Capitolo 5

Stabilizzazione statica dall'uscita

La stabilizzazione statica dall'uscita è uno dei problemi aperti più importanti della teoria dei sistemi e del controllo. Esso è importante di per sè, dal momento che i controllori statici sono più economici e di facile implementazione, e, inoltre, come vedremo, permette la soluzione del problema di controllo dinamico dall'uscita.

Consideriamo il sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{5.1}$$
$$y = Cx \tag{5.2}$$

dove $x \in I\!R^n$, $u \in I\!R^m$, $y \in I\!R^p$. Il problema consiste nel trovare, se possibile una legge di controllo

$$u = Fy \tag{5.3}$$

in maniera tale che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile, cioè tale che che la matrice $A + BFC$ sia Hurwitz. Se tale legge esiste (ovviamente non è unica), il sistema si dirà essere Staticamente Stabilizzabile dall'Uscita (SSU).

Si noti che questo problema ha valenza più generale, in quanto si può interpretare come un problema di controllo dinamico dall'uscita. Sia infatti

$$\dot{\xi} = A_c\xi + B_C y \tag{5.4}$$
$$u = C_c\xi + D_c y \tag{5.5}$$

un generico controllore. Allora, si possono ricavare le matrici (A_c, B_c, C_c, D_c) di un controllore dinamico stabilizzante risolvendo un problema di stabilizzazione statica dall'uscita per il seguente sistema esteso:

$$\dot{\theta} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \theta + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} v \tag{5.6}$$

$$z = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \theta \tag{5.7}$$

La retroazione statica è infatti la seguente:

$$v = \begin{bmatrix} C_c & D_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix} z \tag{5.8}$$

5.1 Condizioni generali

Faremo le seguenti ipotesi:

(A1) La coppia $\{A, B\}$ è raggiungibile e B ha rango massimo per colonne.

(A2) La coppia $\{A, C\}$ è osservabile e C ha rango pieno per righe.

Le ipotesi non sono lesive della generalità. Infatti, la soluzione del problema dipende solo dalla parte raggiungibile ed osservabile del sistema. Inoltre, l'ipotesi sui ranghi può essere sempre imposta eliminando ingressi o uscite ridondanti.

Teorema 5.1 *Si consideri il sistema (5.1)-(5.2) e le ipotesi (A1) and (A2). Il sistema è SSU se e solo se esiste una matrice simmetrica e semidefinita positiva* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *e una matrice* $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *tale che*

$$0 = A'P + PA - PBB'P + C'C + G'G \tag{5.9}$$
$$0 = V(A'P + PA)V, \tag{5.10}$$

dove

$$V = I - C'(CC')^{-1}C$$

Prova (*Solo se.*) Assumiamo che il sistema (5.1)-(5.2) sia staticamente stabilizzabile dall'uscita and sia F tale che $A + BFC$ è Hurwitz. Allora, in base al Lemma di Lyapunov, esiste $P \geq 0$ che risolve

$$0 = (A + BFC)'P + P(A + BFC) + C'C + C'F'FC.$$

Imponendo $G = FC + B'P$, l'equazione soprascritta si può riscrivere nel modo seguente

$$0 = A'P + PA - PBB'P + C'C + G'G.$$

Inoltre, si noti che $GV = B'PV$ e quindi, moltiplicando entrambi i membri dell'equazione per V, si ha $V(A'P + PA)V = 0$.
(*Se.*) Viceversa, assumiamo che esista $P \geq 0$ e G che soddisfano (5.9) e (5.10). Allora

$$VPBB'PV = VG'GV.$$

Ciò implica che esista una matrice ortogonale [1] T tale che $GV = TB'PV$. Definendo

$$F = (T'G - B'P)C'(CC')^{-1}$$

si ha

$$FC = (T'G - B'P)(I - V) = (T'G - B'P),$$

Quindi

$$G'G = G'TT'G = (FC + B'P)'(FC + B'P).$$

Infine, sostituendo quest'ultima espressione nella (5.9), risulta

$$0 = (A + BFC)'P + P(A + BFC) + C'C + C'F'FC.$$

Si osservi che l'osservabilità di $\{A, C\}$ è equivalente a quella di $\{(A+BFC), C'C+C'F'FC\}$. Quindi, grazie al Lemma di Lyapunov, risulta $P > 0$ e $A + BFC$ Hurwitz. ∎

Il Teorema 5.1 fornisce una parametrizzazione di tutte le leggi statiche stabilizzanti dall'uscita. Infatti, vale il seguente risultato, la cui prova si ottiene facilmente da quella del teorema precedente.

Corollario 5.1 *Si consideri il sistema (5.1)-(5.2). La famiglia di tutti i guadagni F tali che $A + BFC$ è Hurwitz è data da:*

$$F = (T'G - B'P)C'(CC')^{-1}$$

dove $P = P' \geq 0$ e G risolvono (5.9) e (5.10) T è una qualsiasi matrice ortogonale che soddisfa

$$GV = TB'PV.$$

Adesso mostriamo che, usando l'algebra lineare, possiamo sostituire la condizione (5.9) con una disequazione matriciale.

Teorema 5.2 *Consideriamo il sistema (5.1)-(5.2) con le ipotesi (A1) e (A2). Il sistema è SSU se e solo se esiste $P \geq 0$ tale che*

$$0 \geq A'P + PA - PBB'P + C'C \tag{5.11}$$

$$0 = V(A'P + PA)V. \tag{5.12}$$

Prova (*Solo se.*) Supponiamo che il sistema (5.1)-(5.2) sia staticamente stabilizzabile dall'uscita. Seguendo la parte necessaria del Teorema 5.1, esiste $P \geq 0$ e G che soddisfano (5.9) e (5.10). Inoltre, grazie all'Ipotesi (A2), si ha $P > 0$. L'equazioni (5.10) e (5.12) sono le stesse, e la condizione (5.9) implica la condizione (5.11).

[1]Una matrice reale T è ortogonale se $T'T = TT' = I$.

(*Se.*) Sia $P > 0$ soluzione di (5.11) e (5.12) e si ponga

$$\mathcal{R}(P) = -A'P - PA + PBB'B - C'C$$

Allora, se il rango di $\mathcal{R}(P)$ è minore o uguale a m, la prova segue ancora dal Teorema 5.1 prendendo $G \in I\!R^{m \times n}$ tale che $G'G = \mathcal{R}(P)$. Altrimenti sia $\tilde{B} = [B\ 0]$, dove gli elementi nulli sono tali che il numero di colonne $\tilde{m}$ di $\tilde{B}$ sia uguale al rango di $\mathcal{R}(P)$. Si noti che, la sostituzione di B con $\tilde{B}$ non modifica $\mathcal{R}(P)$. Allora, sia $\tilde{G} \in I\!R^{\tilde{m} \times n}$ tale che $\tilde{G}'\tilde{G} = -\mathcal{R}(P)$ e si ponga, in base alla prova del Teorema 5.1,

$$\tilde{F} = (T'\tilde{G} - \tilde{B}'P)C'(CC')^{-1}$$

dove T è qualsiasi matrice ortogonale tale che

$$\tilde{G}V = T\tilde{B}'PV.$$

Come si è dimostrato nel Teorema 5.1, $\tilde{F}$ è tale che $A + \tilde{B}\tilde{F}C$ è stabile. Infine, sia F costituita dalle prime m righe di $\tilde{F}$, e si noti che, grazie alla struttura di $\tilde{B}$, risulta $\tilde{B}\tilde{F} = BF$, per cui il teorema è dimostrato. ∎

Il collegamento tra la stabilizzabilità statica e dinamica può essere rafforzato, come discusso nel risultato seguente.

