

Capitolo 4

Norme e fattorizzazioni

In questo capitolo affronteremo due problemi: il primo problema è quello della rappresentazione di una funzione di trasferimento come rapporto di opportune funzioni polinomiali o razionali. Il secondo è quello di misurare la "grandezza ingresso-uscita" di un sistema dinamico lineare. I sistemi che consideriamo sono descritti dalle solite equazioni di stato:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

e dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Nel caso SISO la funzione di trasferimento $G(s)$ si può sempre scrivere come un rapporto di polinomi primi tra loro, cioè senza radici in comune. Nel caso MIMO la funzione di trasferimento è una matrice $p \times m$ di funzioni razionali proprie, cioè di rapporti di polinomi. E' evidente che è sempre possibile scrivere

$$G(s) = \frac{\bar{G}(s)}{d(s)}$$

dove $d(s)$ è il minimo comune multiplo dei polinomi al denominatore delle $p \times m$ funzioni razionali, e $\bar{G}(s)$ è una matrice polinomiale ottenuta in maniera ovvia. Questa scrittura mette in evidenza come sia possibile scrivere $G(s)$ come rapporto di matrici polinomiali. Ovviamente però $\bar{G}(s)$ e $d(s)I$ non godono della proprietà di essere *matrici polinomiali prime tra loro*¹. Si noti

¹Due matrici polinomiali $N_d(s)$ e $D_d(s)$ si dicono coprime a destra se non ammettono divisori polinomiali comuni a destra che non siano unimodulari, cioè se non esiste $\Delta(s)$ polinomiale non unimodulare tale che $N_d(s) = N_1(s)\Delta(s)$, $D_d(s) = N_2(s)\Delta(s)$, con $N_1(s)$ e $N_2(s)$ matrici polinomiali. Si può dimostrare che le due matrici polinomiali $N_d(s)$ e $D_d(s)$ sono coprime a destra se e solo se esistono due matrici polinomiali $X(s)$ e $Y(s)$ che soddisfano l'equazione diofantina $X(s)D_d(s) + Y(s)N_d(s) = I$. La definizione di coprimità a sinistra di due matrici $N_s(s)$, $D_s(s)$ è definita in modo ovvio e l'equazione diofantina diventa $D_s(s)X(s) + N_s(s)Y(s) = I$.

ancora che l'elemento generico (i, j) di $G(s)$ può essere scritto come il rapporto $\{n_{ij}(s)/d_j(s)\}$ dove $d_j(s)$ è il minimo comune denominatore degli elementi di $G(s)$ sulla colonna j -esima. Quindi:

$$G(s) = \{n_{ij}(s)\} \text{diag}\{d_i(s)\}^{-1} = \bar{N}(s)\bar{D}(s)^{-1}$$

Attraverso operazioni elementari sulle righe della matrice polinomiale

$$\begin{bmatrix} \bar{N}(s) \\ \bar{D}(s) \end{bmatrix}$$

è possibile estrarre il più grande comun divisore destro² $\bar{R}(s)$ di $\bar{N}(s)$ e $\bar{D}(s)$. Quindi

$$\bar{D}(s) = D_d(s)\bar{R}(s), \quad \bar{N}(s) = N_d(s)\bar{R}(s)$$

con $N_d(s)$ e $D_d(s)$ matrici polinomiali coprime a destra. Concludendo, $G(s) = \bar{N}(s)\bar{D}(s)^{-1} = N_d(s)D_d(s)^{-1}$.

