplichi la prima riga per $\gamma(s)$ e si sottragga il risultato dalla seconda riga. In questo modo l'elemento $(2, 1)$ diventa $\beta(s)$. Ora, se $\beta(s) = 0$ si vada al passo 3), altrimenti si scambi la prima riga con la seconda e si ripeta ancora lo stesso passo. Ciò causa una continua riduzione del grado dell'elemento $(2, 1)$ e quindi, in un numero finito di passi risulta $n_{21}(s) = 0$. 3) Esattamente come nel passo 2), si portino tutti gli elementi della prima colonna a zero meno l'elemento $(1, 1)$. 4) Attraverso operazioni elementari sulle colonne si portino tutti gli elementi della prima riga a zero, a parte l'elemento $n_{11}(s)$. 5) Se il passo 4) ha reso diversi da zero gli elementi della prima colonna sotto $n_{11}(s)$, allora si torni al passo 2). Si noti che in un numero finito di operazioni dei passi 2)–4) ci si porta ad una situazione nella quale $n_{11}(s) \neq 0$, $n_{i1}(s) = 0$, $i = 2, 3, \dots, n$, $n_{1j}(s) = 0$, $j = 2, 3, \dots, m$. Se, in una delle colonne che non sia la prima un elemento non è divisibile per $n_{11}(s)$, si aggiunga questa colonna alla prima e si torni indietro al passo 2). Ad ogni iterazione del ciclo 2)–5) il grado di $n_{11}(s)$ decresce. Quindi, in un numero finito di cicli si arriva alla situazione in cui $n_{11}(s)$ divide ogni elemento della sottomatrice $N_1(s)$ ottenuta dalle ultime $m-1$ colonne e $n-1$ righe. Assumiamo che $n_{11}(s)$ sia monico (altrimenti si attui un'ovvia operazione elementare) e sia $\alpha_1(s) = n_{11}(s)$. Allora si applica alla sottomatrice $N_1(s)$ (ovviamente assunta essere non nulla) l'intera procedura precedente attuata per $N(s)$. L'elemento $(1, 1)$ sarà ora $\alpha_2(s)$ e, in vista della procedura adottata $\alpha_1(s)$ sarà un divisore di $\alpha_2(s)$. Infine $\alpha_i(s) \neq 0$, $i = 1, \dots, r$ dal momento che un'operazione elementare non influenza il rango della matrice.

Esempio 3.2 Consideriamo la funzione di trasferimento

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s} \\ 0 & \frac{1}{s} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Vogliamo calcolare la forma di Smith Mc-Millan. Intanto scriviamo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} N(s), \quad N(s) = \begin{bmatrix} s+1 & s & s+1 \\ 0 & s+1 & 2s(s+1) \\ 0 & -s(s+1) & s+1 \end{bmatrix}$$

Il massimo comun divisore di ordine 1 è $D_1(s) = 1$. Il polinomio $D_2(s)$ è il massimo comun divisore tra i polinomi:

$$\begin{aligned} & (s+1)^2 \\ & (s+1)(3s+1) \\ & (s+1)(2s^2 - s - 1) \end{aligned}$$

Risulta $D_2(s) = (s+1)$. Infine $D_3(s) = (s+1)^2(3s+1)$. Quindi

$$\begin{aligned} n_1(s) &= D_1(s)/D_0(s) = 1 \\ n_2(s) &= D_2(s)/D_1(s) = s+1 \\ n_3(s) &= D_3(s)/D_2(s) = (s+1)(3s+1) \end{aligned}$$

In conclusione

$$\tilde{N}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & (s+1)(3s+1) \end{bmatrix}$$

e quindi la forma di Smith-McMillan è:

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3s+1}{s} \end{bmatrix}$$

Quindi c'è un solo zero di trasmissione in $s = -1/3$.

Osservazione 3.2 In generale, due polinomi $\varepsilon_j(s)$ and $\psi_i(s)$, $i \neq j$, possono avere radici in comune. Ciò significa che un sistema multivariabile può avere poli e zeri coincidenti pur essendo in *forma minima*. ■

La forma di Smith-McMillan di $G(s)$ permette una caratterizzazione alternativa degli zeri di trasmissione in termini dei vettori appartenenti al nucleo di $G(s)$ o $G'(s)$, come provato nel risultato seguente.