Teorema 5.3 *Consideriamo il sistema (5.1)-(5.2). Il sistema è SSU se e solo se esistono due matrici (di dimensione oportuna) K, L ed esiste $P = P' > 0$ tale che*

$$(A + BK)'P + P(A + BK) < 0 \quad (5.13)$$
$$(A + LC)'P + P(A + LC) < 0. \quad (5.14)$$

Prova (*Solo se*) Sia F una soluzione del problema di stabilizzazione statica dall'uscita. Allora esiste $X = X' > 0$ tale che

$$(A + BFC)'X + X(A + BFC) < 0.$$

Quindi, $K = FC$, $L = BF$ e $P = X$ sono tali che le disequazioni (5.13) e (5.14) valgano.

(*Se*) Si assuma che le disequazioni (5.13) e (5.14) valgano per qualche $P > 0$ e si noti che per ogni scalare γ, la prima disequazione (5.13) può essere riscritta come

$$A'P + PA - \gamma^{-2}PBB'P + (\gamma K + \gamma^{-1}B'P)'(\gamma K + \gamma^{-1}B'P) - \gamma^2 K'K < 0$$

in modo tale che per certi valori piccoli di γ si ha

$$A'P + PA - \gamma^{-2}PBB'P < 0$$

Quindi esiste uno scalare positivo λ tale che

$$A'P + PA - \gamma^{-2}PBB'P + \lambda C'C \leq 0$$

Infine, si prenda $\alpha \leq min\{\lambda,\ 1\}$. Quindi imponendo $\tilde{P} = \alpha^{-1}\gamma^{-2}P$, si ha

$$\begin{aligned} 0 &\geq A'\tilde{P} + \tilde{P}A - \alpha\tilde{P}BB'\tilde{P} + \lambda\alpha^{-1}C'C \\ &\geq A'\tilde{P} + \tilde{P}A - \tilde{P}BB'\tilde{P} + C'C \end{aligned}$$

La disequazione (5.11) è allora soddisfatta con $\tilde{P}$. Inoltre, dalla seconda disequazione (5.14) si ha $V(A'P + PA)V \leq 0$, e quindi

$$V(A'\tilde{P} + \tilde{P}A)V \leq 0$$

Sia $\tilde{B} = [B\ 0]$, dove gli elementi nulli sono tali che il numero di colonne $\tilde{m}$ di $\tilde{B}$ sia uguale al rango di $\mathcal{R}(\tilde{P}) = -A'\tilde{P} - \tilde{P}A + \tilde{P}BB'\tilde{P} - C'C$ e sia $\tilde{G} \in I\!R^{\tilde{m}\times n}$ tale che $\tilde{G}'\tilde{G} = -\mathcal{R}(\tilde{P})$. Si noti che

$$V\tilde{G}'\tilde{G}V \geq V\tilde{P}\tilde{B}\tilde{B}'\tilde{P}V$$

col che esiste una matrice T tale che

$$T'\tilde{G}V = \tilde{B}'\tilde{P}V, \quad TT' \leq I$$

Ricordando la dimostrazione del Teorema 5.2, sia

$$\tilde{F} = (T'\tilde{G} - \tilde{B}'\tilde{P})C'(CC')^{-1}$$

La matrice F, costruita prendendo le prime m righe di $\tilde{F}$ è stabilizzante. ∎

Le condizioni del Teorema 5.3 si possono interpretare nella maniera seguente. Esiste una legge di controllo dallo stato K e un'iniezione dall'uscita L tale che i sistemi $\dot{x} = (A + BK)x$ and $\dot{\xi} = (A + LC)\xi$ sono asintoticamente stabili e ammettono una funzione di Lyapunov comune.

Osservazione 5.1 Il risultato formalizzato nel Teorema 5.2 può essere esteso in modo tale da garantire, oltre alla stabilità, anche una prestazione di tipo H_2 o H_∞. Infatti, si consideri il sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu + \bar{B}w \tag{5.15}$$

$$z = \begin{bmatrix} Cx \\ u \end{bmatrix}, \tag{5.16}$$

dove w è un disturbo esogeno e si suppongano verificate le ipotesi (A1) and (A2). Si può dimostrare che esiste $u = Fy$ tale che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile e la norma H_2 da w a z è minore di γ se e solo se esiste $P > 0$ tale che

$$0 \geq A'P + PA - PBB'P + C'C \tag{5.17}$$
$$0 = V(A'P + PA)V \tag{5.18}$$
$$\gamma^2 \geq \text{trace } (P). \tag{5.19}$$

Ancora, si può dimostrare che esiste $u = Fy$ tale che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile e la norma H_∞ da w a z è minore di γ se e solo se esiste $P > 0$ tale che

$$0 \geq A'P + PA - PBB'P + \frac{P\bar{B}\bar{B}'P}{\gamma^2} + C'C \tag{5.20}$$

$$0 = V(A'P + PA + \frac{P\bar{B}\bar{B}'P}{\gamma^2})V. \tag{5.21}$$

Si noti che se $\gamma \to \infty$, le condizioni (5.20) e (5.21) diventano quelle in (5.11) e (5.12).

5.2 Sistemi con un ingreso oppure un'uscita

In questa sezione supponiamo che il sistema 5.1)-(5.2) abbia una sola uscita $p = 1$ e soddisfi le ipotesi (A1) e (A2). Si noti che considerazioni simili possono essere fatte per sistemi con un solo ingresso. Infatti, in questo caso basta considerare il sistema trasposto

$$\dot{\lambda} = A'\lambda + C'v \tag{5.22}$$
$$\eta = B'\lambda, \tag{5.23}$$

che ha una sola uscita. Naturalmente il sistema trasposto è staticamente stabilizzbile dall'uscita se e solo se lo è il sistema di partenza, in quanto $A' + C'F'B'$ è stabile se e solo se lo è $A + BFC$.
Per sistemi con una uscita, senza ledere la generalità, è possibile scrivere il sistema in forma canonica di ricostruzione, cioè con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, \tag{5.24}$$

e

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.25}$$

Nel seguito, studieremo in dettaglio la stabilizzazione statica dall'uscita per tali sistemi.

5.2.1 Parte 1

Studieremo l'insieme delle soluzioni dell'equazione (5.12) indotto dalla forma delle matrici A e C date in (5.24) e (5.25).

Lemma 5.1 *Siano A e C come in (5.24) e (5.25). Tutte le matrici simmetriche $P = \{P_{i,j}\}$ che soddisfano (5.12) sono tali che*

$$\begin{aligned} 0 &= P_{i,j}, && \text{se } i+j = \text{ dispari} && (5.26)\\ 0 &= P_{i,j} + P_{i+1,j-1}, && \text{se } i \neq j \text{ and } i+j = \text{ pari.} && (5.27) \end{aligned}$$

Definizione 5.1 *L'insieme di tutte le matrici simmetriche che soddisfano (5.26) sarà denotato con $\mathcal{P}$. L'insieme di tutte le matrici simmetriche che soddisfano (5.26) e (5.27) sarà denotato con Π.*

In conclusione possiamo dunque dire che un sistema (con una sola uscita, in forma canonica di ricostruzione) è stabilizzabile staticamente dall'uscita se e solamente se esiste una matrice definita positiva $P \in \Pi$ che soddisfa la disequazione quadratica (5.11).

Si noti che l'insieme Π non dipende dalle matrici del sistema ma solo dalla parametrizzazione selezionata per descriverle, cioè la forma canonica di ricostruzione. Questa parametrizzazione ci permette di approfondire ancora di più la struttura dell'insieme Π. La prova del risulttao seguente è immediata e quindi omessa.