Il procedimento appena delineato mostra come sia possibile scrivere una matrice razionale come rapporto destro $G(s) = N_d(s)D_d(s)^{-1}$ di matrici polinomiali $N_d(s)$ e $D_d(s)$ coprime a destra, e risulta evidente come tale procedimento possa essere modificato per l'ottenimento di due matrici polinomiali coprime a sinistre $N_s(s)$ e $D_s(s)$ tali che $G(s) = D_s(s)^{-1}N_s(s)$. In conclusione:

Teorema 4.1 *Data una funzione razionale $G(s)$ è possibile scrivere*

$$G(s) = N_d(s)D_d(s)^{-1}, \quad G(s) = D_s(s)^{-1}N_s(s)$$

con $N_d(s)$ e $D_d(s)$ matrici polinomiali coprime a destra e $N_s(s)$ e $D_s(s)$ matrici polinomiali coprime a sinistra.

Un'altra possibile fattorizzazione della funzione di trasferimento fa riferimento all'anello delle funzioni razionali stabili, cioè con poli a parte reale negativa, piuttosto che a quello dei polinomi. Per inquadrare il problema, si consideri ancora il caso di sistemi SISO, dove la funzione di trasferimento è il rapporto di due polinomi $n(s)$ e $d(s)$, cioè $G(s) = n(s)/d(s)$. E' sempre possibile fattorizzare $d(s)$ come prodotto di due polinomi, $d_s(s)$, $d_a(s)$, con $d_s(s)$ contenente solo radici nel semipiano sinistro. Allora:

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{G_1(s)}{G_2(s)}, \quad G_1(s) = \frac{n(s)}{d_s(s)\hat{d}(s)}, \quad G_2(s) = \frac{d_a(s)}{\hat{d}(s)}$$

²Un divisore destro di una data matrice polinomiale $N(s)$ è definito come una matrice polinomiale $R(s)$ quadrata tale che $N(s) = \bar{N}(s)R(s)$ con $\bar{N}(s)$ matrice polinomiale opportuna. Una matrice quadrata polinomiale $R(s)$ è detta essere il più grande divisore destro di due matrici polinomiali $N(s)$ e $D(s)$ con lo stesso numero di colonne se $R(s)$ è un divisore destro sia di $N(s)$ e di $D(s)$ e se, per ogni altro divisore destro $\hat{R}(s)$, risulta $R(s) = W(s)\hat{R}(s)$ con $W(s)$ polinomiale. Analoghe definizioni si possono formalizzare per un divisore sinistro e per il massimo divisore sinistro di due matrici con lo stesso numero di righe.

dove $\hat{d}(s)$ è un qualunque polinomio stabile (con radici a parte reale negativa) dello stesso grado di $d_a(s)$. Le due funzioni di trasferimento $G_1(s)$ e $G_2(s)$ sono stabili (hanno poli nel semipiano sinistro). Si noti che la soluzione non è unica.

Il ragionamento fatto sulle funzioni razionali può essere replicato sulle matrici razionali. Si noti che l'insieme delle funzioni razionali stabili forma un anello e quindi su tale anello è possibile definire la coprimità, come fatto per l'anello delle matrici polinomiali³. Per rendersi conto di ciò basta considerare la fattorizzazione polinomiale mostrata nel Teorema 4.1 per la matrice razionale $\hat{G}(z)$ ottenuta da $G(s)$ sostituendo a s la variabile

$$z = (s + \gamma)^{-1}, \quad s = \frac{1 - \gamma z}{z}$$

con γ parametro positivo opportuno. Infatti si può scrivere $\hat{G}(z) = \hat{D}(z)^{-1}\hat{N}(z)$, con $\hat{N}(z)$ e $\hat{D}(z)$ matrici polinomiali in z coprime a sinistra. Quindi $N(s) = \hat{N}((s + \gamma)^{-1})$ e $D(s) = \hat{D}((s + \gamma)^{-1})$ risultano razionali proprie, stabili e coprime a sinistra. La stessa cosa si può fare per la coprimità a destra. Si arriva così al risultato seguente, la cui dimostrazione è alternativamente e più espressivamente condotta attraverso un procedimento nel dominio del tempo, cioè facente riferimento alla rappresentazione dei sistemi attraverso le variabili di stato.