Lemma 3.1 *Si consideri una funzione di trasferimento $G(s)$ di rango $r := \min[p, m]$. Il numero complesso λ è uno zero di trasmissione di $G(s)$ se e solo se esiste un vettore polinomiale $z(s)$ con $z(\lambda) \neq 0$ tale che*

$$\begin{cases} \lim_{s \rightarrow \lambda} G(s)z(s) = 0 & \text{if } p \geq m \\ \lim_{s \rightarrow \lambda} G'(s)z(s) = 0 & \text{if } p \leq m \end{cases}$$

Prova. Consideriamo dapprima il caso $p \geq m$ e sia $M(s)$ la forma di Smith–McMillan di $G(s)$, cioè tale che $G(s) = U_1(s)M(s)U_2(s)$, dove $U_1(s)$ and $U_2(s)$ sono opportune matrici polinomiali unimodulari di dimensioni p e m , rispettivamente. E' possibile scrivere

$$M(s) = \begin{bmatrix} E(s)\Psi^{-1}(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove $E(s) := \text{diag}\{\varepsilon_1(s), \dots, \varepsilon_m(s)\}$, $\Psi(s) := \text{diag}\{\psi_1(s), \dots, \psi_m(s)\}$. Inoltre, si denoti con $e_k(h)$ la k -esima colonna della matrice identità della matrice identità di dimensione h e sia λ uno zero di $G(s)$, radice del polinomio $\varepsilon_k(s)$ di $E(s)$. Dal momento che $\psi_k(\lambda) \neq 0$, succede che $z = U_2^{-1}(s)e_k(m)$ soddisfa le condizioni del teorema.

Viceversa, se esiste un vettore polinomiale $z(s)$ con $z(\lambda) \neq 0$ tale che $G(s)z(s) \rightarrow 0$ as $s \rightarrow \lambda$, allora, necessariamente,

$$E(\lambda) \lim_{s \rightarrow \lambda} \Psi^{-1}(s)U_2(\lambda)z(\lambda) = 0$$

e quindi λ è una radice di almeno uno dei polinomi $\varepsilon_i(s)$, $i = 1, \dots, r$. La dimostrazione del lemma nel caso ($p \leq m$) procede formalmente lungo la stessa direzione sostituendo $G(s)$ con $G'(s)$. ■

Una definizione diversa di poli e zeri di trasmissione fa riferimento ai *minori* di $G(s)$. Un minore di grado k di una matrice A è il determinante di qualunque sottomatrice k -dimensionale di A . E' possibile dimostrare che il polinomio $\pi_p(s)$ dei poli di $G(s)$ è dato dal *minimo comun denominatore di tutti i minori diversi di ogni ordine di $G(s)$* . Analogamente, il polinomio $\pi_{zt}(s)$ degli zeri di trasmissione di $G(s)$ è il *massimo comun divisore di tutti i numeratori dei minori di ordine r di $G(s)$ supposto che essi siano stati aggiustati in modo da presentare il polinomio $\pi_p(s)$ come loro denominatore*.

Osservazione 3.3 (*Zeri di trasmissione di un sistema quadrato*) Nel caso particolare in cui $G(s)$ è quadrata si ha

$$\det[G(s)] = \frac{\pi_{zt}(s)}{\pi_p(s)}$$

Tuttavia, si noti che la presenza di possibili cancellazioni impedisce in generale di catturare tutti gli zeri di trasmissione e poli di $G(s)$ dal determinante. ■

I poli e gli zeri di trasmissione $\Sigma(A, B, C, D)$ godono di un'importante caratterizzazione ingresso-uscita. Per quanto riguarda gli zeri di trasmissione questa proprietà prende il nome di *proprietà bloccante*. Si indichi ancora con $\delta(t) := \delta^{(0)}(t)$ la “funzione” impulso e con $\delta^{(k)}(t)$ la sua derivata di ordine k (la cui trasformata di Laplace è s^k). Inoltre, si definisca

$$\hat{\Sigma} := \begin{cases} \Sigma & \text{if } p \geq m \\ \Sigma' & \text{if } p \leq m \end{cases}, \quad \hat{G}(s) := \begin{cases} G(s) & \text{if } p \geq m \\ G'(s) & \text{if } p \leq m \end{cases} \quad (3.2)$$