Lemma 5.2 *Ogni matrice $P \in \Pi$ è congruente a una martrice diagonale a blocchi con i blocchi suule diagonali che possiedono la forma di Hankel, cioè esiste una trasformazione ortogonale S tale che, per ogni $P \in \Pi$, si ha*

$$P = S \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} S'$$

con Q_1 e Q_2 matrici di Hankel quadrate di dimensioni s e r, rispettivamente, dove

$$s = \begin{cases} \frac{(n+1)}{2} & \text{se } n \text{ dispari} \\ \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ pari} \end{cases} \qquad r = \begin{cases} \frac{(n-1)}{2} & \text{se } n \text{ dispari} \\ \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ pari.} \end{cases}$$

Esempio 5.1 Se n=5, l'insieme $\mathcal{P}$ è composto da matrici della forma

$$P = \begin{bmatrix} P_{1,1} & 0 & P_{1,3} & 0 & P_{1,5} \\ 0 & P_{2,2} & 0 & P_{2,4} & 0 \\ P_{1,3} & 0 & P_{3,3} & 0 & P_{3,5} \\ 0 & P_{2,4} & 0 & P_{4,4} & 0 \\ P_{1,5} & 0 & P_{3,5} & 0 & P_{5,5} \end{bmatrix}.$$

L'equazione (5.27), per $n = 5$, introduce i 4 vincoli aggiuntivi

$$\begin{array}{ll} P_{1,3} + P_{2,2} = 0, & P_{1,5} + P_{2,4} = 0 \\ P_{2,4} + P_{3,3} = 0, & P_{3,5} + P_{4,4} = 0, \end{array}$$

quindi, per $n = 5$, l'insieme Π è l'insieme delle matrici descritto da

$$P = \begin{bmatrix} P_{1,1} & 0 & P_{1,3} & 0 & P_{1,5} \\ 0 & -P_{1,3} & 0 & -P_{1,5} & 0 \\ P_{1,3} & 0 & P_{1,5} & 0 & P_{3,5} \\ 0 & -P_{1,5} & 0 & -P_{3,5} & 0 \\ P_{1,5} & 0 & P_{3,5} & 0 & P_{5,5} \end{bmatrix}.$$

Inoltre

$$Q_1 = \begin{bmatrix} P_{1,1} & P_{1,3} & P_{1,5} \\ P_{1,3} & P_{1,5} & P_{3,5} \\ P_{1,5} & P_{3,5} & P_{5,5} \end{bmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{bmatrix} -P_{1,3} & -P_{1,5} \\ -P_{1,5} & -P_{3,5} \end{bmatrix}.$$

■

C'è da notare che Q_1 and Q_2 sono definite positive se e solo se P è definita positiva. Quindi, la questione che sorge spontanea è la seguente: è possibile caratterizzare l'insieme delle matrici definite positive $P \in \Pi$ in funzione di qualche proprietà sistemistica? La risposta a questa questione è positiva, e richiede la definizione preliminare di sistema ZIP.

Definizione 5.2 *Un sistema ν dmensionale (con $\nu \geq 1$) con funzione di trasferimento*

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^{\nu-1} (s + z_i)}{\prod_{j=1}^{\nu} (s + p_j)}$$

è detta essere un sistema ZIP se è (marginalmente) stabile, $K > 0$, e i poli e zeri sono interallacciati, cioè

$$\begin{array}{lll} 0 & < & K \\ 0 & \leq & p_1 < z_1 < p_2 < z_2 < \cdots < z_{\nu-1} < p_\nu \end{array}$$

Nel risultato seguente mostriamo la caratterizzazione dell'insieme di matrici definite positive $P \in \Pi$ in termini di sistemi ZIP.

Teorema 5.4 *Sia (A, C) in forma canonica di ricostruzione. Allora:*

- *Per n pari, l'insieme di tutte le matrici definite positive $P \in \Pi$ di dimensioni $n \times n$ soddisfacenti l'equazione (5.12) è in corrispondena uno a uno con la classe di sistemi ZIP asintoticamente stabili di ordine $\nu = n/2$.*

- *Per n dispari, l'insieme di tutte le matrici definite positive $P \in \Pi$ di dimensioni $n \times n$ soddisfacenti l'equazione (5.12) è in corrispondena uno a uno con la classe di sistemi ZIP di ordine $\nu = (n+1)/2$ con un polo in $s = 0$.*

Prova. {Da $G(s)$ a $P \in \Pi$}. Consideriamo dapprima il caso n pari. Sia $\nu = n/2$ e si prenda un sistema ZIP asintoticamente stabile con funzione di trasferimento $G(s)$. Tale funzione si può scrivere come:

$$G(s) = \frac{\alpha_1}{s+p_1} + \frac{\alpha_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{\alpha_\nu}{s+p_n}$$

dove i coefficienti scalari α_i sono tutti positivi. Allora, il sistema ammette una realizzazione diagonale $(\tilde{C}, \tilde{A}, \tilde{B})$ con $\tilde{C} = \tilde{B}'$. Per tale realizzazione sia

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{\nu-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B} & \cdots & \tilde{A}^{\nu-1}\tilde{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{\nu-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{\nu-1} \end{bmatrix}',$$

e si noti che $Q_1 > 0$. Inoltre, sia

$$Q_2 = -\begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{\nu-1} \end{bmatrix} \tilde{A} \begin{bmatrix} \tilde{B} & \cdots & \tilde{A}^{\nu-1}\tilde{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{\nu-1} \end{bmatrix} \tilde{A} \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{\nu-1} \end{bmatrix}',$$

e si noti che $\tilde{A} = \tilde{A}' < 0$, grazie all'asintotica stabilità, è definita positiva, cioè $Q_2 > 0$. Infine, sia

$$P = S \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} S'$$

dove S è una trasformazione ortogonale opportuna (Lemma 5.2), e si noti che, per costruzione, $P > 0$. E' semplice verificare che P appartiene a Π.

Simili argomentazioni possono essere utilizzate per n dispari. Sia $\nu = (n+1)/2$ e si consideri un sistema ZIP con un polo nell'origine. Ancora è possibile scrivere

$$G(s) = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{\alpha_\nu}{s+p_\nu}$$

dove tutti i coefficienti α_i sono positivi. La matrice $\tilde{A}$ della realizzazione diagonale ha un autovalore nell'origine. Per costruzione, ciò significa che il suo elemento $(1,1)$ è zero. Sia

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{\nu-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B} & \cdots & \tilde{A}^{\nu-1}\tilde{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{\nu-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{\nu-1} \end{bmatrix}' > 0,$$

e sia

$$\bar{Q}_2 = -\begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{\nu-1} \end{bmatrix} \tilde{A} \begin{bmatrix} \tilde{B} & \cdots & \tilde{A}^{\nu-1}\tilde{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{\nu-1} \end{bmatrix} \tilde{A} \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{\nu-1} \end{bmatrix}' \geq 0,$$

Il rango di $\bar{Q}_2$ è $\nu - 1$. Allora, si prenda Q_2 come la matrice formata dalle ultime $\nu - 1$ righe e colonne di $\bar{Q}_2$, e si noti che $Q_2 > 0$. Allora, sia

$$P = S \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} S'$$

dove S è la trasformazione ortogonale definita nel Lemma 5.2. In conclusione P è definita positiva (per costruzione) e appartiene a Π.