Teorema 3.1 *Sia $G(s)$ la funzione di trasferimento di un sistema Σ . Allora*

i) *Il numero complesso λ è un polo di Σ se e solo se esiste un ingresso impulsivo*

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i \delta^{(i)}(t)$$

di $\hat{\Sigma}$, con α_i costante opportuna, $\nu \geq 0$, tale che l'uscita forzata $y_f(\cdot)$ di $\hat{\Sigma}$ è

$$y_f(t) = y_0 e^{\lambda t}, \quad \forall t > 0$$

ii) *Il numero complesso λ è uno zero di trasmissione Σ se e solo se esiste un ingresso esponenziale/impulsivo*

$$u(t) = u_0 e^{\lambda t} + \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i \delta^{(i)}(t)$$

di $\hat{\Sigma}$, con α_i costante opportuna, $\nu \geq 0$, $u_0 \neq 0$, tale che l'uscita forzata $y_f(\cdot)$ di $\hat{\Sigma}$ è

$$y_f(t) = 0, \quad \forall t > 0$$

Prova Consideriamo la forma di Smith-McMillan $\hat{M}(s)$ di $\hat{G}(s)$, cioè $\hat{G}(s) = U_1(s)\hat{M}(s)U_2(s)$, dove $\hat{M}(s) = [\text{diag}\{\varepsilon_i(s)/\psi_i(s)\} \quad 0]'$. Le matrici polinomiali $U_1(s)$ e $U_2(s)$ sono unimodulari. Denotiamo con $l_i(s)$ e $r'_i(s)$ la colonna i -esima e la riga i -esima di $U_1(s)$ e $U_2(s)$, rispettivamente. Ne segue che

$$Y_f(s) = \sum_{i=1}^r l_i(s) \frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)} r'_i(s) U(s)$$

dove $Y_f(s)$ e $U(s)$ sono le trasformate di Laplace di $y_f(t)$ e $u(t)$.

Punto i) Assumiamo che λ è un polo di $\hat{G}(s)$, cioè una radice del polinomio $\psi_k(s)$. Allora $\gamma(s) := (s - \lambda)^{-1} \psi_k(s)$ è un polinomio e l'ingresso $U(s)$ definito

come

$$U(s) := R(s)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma(s) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longleftarrow k\text{-th row} \quad (3.3)$$

è un vettore polinomiale dal momento che $R^{-1}(s)$ è una matrice polinomiale. Perciò $r'_i(s)U(s) = 0, i \neq k$ e $r'_k(s)U(s) = \gamma(s)$. Ne segue che $Y_f(s) = (s - \lambda)^{-1}l_k(s)\varepsilon_k(s)$. Dal momento che λ non è radice di $\varepsilon_k(s)$,

$$y_f(s) = y_0(s - \lambda)^{-1} + \beta(s)$$

dove y_0 è un vettore costante opportuno e $\beta(s)$ un vettore polinomiale opportuno. Trasformando all'indietro nel tempo questa espressione per $t > 0$ si ha la tesi.

Viceversa, assumiamo che esista un ingresso con trasformata di Laplace polinomiale $U(s)$, tale che la trasformata di Laplace dell'uscita forzata sia $Y_f(s) = y_0(s - \lambda)^{-1} + \beta(s)$, con $\beta(s)$ vettore polinomiale. Allora

$$Y_f(s) = \sum_{i=1}^r l_i(s) \frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)} r'_i(s) U(s) = y_0(s - \lambda)^{-1} + \beta(s)$$

Questo significa che almeno un polinomio $\psi_i(s)$ abbia λ come sua radice.

Punto ii) Assumiamo ora che λ sia uno zero di $\hat{G}(s)$, radice del polinomio $\varepsilon_k(s)$. Si scelga $U(s)$ come in eq. (3.3) con $\gamma(s) := (s - \lambda)^{-1}\psi_k(s)$. Poichè λ non radice di $\psi_k(s)$, tale ingresso assume la forma data nell'enunciato. In più, $r'_i(s)U(s) = 0, i \neq k$ and $r'_k(s)U(s) = (s - \lambda)^{-1}\psi_k(s)$, e quindi $Y_f(s) = (s - \lambda)^{-1}l_k(s)\varepsilon_k(s)$ è un vettore polinomiale la cui trasformata inversa di Laplace è zero per tempi strettamente positivi.

Viceversa, si assuma che esista un ingresso della forma $U(s) = u_0(s - \lambda)^{-1} + \beta(s)$, con $u_0 \neq 0$ costante e $\beta(s)$ polinomiale tale che

$$Y_f(s) = \sum_{i=1}^r l_i(s) \frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)} r'_i(s) (u_0(s - \lambda)^{-1} + \beta(s))$$

sia polinomiale. Allora $Y_f(s)$ può essere polinomiale solo se λ è radice di almeno un polinomio $\varepsilon_i(s)$.

3.2 Zeri invarianti

Nel caso di sistemi SISO (un ingresso e una uscita), la funzione di trasferimento è:

$$G(s) = \frac{C \text{adj}[sI - A] B}{\det[sI - A]} + D$$

dove $\text{adj}[sI - A]$ è la matrice dei complementi algebrici di $sI - A$. Gli zeri di trasmissione coincidono con le radici del numeratore una volta operate tutte le possibili cancellazioni tra il polinomio $C\text{adj}[sI - A]B$ e il polinomio caratteristico di A . Tutte le radici di $C\text{adj}[sI - A]B + D\det[sI - A]$ sono ancora chiamate zeri del sistema. Questi zeri costituiscono infatti i cosiddetti *zeri invarianti*. Nel caso multivariabile, la definizione di tali zeri richiede l'introduzione della matrice polinomiale

$$P(s) := \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}$$

che si chiama *matrice di sistema*. Sia $v := \text{rank}[P(s)]$ e $S(s)$ la forma di Smith di $P(s)$, cioè

$$S(s) = \begin{bmatrix} \alpha_1(s) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2(s) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_v(s) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Un numero complesso λ è detto essere uno *zero invariante* di Σ se è una radice del polinomio

$$\pi_{zi}(s) := \alpha_1(s)\alpha_2(s)\cdots\alpha_v(s)$$

Osservazione 3.4 Notiamo che $v = \text{rank}[P(s)] = n + \text{rank}[G(s)]$. Infatti, semplici conti mostrano che

$$\begin{aligned} P(s) &:= \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} sI - A & 0 \\ C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1} & 0 \\ 0 & G(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Perciò, l'affermazione sul rango di $P(s)$ è dimostrata notando che la prima e l'ultima matrice sono quadrate di rango massimo, mentre quella centrale ha rango uguale a $n + \text{rank}[G(s)]$. ■

Anche gli zeri invarianti ammettono una caratterizzazione di rango che riguarda il nucleo di $P(s)$ o $P'(\lambda)$.

Lemma 3.2 Sia $P(s)$ la matrice di sistema del sistema Σ e sia $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ la sua funzione di trasferimento con $\text{rank}[G(s)] = \min[p, m]$. Il numero complesso λ è uno zero invariante del sistema se e solo se $P(s)$ perde rango in $s = \lambda$, cioè se e solo se esiste un vettore non nullo z tale che

$$\begin{cases} P(\lambda)z = 0 & \text{if } p \geq m \\ P'(\lambda)z = 0 & \text{if } p \leq m \end{cases}$$

Prova. Consideriamo dapprima il caso $p \geq m$ e sia $S(s)$ la forma di Smith di $P(s)$, cosicchè $P(s) = U_1(s)S(s)U_2(s)$, dove $U_1(s)$ and $U_2(s)$ sono matrici polinomiali unimodulari mentre $S(s)$ è la forma di Smith. Sia $e_k(h)$ la k -esima colonna della matrice identità di ordine h . Ricordiamo anche che la matrice $R^{-1}(s)$ è polinomiale e unimodulare. Quindi se λ è uno zero invariante del sistema, radice di $\alpha_k(s)$ in $S(s)$, allora $P(\lambda)z = 0$ con $z = R^{-1}(\lambda)e_k(n+m)$. Viceversa, se esiste $z \neq 0$ tale che $P(\lambda)z = 0$, allora, necessariamente, $S(\lambda)R(\lambda)z = 0$, che a sua volta implica che λ è una radice di almeno un polinomio $\alpha_i(s)$, dal momento che $R(\lambda)z \neq 0$.

La prova nel caso $p \leq m$ si sviluppa lungo le stesse linee una volta che $P(s)$ è rimpiazzata da $P'(s)$.