$\{$Da P a $G(s)\}$. Consideriamo dapprima il caso n pari e sia $\nu = n/2$. Da $P > 0$, $P \in \Pi$, si prenda Q_1 e Q_2 tali che

$$P = S \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} S'$$

e sia $\{C, A, B\}$ ogni realizzazione tale che Q_1 è la associata matrice di Hankel, cioè

$$Q_1 = \mathcal{O}\mathcal{C}$$

dove

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & \cdots & A^{\nu-1}B \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{\nu-1} \end{bmatrix}$$

Ora, si definisca $M = (\mathcal{C}')^{-1}\mathcal{O}$, e si osservi che

$$\mathcal{C}'M\mathcal{C} = \mathcal{O}\mathcal{C} = Q_1,$$

Dal momento che $Q_1 > 0$, allora anche $M > 0$. Perciò, si consideri una matrice quadrata T tale che $T'T = M$, e la realizzazione equivalente

$$\{\tilde{C}, \tilde{A}, \tilde{B}\} = \{CT^{-1}, TAT^{-1}, T^{-1}B\}$$

Per tale realizzazione si ha

$$\tilde{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{\nu-1} \end{bmatrix} = \mathcal{O}T^{-1} = \mathcal{C}'MT^{-1} = \mathcal{C}'T' = (T\mathcal{C})' = \begin{bmatrix} \tilde{B}' \\ \vdots \\ \tilde{B}'(\tilde{A}^{\nu-1})' \end{bmatrix} = \tilde{\mathcal{C}}'$$

e

$$\tilde{\mathcal{O}}\tilde{A} = \tilde{\mathcal{C}}'\tilde{A}'.$$

e quindi $\tilde{C} = \tilde{B}'$ and $\tilde{A} = \tilde{A}'$. Sio noti ora che

$$Q_2 = -\mathcal{O}A\mathcal{C} = -\tilde{\mathcal{O}}\tilde{A}\tilde{\mathcal{C}} - = \tilde{\mathcal{O}}\tilde{A}\tilde{\mathcal{O}}'.$$

Grazie al fatto che Q_2 è definita positiva, $\tilde{A}$ è definita negativa. In conclusione, esiste una trasformazione ortogonale Σ tale che la realizzazione equivalente

$$\{\hat{C}, \hat{A}, \hat{B}\} = \{\tilde{C}\Sigma^{-1}, Q\tilde{A}\Sigma^{-1}, \Sigma\tilde{B}\}$$

abbia $\hat{A}$ diagonale (cioè $\hat{A} = \mathrm{diag}\{-p_i\}$ con $p_i > 0$) and $\hat{C} = \hat{B}'$ (*i.e.* $\hat{C} = \hat{B}' = \mathrm{row}\{c_i\}$). In conclusione la funzione di trasferimento

$$G(s) = \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} = \frac{{c_1}^2}{s+p_1} + \frac{c_2^2}{s+p_2} + \cdots + \frac{c_\nu^2}{s+p_\nu}$$

è asintiticamente stabile e ZIP.

Infine, si consideri il caso n dispari e sia $\nu = (n+1)/2$. Da $P > 0$, $P \in \Pi$, sia

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P & v \\ v' & w \end{bmatrix}$$

con v e w tali che $\bar{P} \in \Pi$ e $w = v'P^{-1}v$. Si noti che $\bar{P} \geq 0$ e $\det\bar{P} = 0$. Ora, si prenda Q_1 e Q_2 tali che

$$\bar{P} = S \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} S'$$

e si noti che $Q_1 > 0$, $Q_2 \geq 0$ e Q_2 ha solo un autovalore a zero. Sia $\{C, A, B\}$ una realizzazione in spazio di stato tale che Q_1 è la matrice di Hankel associata, cioè

$$Q_1 = \mathcal{O}\mathcal{C}$$

dove

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & \cdots & A^{\nu-1}B \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{\nu-1} \end{bmatrix}$$

Ora, si definisca $M = (\mathcal{C}')^{-1}\mathcal{O}$, e si osservi che

$$\mathcal{C}'M\mathcal{C} = \mathcal{O}\mathcal{C} = Q_1,$$

Dal momento che $Q_1 > 0$, allora anche $M > 0$. Quindi, consideriamo ogni matrice quadrata T tale che $T'T = M$, e la realizzazione equivalente

$$\{\tilde{C}, \tilde{A}, \tilde{B}\} = \{CT^{-1}, TAT^{-1}, T^{-1}B\}$$

Per tale realizzione si ha

$$\tilde{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{\nu-1} \end{bmatrix} = \mathcal{O}T^{-1} = \mathcal{C}'MT^{-1} = \mathcal{C}'T' = (T\mathcal{C})' = \begin{bmatrix} \tilde{B}' \\ \vdots \\ \tilde{B}'(\tilde{A}^{\nu-1})' \end{bmatrix} = \tilde{\mathcal{C}}'$$

e

$$\tilde{\mathcal{O}}\tilde{A} = \tilde{\mathcal{C}}'\tilde{A}'.$$

in modo tale che $\tilde{C} = \tilde{B}'$ and $\tilde{A} = \tilde{A}'$. In vista del fatto che $Q_2 \geq 0$ con un solo autovalore a zero, $\tilde{A}$ risulta semidefinita negativa, con un solo autovalore a zero e gli altri negativi. In conclusione, esiste una trasformazione ortogonale Σ tale che la realizzazione equivalente

$$\{\hat{C}, \hat{A}, \hat{B}\} = \{\tilde{C}\Sigma^{-1}, Q\tilde{A}\Sigma^{-1}, \Sigma\tilde{B}\}$$

è tale che $\hat{A}$ è diagonale (cioè $\hat{A} = \text{diag}\{-p_i\}$ with $0 = p_1 < p_i$ with $i > 1$) e $\hat{C} = \hat{B}'$ (*cioè* $\hat{C} = \hat{B}' = \text{row}\{c_i\}$). In conclusione, la funzione di trasferimento

$$G(s) = \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} = \frac{{c_1}^2}{s} + \frac{{c_2}^2}{s + p_2} + \cdots + \frac{c_\nu^2}{s + p_\nu}$$

è stabile, con un polo nell'origine), e ZIP. ∎

In conclusione, per un dato sistema ZIP è possibile costruire, attraverso manipolazioni algebriche, due matrici di Hankel Q_1 e Q_2, e quindi una matrice definita positiva $P \in \Pi$ che soddisfa l'equazione (5.10). A tal proposito si noti che la matrice S che serve alla costruzione di P ha tutti gli elementi uguali a zero o uno e dipende solo dalla dimensione n del sistema. La matrice definita positiva $P \in \Pi$ non soddisfa in generale la disuguaglianza (5.9). Il problema è progettare una strategia di aggiornamento dei sistemi ZIP in modo tale da soddisfarla. Per affrontare questo problema si osservi preliminarmente che l'insieme di tutti i sistemi ZIP asintoticamente stabili di ordine ν può essere caratterizzato da $2\nu - 1$ numeri reali ordinati e un numero positivo, mentre l'insieme di tutti i sistemi ZIP con un polo nell'origine di ordine ν può essere caratterizzato da $2\nu - 2$ numeri reali ordinati e un numero positivo.

Si consideri quindi un sistema ZIP con funzione di trasferimento

$$G(s) = K\frac{\prod_{i=1}^{\nu-1}(s + z_i)}{\prod_{j=1}^{\nu}(s + p_j)}.$$

Sia $-p_M < 0$ un limite superiore al polo più a sinistra, cioè $p_i \leq p_M$, e sia $0 < K \leq K_M$ per un dato K_M. Quindi ogni punto dell'insieme

$$\Omega \times \mathcal{K} \subset I\!R^{2\nu}$$

dove

$$\Omega = \{(p_1, z_1, \cdots, z_{\nu-1}, p_\nu) \in I\!R^{2\nu-1} \mid 0 \leq p_1 \leq z_1 \cdots \leq z_{\nu-1} \leq p_\nu \leq p_M\}$$

$$\mathcal{K} = \{K \in I\!R \mid 0 < K \leq K_M\}$$

definiscano un sistema ZIP.