Esempio 3.3 Consideriamo ancora il sistema definito nell'Esempio 3.1. Si ha

$$P(s) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & s-7 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & s-5 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & s-6 & 0 \\ -13 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per il calcolo degli zeri invarianti, si può utilizzare il risultato del Lemma 3.2, cercando i vettori $z = [z_1 \ z_2 \ \cdots \ z_5]'$ nel nucleo di $P(\lambda)$, cioè quei vettori z tali che $P(\lambda)z = 0$. Una soluzione non nulla si trova solo per $\lambda = 3$ o $\lambda = 6$, che sono quindi zeri invarianti. Ricordiamo (Esempio 3.1) che solo $\lambda = 3$ è uno zero di trasmissione. ■

Come evidente dalle loro definizioni, gli zeri invarianti non sono influenzati da un cambio di base. Infatti si verifica facilmente che

$$\bar{P}(s) = \begin{bmatrix} sI - \bar{A} & -\bar{B} \\ \bar{C} & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

dove la tripletta $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$, con $\bar{A} = TAT^{-1}$, $\bar{B} = TB$, $\bar{C} = CT^{-1}$, descrive, insieme alla matrice D , il sistema Σ nella nuova base. Quindi $\bar{P}(s)$ and $P(s)$ hanno la stessa forma di Smith.

Anche gli zeri invarianti godono della *proprietà bloccante*, che riguarda l'esistenza di un ingresso esponenziale che genera un movimento forzato dell'uscita identicamente nullo.

Teorema 3.2 *Il numero complesso λ è uno zero invariante di Σ se e solo vale se almeno una delle due affermazioni seguenti:*

i) λ è un autovalore della parte non osservabile di $\hat{\Sigma}$;

ii) esistono due vettori x_0 e $u_0 \neq 0$ tale che l'uscita forzata di $\hat{\Sigma}$ corrisponde all'ingresso $u = u_0 e^{\lambda t}$, $t \geq 0$ e stato iniziale $x(0) = x_0$, è identicamente nulla per $t \geq 0$.

Prova. E' sufficiente dimostrare il teorema nel caso $p \geq m$, dal momento che la prova nel caso opposto segue sostituendo Σ con Σ' . Quindi assumiamo $\hat{\Sigma} = \Sigma$.

Sia ora λ uno zero invariante di Σ e sia $P(s)$ la matrice di sistema. Grazie al Lemma 3.2 esiste un vettore non nullo $z = [v' \ w']'$ tale che $P(\lambda)z = 0$, cioè

$$(\lambda I - A)v = Bw \quad (3.4)$$

$$Cv + Dw = 0 \quad (3.5)$$

Ponendo $x(0) := v$ e $u_0 := w$, si verifica adesso che l'ingresso $u(t) = we^{\lambda t}$ produce, insieme allo stato iniziale $x(0) = v$, un'uscita nulla per $t \geq 0$. La trasformata di Laplace dell'ingresso è $U(s) = (s - \lambda)^{-1}w$ e quella dello stato è $X(s) = (sI - A)^{-1}[v + Bw(s - \lambda)^{-1}]$. L'equazione (3.4) implica che $(s - \lambda)^{-1}Bw = (s - \lambda)^{-1}(\lambda I - A)v$, e quindi $X(s) = (s - \lambda)^{-1}v$ e, dall'equazione (3.5), $[CX(s) + Dw(s - \lambda)^{-1}](s - \lambda) = Y(s)(s - \lambda) = 0$. Dal momento che $y(0) = 0$ (eq. (3.5)), segue la conclusione $y(t) = 0, t \geq 0$. In particolare, se $w \neq 0$, la condizione *ii*) è verificata, mentre, se $w = 0$, le equazioni (3.4), (3.5) implicano, in vista del PBH test, che valga la condizione *i*).

Viceversa si assuma, senza perdita di generalità, che il sistema è in forma canonica di Kalman nelle parti osservabile e non osservabile, cioè

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}$$

dove la coppia (A_1, C_1) è osservabile. Se vale la condizione *i*) (cioè λ è un autovalore di A_3) si scelga $z = [0 \ \xi' \ 0]'$, dove $\xi \neq 0$ è tale che $(\lambda I - A_3)\xi = 0$. Allora, ovviamente, $P(\lambda)z = 0$ e quindi λ è uno zero invariante di Σ . Se vale la condizione *ii*), sia, in accordo alla struttura di A , $x_0 := [x'_{01} \ x'_{02}]'$. Essendo $Y(s) = 0$, risulta

$$C_1(sI - A_1)^{-1} \left[x_{01} + \frac{B_1 u_0}{(s - \lambda)} \right] + \frac{D u_0}{(s - \lambda)} = 0$$