L'idea alla base di un possibile algoritmo è molto semplice. Si consideri una tripletta $\{A, B, C\}$ con $C \in I\!R^{1\times n}$ e $\{A, C\}$ in forma canonica. Si fissino due numeri positivi p_M e K_M, e si trovino i numeri $p_1^\star, \cdots, p_\nu^\star$, $z_1^\star, \cdots, z_{\nu-1}^\star$ e un numero $K^\star$ tale che

$$0 \leq p_1^\star < z_1^\star p_2^\star < \cdots < z_{\nu-1} < p_\nu^\star \leq p_M \qquad 0 < K^\star \leq K_M$$

e

$$(p_1^\star, z_1^\star, \cdots, z_{\nu-1}, p_\nu^\star, K^\star) = \text{argmin } \lambda_{max}(A'P + PA - PBB'P + C'C).$$

Una volta che il minimo globale è trovato [2] ci sono due possibilità. Se il minimo è non positivo l'algoritmo termina, cioè i numeri $p_1^\star, \cdots, p_\nu^\star$, $z_1^\star, \cdots z_{\nu-1}^\star$ e $K^\star$ possono esssere usati per costruire una matrice $P > 0$ tale che valgano le condizioni (5.11) e (5.12). Da questa matrice P è possibile costruire una retroazione stabilizzante (Teorema 5.2). Se viceversa il minimo è positivo allora le costanti p_M e K_M devono essere incrementate e la minimizzazione ripetuta. I numeri p_M e K_M devono essere selezionati sulla base di una conoscenza sulle matrici A e B o può essere assegnato imponendo condizioni ulteriori sul sistema ad anello chiuso come descritto in seguito.

Esempio 5.2 *Si consideri un sistema SISO con*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tale sistema è ovviamente SSU. Una semplice implementazione Matlab dell'algoritmo sopra descritto fornisce, indipendentemente dall'inizializzazione del sistema ZIP,

$$P = \lambda I,$$

per qualche $\lambda > 1$. Da tale matrice è semplice costruire un feedback stabilizzante. Si noti che, per $\lambda \geq 1$, tutti i guadagni stabilizzanti sono generati, cioè

$$F = -\lambda \mp \sqrt{\lambda^2 - 1}$$

con $\lambda \geq 1$. Si noti che l'algoritmo di minimizzazione converge ad una coppia $(p_1, K) = (1, \rho)$ con $\rho > 1$, dove $-p_1$ e K denotano la locazione del polo e del guadagno del sistema ZIP. La Figura 5.1 mostra la funzione $\lambda_{max}(p_1, K)$. Questa funzione ha un minimo, che è uguale a zero per ogni $p_1 = 1$ e $K > 1$.

[2] Si noti che tale minimo esiste sempre.

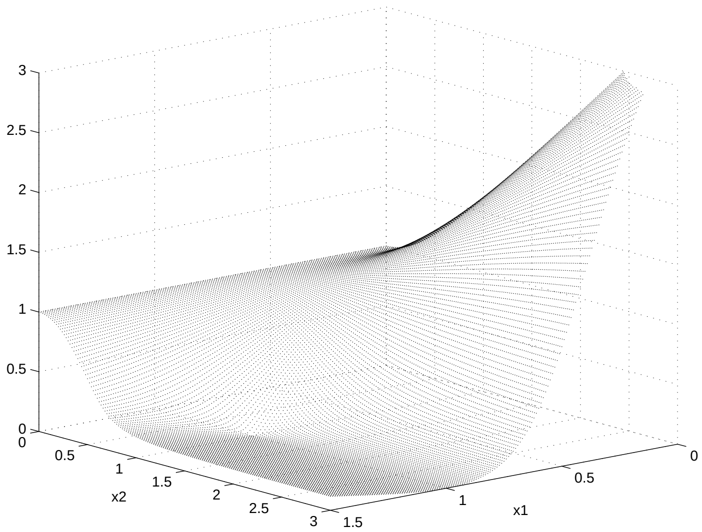

Figura 5.1: The function $\lambda_{max}(p_1, K)$

Esempio 5.3 *Consideriamo un sistema SISO con*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -t^2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

tale sistema è SSU se e solo e $|t| \geq 1$. Inoltre, per $t \to 1$ il problema diventa numericamente difficile. Applicando la procedura proposta per $t = 1.1$ si ha $(p_1^\star, K^\star) = (0.1635, 10)$, e il feedback stabilizzante è $F = -1.057$; per $t = 1.01$ si ha $(p_1^\star, K^\star) = (0.0152, 98)$, e il feedback stabilizzante è $F = -1.005$; infine per $t = 1.001$ si ha $(p_1^\star, K^\star) = (0.001, 10000)$, e il feedback stabilizzante è $F = -1.0009$. Si noti che, per $t \to 1$, si ha $(p_1^\star, K^\star) \to (0, +\infty)$ e $F \to -1$.

Un algoritmo modificato

Per implementare l'algoritmo sopra presentato è necessario impostare i valori delle costanti p_M e K_M, che possono invece essere assegnate considerando una versione più forte del problema, in cui, oltre alla stabilità, vengono imposti vincoli di prestazione sul sistema ad anello chiuso. Tra le tante possibilità, ci limitiamo a considerare la norma in H_2, e quindi un limite inferiore alla traccia di P. Si noti che un limite superiore è dato dalla matrice P_0, unica soluzione definita positiva dell'equazione di Riccati

$$A'P_0 + P_0A - P_0BB'P_0 + C'C = 0. \tag{5.28}$$

Infatti, ogni P dell'equazione (5.17) è più piccola di P_0. Sia $\gamma_0^2 = \lambda_{min}(P_0) > 0$ e $\gamma > \gamma_0$: si vuole ricavare una soluzione del problema di stabilizzazione cercando P tale che

$$\gamma_0^2 \leq \lambda_{min}(P), \qquad \text{trace } (P) \leq \gamma^2. \tag{5.29}$$

Mostriamo ora che, dati P_0 e γ, tutte le $P \in \Pi$[3] tali che (5.29) valga possono essere parametrizzate da sistemi ZIP [4] con parametri p_i, z_i e K in un insieme compatto.

Lemma 5.3 *Si consideri l'unica matrice $P_0 > 0$ soluzione dell'equazione (5.28) e uno scalare $\gamma > 0$. L'insieme di tutte le matrici P tali che*

(i) $P \in I\!R^{n \times n}$*;*

(ii) $P \in \Pi$*;*

(iii) $\gamma_0^2 \leq \lambda_{min}(P)$ *and* trace $(P) \leq \gamma^2$*;*

può essere parametrizzato con sistemi ZIP di ordine

$$\nu = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

con

(a) $0 < K \leq K_M = \gamma^2$*;*

(b) $0 \leq p_1 < z_1 < \cdots < z_{\nu-1} < p_\nu \leq p_M = \dfrac{\gamma^2}{\gamma_0^2}$.

Prova. Per iniziare, si noti che per ogni $P \in \Pi$ è possibile trovare (in modo unico) un sistema ZIP con funzione di trasferimento $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, con $A = A' = \text{diag}(-p_1, \cdots, -p_\nu)$ e $B = C'$. Quindi, sia Q_1 la matrice ν-dimensionale di Hankel associata a $G(s)$, e si noti ancora che

$$\text{trace } (P) \geq \text{trace } (Q_1) = CB + CA^2B + \cdots + CA^{2\nu-2}B \geq CB = K.$$

Quindi,

$$K \leq \text{trace } (P) \leq \gamma^2$$

prova l'affermazione (a).
Per dimostrare l'affermazione (b), per ogni $P \in \Pi$, è possibile definire le matrici di Hankel Q_1 e Q_2 e un sistema ZIP con una realizzazione simmetrica $\{C, A, B\}$, tale che, per ogni $i = 1, 2, \cdots, \nu$ e ogni $p_i \neq 0$,

$$\begin{aligned} \lambda_{max}(P) \geq \lambda_{max}(Q_1) \geq c_i^2(1 + p_i^2 + \cdots + p_i^{2\nu-2}) \geq \lambda_{min}(Q_1) \geq \lambda_{min}(P) \\ \lambda_{max}(P) \geq \lambda_{max}(Q_2) \geq c_i^2|p_i|(1 + p_i^2 + \cdots + p_i^{2(\nu-s)}) \geq \lambda_{min}(Q_2) \geq \lambda_{min}(P) \end{aligned}$$

con $s = 1$ se n è pari e $s = 2$ se n è dispari. Quindi, se n è pari,

$$\frac{\gamma_0^2}{\gamma^2} \leq |p_i| \leq \frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)} \leq \frac{\text{trace } (P)}{\lambda_{min}(P)} \leq \frac{\gamma^2}{\gamma_0^2} = p_M.$$

[3] Si veda la Definizione 5.1.
[4] Si veda la Definizione 5.2.