Notando che

$$(sI - A_1)^{-1} x_{01} = \frac{I - (sI - A_1)^{-1}(\lambda I - A_1)}{(s - \lambda)} x_{01}$$

$$y(0) = C_1 x_{01} + D u_0$$

risulta

$$C_1(sI - A_1)^{-1}[(\lambda I - A_1)x_{01} - B_1 u_0] = 0$$

Il primo termine di questa equazione + la trasformata di Laplace della risposta libera del sistema $\Sigma(A_1, 0, C_1, 0)$ quando lo stato iniziale è $(\lambda I - A_1)x_{01} - B_1 u_0$. Dal momento che questo sistema è osservabile risulta $(\lambda I - A_1)x_{01} - B_1 u_0 = 0$. Si scelga

$$z := \begin{bmatrix} x'_{01} & \xi' & u'_0 \end{bmatrix}$$

dove $\xi := (\lambda I - A_3)^{-1}(A_2 x_{01} + B_2 u_0)$. Ovviamente $P(\lambda)z = 0$ e quindi λ è uno zero invariante di Σ .

3.3 Relazione tra gli zeri

Per un sistema SISO gli zeri invarianti sono le radici di $C \text{adj}[(sI - A)^{-1}]B + D \det[(sI - A)]$ mentre (in generale) solo una parte di queste radici sono zeri di trasmissione. Questa relazione vale anche per sistemi multivariabili (MIMO).

Teorema 3.3 *Uno zero di trasmissione è anche uno zero invariante.*

Prova. Consideriamo prima il caso $p \geq m$ e sia λ uno zero di trasmissione di Σ . Grazie al Teorema 3.1, esiste un ingresso esponenziale/impulsivo

$$u(t) = u_0 e^{\lambda t} + \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i \delta^{(i)}(t)$$

con α_i e $u_0 \neq 0$ costanti opportune, tale che l'uscita forzata di Σ è, $\forall t > 0$,

$$y_f(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B [u_0 e^{\lambda \tau} + \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i \delta^{(i)}(\tau)] d\tau + D u_0 e^{\lambda t} = 0$$

Ponendo

$$x_0 := \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^\nu B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_\nu \end{bmatrix}$$

si ha

$$C e^{At} x_0 = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i \delta^{(i)}(\tau) d\tau$$

e quindi

$$y_f(t) = C e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u_0 e^{\lambda \tau} d\tau + D u_0 e^{\lambda t} = 0, \quad \forall t > 0$$

Quest'ultima espressione coincide con la risposta del sistema Σ quando lo stato iniziale è $x(0) = x_0$ e l'ingresso è $u(t) = u_0 e^{\lambda t}$. Tale risposta è ovviamente continua a destra, e quindi è nulla anche in $t = 0$. Il Teorema 3.2 assicura che λ è uno zero invariante di Σ .

La prova del Teorema nel caso $p \leq m$ può essere ricavato in completa analogia considerando il sistema Σ' invece di Σ . ■

Il risultato seguente chiarifica la relazione tra zeri di trasmissione e zeri invarianti.

Teorema 3.4 *Gli zeri invarianti e gli zeri di trasmissione di un sistema raggiungibile ed osservabile coincidono.*

Prova. Come visto nel Teorema 3.3, uno zero di trasmissione è anche uno zero invariant. Manca da mostrare l'affermazione opposta quando (A, B) è raggiungibile e (A, C) è osservabile. Consideriamo il caso $p \geq m$ dal momento che il caso opposto si prova facilmente per trasposizione. Sia λ sia uno zero invariante. Grazie al Lemma 3.2, esiste un vettore non zero $z = [v' \ w']'$ tale che $P(\lambda)z = 0$. Notiamo che se $w = 0$ e $v \neq 0$, allora questa condizione implica che $Av = \lambda v$ e $Cv = 0$, contrariamente all'ipotesi di osservabilità di (A, C) . Quindi $w \neq 0$. Inoltre, grazie al Teorema 3.2, la risposta del sistema quando lo stato iniziale è $x(0) = v$ e l'ingresso è $u(t) = we^{\lambda t}$ risulta essere identicamente nulla, cioè

$$C \left[e^{At}v + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B w e^{\lambda \tau} d\tau \right] + D w e^{\lambda t} = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.6)$$