Viceversa, se n è dispari, per ogni $i > 1$[5]

$$\frac{1 + p_i^2(1 + \cdots + p_i^{2\nu-4})}{|p_i|(1 + \cdots + p_i^{2\nu-4})} = \frac{1}{|p_i|(1 + \cdots + p_i^{2\nu-4})} + |p_i| \leq \frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}.$$

Risulta

$$|p_i| \leq \frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)} \leq \frac{\text{trace }(P)}{\lambda_{min}(P)} \leq \frac{\gamma^2}{\gamma_0^2} = p_M,$$

e quindi il lemma è dimostrato [6]. ■

Utilizzando i risultati stabiliti nel Lemma 5.3, è possibile impostare uno schema computazionale per la soluzione del problema di stabilizzazione statica dall'uscita con la prestazione γ sopra definita.

5.2.2 Parte 2

In questa sezione studieremo le proprietà delle soluzioni delle equazioni (5.11) e (5.12) riscritte in termini di LMI accoppiate, cioè

$$\begin{aligned} 0 &\leq \begin{bmatrix} -AX - XA' + BB' & XC' \\ CX & I \end{bmatrix} && (5.30) \\ 0 &= V(A'P + PA)V && (5.31) \\ I &= XP. && (5.32) \end{aligned}$$

Si noti che l'insieme di tutte le soluzioni X dell'equazione (5.30) è convesso così come l'insieme delle soluzioni P dell'equazione (5.31). La condizione di accoppiamento (5.32) non è convessa e quindi il problema non è convesso in generale. In generale, l'equazione (5.31) non può essere riscritta facilmente nell'incognita $X = P{-}1$. Tuttavia, come si mostrerà, per sistemi MISO con A e C in forma canonica di ricostruzione è possibile caratterizzare la struttura delle soluzioni dell'equazione (5.31) in termini della proprietà della matrice X. Più precisamente, approfondiremo le proprietà degli insiemi $\mathcal{P}$ e Π per ricavare le proprietà e la struttura degli insiemi

$$\mathcal{X} = \{X = P^{-1} \mid P \in \mathcal{P}\}$$

e

$$\Xi = \{X = P^{-1} \mid P \in \Pi\}.$$

Per cominciare, si noti che l'insieme $\mathcal{P}$ è chiuso rispetto all'inversione, cioè $P > 0$ appartiene a $\mathcal{P}$ se e solo se $X = P^{-1} > 0$ appartiene a $\mathcal{P}$, cioè $\mathcal{P} = \mathcal{X}$.

[5] Si Ricordi che, se n è dispari, si ha $p_1 = 0$.

[6] La prova del Lemma 5.3 fornisce, nel vaso n pari, anche un limite inferiore per il polo più piccolo del sistema ZIP che genera la matrice $P \in \Pi$, cioè $|p_1| \geq \frac{\gamma_0^2}{\gamma^2}$. Se n è dispari, allora $p_1 = 0$.

Questo fatto è evidente dal momento che $P \in \mathcal{P}$ si può scrivere come

$$P = S \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} S'$$

con S ortogonale e quindi

$$X = S \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{bmatrix} S',$$

con $Y_1 = Q_1^{-1}$ and $Y_2 = Q_2^{-1}$. Quindi, l'insieme $\mathcal{X}$ si può descrivere nel modo seguente

$$\mathcal{X} = \{X = X' \mid X_{ij} = 0 \text{ se } i + j \text{ dispari}\}.$$

Utilizzando questa caratterizzazione è possibile dimostare la seguente condizione necessaria per la stabilizzabilità statica dall'uscita.

Teorema 5.5 *Si consideri il sistema (5.1)-(5.2) con (A, C) in forma canonica di ricostruzione). Il sistema è staticamente stabilizzabile dall'uscita se e solo se esiste $X = X' > 0$ tale che*

(i)

$$0 \leq \begin{bmatrix} -XA' - AX + BB' & XC' \\ CX & I \end{bmatrix}; \tag{5.33}$$

(ii) $X \in \mathcal{X}$;

(iii) il polinomio [7]

$$e_n' X e_n \lambda^{n-1} + e_{n-2}' X e_n \lambda^{n-3} + e_{n-4}' X e_n \lambda^{n-5} + \cdots \tag{5.34}$$

ha radici distinte tutte sull'asse immaginario.

Prova. Si noti che la condizione (i) è necessaria per la stabilizzabilità statica ed è equivalente alla condizione (5.11) con $P = X^{-1}$. La condizione (ii) è ovviamente necessaria dal momento che $X \in \mathcal{X}$ è equivalente a $P = X^{-1} \in \mathcal{P}$. Per provare la necessità della condizione (iii), si ricordi che una condizione necessaria per essere SSU è l'esistenza di una matrice definita positiva P tale che

$$V(A'P + PA)V = 0. \tag{5.35}$$

Tuttavia, grazie al fatto che (A, C) è in forma canonica, si ha:

$$V = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

[7] Il vettore e_i denota la i-esima colonna della matrice identità di dimensioni opportune.

Quindi, in accordo con tale partizione, si può scrivere

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}' & P_{22} \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

con P_{22} e A_{22} scalari. L'equazione (5.35) si riscrive come:

$$A_{11}'P_{11} + P_{11}A_{11} + A_{21}'P_{12}' + P_{12}A_{21} = 0. \tag{5.36}$$

Partizioniamo ora $X = P^{-1}$ come

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}' & X_{22} \end{bmatrix},$$

e si noti che X_{22} è uno scalare e che

$$P_{12}'P_{11}^{-1} = -X_{22}^{-1}X_{12}'.$$

Di conseguenza, l'equazione (5.36) si riscrive come:

$$P_{11}^{-1}\bar{A}' + \bar{A}P_{11}^{-1} = 0, \tag{5.37}$$

dove

$$\bar{A} = A_{11} - \frac{X_{12}A_{21}}{X_{22}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{e_1'Xe_n}{e_n'Xe_n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{e_2'Xe_n}{e_n'Xe_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{e_{n-2}'Xe_n}{e_n'Xe_n} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{e_{n-1}'Xe_n}{e_n'Xe_n} \end{bmatrix},$$

L'equazione (5.37) è un'equazione omogenea di Lyapunov con una soluzione definita positiva P_{11}^{-1}. Quindi $\bar{A}$ è ciclica e il suo polinomio caratteristico ha $n-1$ radici distinte sull'asse imamginario. Tale polinomio caratteristico è dato da

$$e_n'Xe_n\lambda^{n-1} + e_{n-1}'Xe_n\lambda^{n-2} + e_{n-2}'Xe_n\lambda^{n-3} + \cdots + e_2'Xe_n\lambda + e_1'Xe_n.$$

Tuttavia, dal momento che $X \in \mathcal{X}$, la condizione (iii) segue. ■

Il Teorema 5.5 fornisce condizioni di ostruzione di complessità crescente alla risolubilità del problema. Dapprima si vaglia la condizione (i). Se è verificata, allora si vagliano le condizioni (i) e (ii). Infine, le condizioni (i) e (iii) sono verificate insieme. Se tale procedura fallisce, allora il problema non ammette soluzione.