Ricordando il Teorema 3.1, λ è uno zero di trasmissione se e solo se esiste un ingresso della forma

$$u(t) = u_0 e^{\lambda t} + \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i \delta^{(i)}(t)$$

che genera un'uscita forzata identicamente nulla (for $t > 0$), cioè se

$$C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B [u_0 e^{\lambda \tau} + \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i \delta^{(i)}(\tau)] d\tau + D u_0 e^{\lambda t} = 0, \quad \forall t > 0$$

Allora il teorema è dimostrato se si dimostra che esistono dei coefficienti α_i tali che

$$\begin{aligned} C e^{At} v &= \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i \delta^{(i)}(\tau) d\tau \\ &= C e^{At} \sum_{i=0}^{\nu} A^i B \alpha_i, \quad \forall t > 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ogni vettore $\alpha := [\alpha'_0 \ \alpha'_1 \ \dots \ \alpha'_\nu]'$ tale che

$$\begin{bmatrix} B & AB & \dots & AB^\nu \end{bmatrix} \alpha = v$$

soddisfa l'equazione (3.7). Notiamo che un vettore α esiste con $\nu = n - 1$ dal momento che (A, B) è raggiungibile e quindi la matrice di raggiungibilità $[B \ AB \ \dots \ AB^{n-1}]$ ha rango pieno per righe.

Osservazione 3.5 (*Zeri di disaccoppiamento e di sistema*)

Gli zeri invarianti e di trasmissione non esauriscono la totalità degli zeri di un sistema. Infatti, gli autovalori della parte non osservabile e quelli della parte non raggiungibile sono a tutti gli effetti zeri (di disaccoppiamento) del sistema e godono di una facile interpretazione in termini di proprietà bloccante. E' importante però notare che la matrice di sistema $P(\lambda)$ ivi calcolata può non

perdere rango (cioè possono non essere zeri invarianti). Ciò può accadere se $p < m$ per gli zeri di disaccoppiamento di uscita e $p > m$ per gli zeri di disaccoppiamento di ingresso. Viceversa, se il numero di ingressi non supera il numero di uscite si vede immediatamente che gli zeri di disaccoppiamento di uscita sono anche zeri invarianti e analogamente, in caso opposto, cioè quando il numero di uscite non supera quello degli ingressi, gli zeri di disaccoppiamento di ingresso sono anche zeri invarianti. Per un sistema con ugual numero di ingressi e uscite (sistema quadrato), l'insieme di zeri di disaccoppiamento è un sottoinsieme dell'insieme degli zeri invarianti. Se, in più, il sistema quadrato è in forma minima, gli insiemi degli zeri di trasmissione e invarianti coincidono.

Osservazione 3.6 (*Sistema inverso*)

Consideriamo un sistema quadrato $\Sigma(A, B, C, D)$ tale che $\det[D] \neq 0$. Allora il sistema inverso è

$$\Sigma_{inv} := \left[\begin{array}{c|c} F & G \\ \hline H & E \end{array} \right]$$

dove $F := A - BD^{-1}C$, $G := BD^{-1}$, $H := -D^{-1}C$, $E := D^{-1}$. La ragione per cui il sistema Σ_{inv} è chiamato sistema inverso si spiega facilmente osservando che, se $G(s)$ è la funzione di trasferimento di Σ , la funzione di trasferimento di Σ_{inv} è esattamente $G^{-1}(s)$. Risulta (la prova è pressochè immediata):

- i) *L'insieme degli zeri di trasmissione di Σ coincide con l'insieme dei poli del sistema Σ_{inv} e, viceversa, l'insieme dei poli di Σ coincide con l'insieme degli zeri di trasmissione di Σ_{inv} .*
- ii) *L'insieme degli autovalori di Σ coincide con l'insieme degli zeri invarianti di Σ_{inv} e, viceversa, l'insieme degli zeri invarianti di Σ coincide con l'insieme degli autovalori di Σ_{inv} .*

3.4 Zeri all'infinito

Pensando ai sistemi SISO, gli zeri di trasmissione sono quei numeri complessi che annullano la funzione di trasferimento $G(s)$. Si noti però che se il sistema è strettamente proprio si ha $G(\infty) = 0$, e quindi il punto all'infinito può essere a ragione considerato uno zero del sistema. E' facile poi rendersi conto che se il grado relativo³ di $G(s)$ è r , allora la molteplicità dello zero all'infinito è r . Si noti che è possibile scrivere

$$G(s) = s^{-r} \bar{G}(s)$$

dove $\bar{G}(s)$ è una funzione razionale bi-propria, cioè propria con inversa propria. Vogliamo ora generalizzare questa semplice intuizione al caso di sistemi MIMO.

³Il grado relativo di una funzione razionale è la differenza tra il grado del denominatore e il grado del numeratore.

Nella definizione degli zeri di trasmissione abbiamo definito la forma di Smith Mc Millan nell'anello delle matrici polinomiali. Ora utilizziamo invece la forma di McMillan nell'anello delle funzioni razionali proprie. Una matrice unimodulare in tale anello è una funzione razionale bi-propria. Una matrice razionale bipropria può essere vista come la funzione di trasferimento di un sistema quadrato che ammette sistema inverso, cioè con matrice D invertibile.

Data una *matrice razionale propria* $G(s)$ di rango r , esistono sempre due matrici razionali bi-proprie $U(s)$ e $V(s)$ tali che ⁴

$$G(s) = U(s) \begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V(s), \quad M(s) = \text{diag}\{s^{-\delta_1}, s^{-\delta_2}, \dots, s^{-\delta_r}\},$$

$$0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \delta_3 \leq \dots \leq \delta_r$$

I numeri interi δ_i , $i = 1, \dots, r$ sono gli ordini degli zeri all'infinito e costituiscono la *struttura degli zeri all'infinito* della $G(s)$. Due matrici razionali proprie $G_1(s)$ e $G_2(s)$ legate da matrici bi-proprie $U(s)$, $V(s)$ nella relazione $G_1(s) = U(s)G_2(s)V(s)$ si dicono essere *equivalenti all'infinito*. Questa equazione è a tutti gli effetti una relazione di equivalenza e gli indici δ_i sopra definiti sono *invarianti* rispetto a questa relazione di equivalenza.

E' interessante osservare che gli invarianti possono essere ricavati dai minori estratti da $G(s)$. Infatti, si considerino i minori di ordine $k = 1, 2, \dots, r$ associati a $G(s)$. Tali minori, essendo i determinanti di matrici razionali, sono funzioni razionali. Si definisca il grado relativo minimo r_k tra tutti i gradi relativi dei minori di ordine k . Allora la struttura degli zeri all'infinito è data da:

$$\delta_1 = r_1, \quad \delta_2 = r_2 - r_1, \quad \dots \quad \delta_r = r_r - r_{r-1}$$

Esempio 3.4 Si consideri la funzione di trasferimento

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s-1} & 0 & \frac{s+1}{s-1} \\ 1 & \frac{1}{s} & \frac{s+1}{s} \\ \frac{1}{s} & 0 & \frac{s^3-3s^2+s+5}{s^3(s-3)} \end{bmatrix}$$

Si noti che il minimo grado relativo dei minori di ordine uno è 0, il minimo grado relativo dei minori di ordine due è 1 e il minimo grado relativo dell'unico minore di ordine tre è 4. Quindi $r_1 = 0$, $r_2 = 1$ e $r_3 = 4$. Ne risulta $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 1$ e $\delta_3 = 3$ e quindi la forma di Smith all'infinito è

$$M(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & s^{-3} \end{bmatrix}$$

⁴La dimostrazione di questo fatto è costruttiva e fa riferimento alle operazioni elementari su matrici razionali proprie. Tali operazioni sono quelle descritte nell'Osservazione 3.1 pur di sostituire gli elementi polinomiali con gli elementi razionali propri.

Le due matrici che operano la relazione di equivalenza possono essere calcolate notando che:

$$\begin{bmatrix} \frac{s-1}{s+1} & 0 & 0 \\ \frac{1-s}{s+1} & 1 & 0 \\ \frac{1-s}{s(s+1)} & 0 & 1 \end{bmatrix} G(s) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3-s}{s+5} \\ 0 & 1 & \frac{3-s}{s+5} \\ 0 & 0 & \frac{s-3}{s+5} \end{bmatrix} = M(s)$$