Esempio 5.4 *Si consideri il sistema*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.38}$$

e si osservi che

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Questo sistema soddisfa la condizione di parità (PIP) e di parità estesa (EPIP) e quindi esiste un regolatore stabile con inversa stabile che stabilizza il sistema ad anello chiuso [8]*. Tuttavia, il sistema non passa il secondo test che richiede la diagonalità di X, cioè non esiste X diagonale che soddisfi l'equazione (5.33). Quindi il sistema non è staticamente stabilizzabile dall'uscita.*

Le condizioni (i) e (ii) nel Teorema 5.5 sono convesse, mentre la condizione (iii) non lo è in generale. Tuttavia, vale il seguente corollario.

Corollario 5.2 *Si consideri il sistema (5.1)-(5.2) con la coppia (A, C) in forma canonica di ricostruzione.*

(i) Se $n \leq 2$, l'insieme delle matrici $X > 0$ che soddisfano le condizioni (i)-(iii) del Teorema 5.5 è convesso e le condizioni (i)-(iii) del Teorema 5.5 sono anche sufficienti.

(ii) Se $n \leq 4$, l'insieme delle matrici $X > 0$ che soddisfano le condizioni (i)-(iii) del Teorema 5.5 è convesso.

(iii) Se $n = 5$ o $n = 6$ le condizioni (i)-(iii) del Teorema 5.5 possono essere inquadrate in un problema di ottimizzazione convessa con vincoli lineari.

Esempio 5.5 *Si consideri il sistema*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.39}$$

Le condizioni necessarie e sufficienti si riducono a

$$\begin{array}{ll} 0 < & -16(X_3 - 3)^2 - (4X_3 + X_1 + 4)^2 + 160 \\ 0 < & X_1 \\ 0 < & X_3. \end{array} \tag{5.40}$$

dove X_1 e X_3 sono gli elementi della matrice diagonale X. Quindi, l'insieme di tutte le matrici X ammissibili, cioè l'insieme di tutti i valori ammissibili di X_1 e X_3 è illustrato nella Figura 5.2, che mostra anche la convessità dell'insieme stesso.

[8] Si può verificare che esiste un regolatore (non stabile) che stabilizza di ordine uno mentre l'ordien minimo per un regolatore stabile che stabilizza è due.

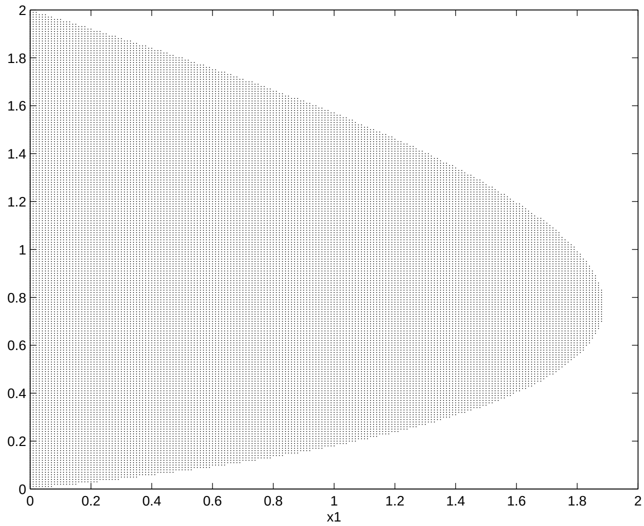

Figura 5.2: L'insieme di tutte le coppie $\{X_1, X_3\}$ ammissibili

La ricerca di matrici $X \in \mathcal{X}$ che soddisfano la disequazione (5.30) fornisce solo condizioni necessarie. Per recuperare la sufficienza, dobbiamo piuttosto studiare l'insieme Ξ. L'insieme corrispondente Π può essere descritto da equazioni lineari. Purtroppo questo non è vero in generale per l'insieme Ξ. Tuttavia, è possibile dare una descrizione esplicita della struttura di tale insieme.

Lemma 5.4 *L'insieme Ξ di tutte le matrici definite positive X tali che $P = X^{-1} \in \Pi$ può essere descritto da un insieme di equazioni quadratiche negli elementi X_{ij} di X.*

Prova. Il vincolo (5.26) è automaticamente soddisfatto quando l'attenzione viene ristretta alle sottomatrici Q_1 e Q_2. Ora, si consideri il vincolo (5.27). E' facile rendersi conto che esso esprime un numero

$$\nu = \begin{cases} \frac{(n-1)^2}{4} & \text{se } n \text{ dispari} \\ \frac{n(n-2)}{4} & \text{se } n \text{ pari} \end{cases} \tag{5.41}$$

di equazioni lineari negli elementi di Q_1 e Q_2. Inoltre, tali equazioni possono essere raggruppate in modo tale che valga la formula

$$0 = \begin{cases} \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times 1} \end{bmatrix} Q_1 \begin{bmatrix} 0_{1\times r} \\ I_r \end{bmatrix} + Q_2 & \text{se } n \text{ dispari} \\ Q_1 \begin{bmatrix} 0_{1\times r-1} \\ I_{r-1} \end{bmatrix} + Q_2 \begin{bmatrix} I_{r-1} \\ 0_{1\times r-1} \end{bmatrix} & \text{se } n \text{ pari.} \end{cases} \tag{5.42}$$

Imponendo $Y_1 = Q_1^{-1}, Y_2 = Q_2^{-1}$, consideriamo per il caso n dispari, la prima delle equazioni (5.42). Aggiungendo una riga a questa equazione si ha

$$0 = \begin{bmatrix} 0_{1\times r} \\ Y_2 \end{bmatrix} + Y_1 \begin{bmatrix} I_r \\ t' \end{bmatrix}, \tag{5.43}$$

dove

$$t' = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} Q_1 \begin{bmatrix} 0_{1\times r} \\ I_r \end{bmatrix} Y_2.$$

Inoltre, partizionando Y_1 come

$$Y_1 = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{bmatrix},$$

dove R_2 è scalare, si induce una suddivisione naturale dell'equazione (5.43) in

$$R_1 + R_2 t' = 0, \quad Y_2 + R_3 + R_4 t' = 0.$$

Nelle equazioni sopra risulta $R_2 \neq 0$, in quanto $R_2 = 0$ implicherebbe $R_1 = 0$, contraddicendo così la definita positività di Y_1. Quindi

$$t' = -\frac{1}{R_2} R_1,$$

e questo comporta i seguenti $\nu = \frac{(n-1)^2}{4}$ vincoli quadratici

$$R_2(Y_2 + R_3) - R_4 R_1 = 0. \tag{5.44}$$

Consideriamo ora il caso n pari e la seconda equazione (5.42). Aggiungendo una colonna si ha

$$\begin{bmatrix} 0_{1\times r-1} & l_1 \\ I_{r-1} & l_2 \end{bmatrix} Y_2 + Y_1 = 0, \tag{5.45}$$

dove

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = -Y_1 Q_2 \begin{bmatrix} 0_{r-1} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sia

$$Y_1 = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{bmatrix}, \qquad Y_2 = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{bmatrix}$$

dove W_1 e S_3 sono scalari. L'equazione (5.45) si riscrive come

$$\begin{aligned} 0 &= l_1 S_3 + W_1 \\ 0 &= l_1 S_4 + W_2 \\ 0 &= S_1 + l_2 S_3 + W_3 \\ 0 &= S_2 + l_2 S_4 + W_4. \end{aligned}$$

Poichè $Y_1 > 0$, $W_1 \neq 0$ si ha $S_3 \neq 0$. Quindi le quattro equazioni comportano i seguenti $\nu = \frac{n(n-2)}{4}$ vincoli quadratici sugli elementi di Y_1 e Y_2

$$S_4 W_1 - S_3 W_2 = 0, \qquad S_4(W_3 + S_1) - S_3(W_4 + S_2) = 0. \tag{5.46}$$

■

Le equazioni (5.44) e (5.46) definiscono l'insieme quadratico Ξ per n dispari ($\frac{(n+1)^2}{4}$ incognite) e n pari ($\frac{n(n+2)}{4}$ incognite). Il sistema (in forma canonica di ricostruzione) è staticamente stabilizzabile dall'uscita se e solo se esiste $X \in \Xi$ che soddisfa (5.30).

Esempio 5.6 *Per $n = 5$ si ha*

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 & X_{13} & 0 & X_{15} \\ 0 & X_{22} & 0 & X_{24} & 0 \\ X_{13} & 0 & X_{33} & 0 & X_{35} \\ 0 & X_{24} & 0 & X_{44} & 0 \\ X_{15} & 0 & X_{33} & 0 & X_{55} \end{bmatrix}$$

e i vincoli quadratici sono

$$\begin{aligned} 0 &= X_{15}X_{44} + X_{15}X_{35} - X_{55}X_{13} \\ 0 &= X_{15}X_{33} - X_{13}X_{35} + X_{15}X_{24} \\ 0 &= X_{11}X_{55} - X_{15}X_{24} - X_{15}^2 \\ 0 &= X_{15}X_{22} + X_{15}X_{13} - X_{35}X_{11}. \end{aligned}$$

Tali vincoli possono essere univocamente risolti per X_{11}, X_{22}, X_{33} e X_{44} e la soluzione può essere sostituita nella matrice X. Quindi, in questo esempio, la soluzione del problema di stabilizzazione statica dall'uscita si riduce alla soluzione di una LMI per una matrice $X > 0$ parametrizzata attraverso funzioni razionali di cinque incognite.

La conclusione generale è che la soluzione del problema di stabilizzazione statica dall'uscita si riduce alla soluzione di una LMI per una matrice $X > 0$ parametrizzata attraverso funzioni razionali di n incognite.

Problema di ottimizzazione concavo-convesso

Le condizioni quadratiche per cui $X \in \Xi$ possono essere riscritte come[9]

$$(\mathrm{vec}(X))' M_i \mathrm{vec}(X) = (\mathrm{vec}(X))' N_i \mathrm{vec}(X) \qquad i = 1, 2, \cdots, \nu \tag{5.47}$$

dove ν è stato definito nell'equazione (5.41), e M_i e N_i sono opportune matrici semidefinite positive. Abbiamo la seguente caratterizzazione del problema.

[9]Denotiamo con $\mathrm{vec}(X)$ il vettore composto da tutti gli elementi della matrice $X \in \mathcal{X}$.

Teorema 5.6 *Consideriamo il sistema (5.1)-(5.2) con (A, C) in forma canonica di ricostruzione (equazioni (5.24) e (5.25)). Il sistema è SSU se e solo se il seguente problema di ottimizzazione vincolata ha una soluzione $X^\star, \rho_1^\star, \cdots, \rho_\nu^\star$ tale che $J(X^\star, \rho_1^\star, \cdots, \rho_\nu^\star) = 0$, dove*

$$\min_{X, \rho_1, \cdots, \rho_\nu} J(X, \rho_1, \cdots, \rho_\nu)$$

e

$$J(X, \rho_1, \cdots, \rho_\nu) = \sum_{i=1}^{\nu} [2\rho_i - (\mathrm{vec}(X))' M_i \mathrm{vec}(X) - (\mathrm{vec}(X))' N_i \mathrm{vec}(X)]$$

con vincoli

$$\begin{aligned} 0 &< X \leq X_0 = P_0^{-1} \\ 0 &\leq \rho_i \\ 0 &\leq \begin{bmatrix} -AX - XA' + BB' & XC' \\ CX & I \end{bmatrix} \\ \rho_i &\geq (\mathrm{vec}(X))' M_i \mathrm{vec}(X) \\ \rho_i &\geq (\mathrm{vec}(X))' N_i \mathrm{vec}(X) \end{aligned} \tag{5.48}$$

e P_0 è definita nell'equazione (5.28).

Prova. Si noti che nell'insieme ammissibile la funzione $J(X, \rho_1, \cdots, \rho_\nu)$ è non negativa se e solo se

$$\rho_i = (\mathrm{vec}(X))' M_i \mathrm{vec}(X) = (\mathrm{vec}(X))' N_i \mathrm{vec}(X).$$

Inoltre, la scelta $X \geq$ con $X \not> 0$ e $(\rho_1, \cdots, \rho_\nu) = (0, \cdots, 0)$ non è ammissibile. Se il problema di ottimizzazione ha una soluzione $X^\star, \rho_1^\star, \cdots, \rho_\nu^\star$ tale che $J(X^\star, \rho_1^\star, \cdots, \rho_\nu^\star) = 0$, allora $X^\star > 0$,

$$0 \leq \begin{bmatrix} -AX^\star - X^\star A' + BB' & X^\star C' \\ CX^\star & I \end{bmatrix}$$

e

$$(\mathrm{vec}(X^\star))' M_i \mathrm{vec}(X^\star) = (\mathrm{vec}(X^\star))' N_i \mathrm{vec}(X^\star),$$

che implica $X^\star \in \Xi$. Quindi, il problema è risolubile.

Viceversa, se il problema è risolubile, allora esiste $0 < \bar{X} \leq X_0$ tale che

$$0 \leq \begin{bmatrix} -A\bar{X} - \bar{X}A' + BB' & \bar{X}C' \\ C\bar{X} & I \end{bmatrix}$$

e

$$(\mathrm{vec}(\bar{X}))' M_i \mathrm{vec}(\bar{X}) = (\mathrm{vec}(\bar{X}))' N_i \mathrm{vec}(\bar{X}).$$

Quindi la scelta $X = \bar{X}$ e

$$\rho_i = \text{vec}(\bar{X}))' M_i \text{vec}(\bar{X}) \geq 0$$

fornisce una soluzione ammissibile per il problema di ottimizzazione tale che

$$J(\bar{X}, \rho_1^\star, \cdots, \rho_\nu^\star) = 0,$$

La prova è dunque conclusa. ■

La funzione $J(\bar{X}, \rho_1^\star, \cdots, \rho_\nu^\star) = 0$ è (non strettamente) concava, mentre l'insieme di tutte le matrici X e numeri ρ_i tali che le condizioni (5.48 sono verificate è convesso e limitato. Quindi, il problema di ottimizzazione ammette sempre una soluzione (globale) che appartiene alla chiusura dell'insieme ammissibile. Se tale soluzione è tale che $X > 0$ e $J(X, \rho_1^\star, \cdots, \rho_\nu^\star) = 0$ allora il problema è risolubile, altrimenti non esiste soluzione. Quindi, la difficoltà nell'applicare i risultati del Teorema 5.6 sono nel fatto che non c'è garanzia di convergenza alla soluzione globale.

Esempio 5.7 *Si consideri il sistema*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 300 \\ 1 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 100 \\ 20 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si può verificare facilmente che i problema è risolubile. Impostato come problema di ottimizzazione concava-convessa, con $\nu = 1$, si ha

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & -0.25 \\ 0 & 1.0303 & 0.4268 & 0 \\ 0 & 0.4268 & 0.1768 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.0303 & -0.0732 & 0 \\ 0 & -0.0732 & 0.1768 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

Risolvendo il problema con Matlab, si ha

$$J(X^\star, \rho_1^\star) = 0,$$

con

$$X^\star = \begin{bmatrix} 0.0991 & 0 & -0.0005 \\ 0 & 0.0994 & 0 \\ -0.0005 & 0 & 0.1008 \end{bmatrix},$$

e $\rho_1^\star = .0115$. *Infine, un guadagno stabilizzante è* $F = -27.1$.