Teorema 4.2 *Data una funzione razionale propria $G(s)$ è possibile scrivere*

$$G(s) = N_d(s)D_d(s)^{-1}, \quad G(s) = D_s(s)^{-1}N_s(s)$$

con $N_d(s)$ e $D_d(s)$ matrici razionali proprie e stabili coprime a destra e $N_s(s)$ e $D_s(s)$ matrici razionali proprie e stabili coprime a sinistra.

Prova. Sia (A, B, C, D) una realizzazione minima di $G(s)$ e sia K una matrice (che esiste) tale che $A + BK$ è di Hurwitz e L una matrice (che esiste) tale che $A + LC$ sia di Hurwitz. Risulta (la verifica è lasciata al lettore):

$$\begin{aligned} N_d(s) &= (C + DK)(sI - A - BK)^{-1}B + D \\ D_d(s) &= K(sI - A - BK)^{-1}B + I \\ N_s(s) &= C(sI - A - LC)^{-1}(B + LD) + D \\ D_s(s) &= C(sI - A - LC)^{-1}L + I \end{aligned}$$

³Una matrice razionale propria e stabile è unimodulare se la sua inversa è ancora propria e stabile. Due matrici razionali stabili $G_d(s)$ e $G_s(s)$ si dicono coprime a destra se non ammettono divisori matriciali stabili comuni a destra che non siano unimodulari, cioè se non esiste $\Delta(s)$ matrice stabile non unimodulare tale che $G_d(s) = G_1(s)\Delta(s)$, $G_s(s) = G_2(s)\Delta(s)$, con $G_1(s)$ e $G_2(s)$ matrici razionali stabili. Si può dimostrare che le due matrici razionali stabili $G_d(s)$ e $G_s(s)$ sono coprime a destra se e solo se esistono due matrici razionali stabili $X(s)$ e $Y(s)$ che soddisfano l'equazione diofantina $X(s)D_d(s) + Y(s)N_d(s) = I$. La definizione di coprimità a sinistra di due matrici razionali stabili $G_s(s)$, $G_d(s)$ è definita in modo ovvio e l'equazione diofantina diventa $D_s(s)X(s) + N_s(s)Y(s) = I$.

4.1 Sistema aggiunto

Il sistema aggiunto⁴ è definito come il sistema:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}(t) &= -A'\lambda(t) - C'w(t) \\ z(t) &= B'\lambda(t) + D'w(t)\end{aligned}$$

ed ha funzione di trasferimento

$$G^\sim(s) := G(-s)' = -B'(sI + A')^{-1}C' + D'$$

Si noti che un sistema è in forma minima se e solo è in forma minima il suo aggiunto e che gli zeri e poli del sistema aggiunto sono quelli del sistema di partenza cambiati di segno. In particolare, quindi se una $G(s)$ razionale e propria ha tutti i poli con parte reale positiva, allora $G^\sim(s) \in \mathcal{H}_\infty$.

4.2 Fattorizzazione canonica

Consideriamo una funzione di trasferimento scalare $G(s)$, biproprria e senza poli e zeri sull'asse immaginario, cioè $G(s) \in \mathcal{L}_\infty$ e $G(s)^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$. Ci chiediamo allora se sia possibile scomporre $G(s)$ nel modo seguente:

$$G(s) = G_+(s)G_-(s)$$

dove $G_+(s)$ ha tutti poli e zeri in $Re(s) > 0$ e $G_-(s)$ ha tutti poli e zeri in $Re(s) < 0$. Basta una minima riflessione per scoprire che la condizione necessaria e sufficiente perchè ciò sia possibile è che $G(s)$ abbia un numero di zeri con $Re(s) < 0$ uguale al numero di poli con $Re(s) < 0$, o, in altre parole, se e solo se il numero di poli di $G(s)$ è uguale alla somma del numero dei poli con parte reale positiva di $G(s)$ e il numero dei poli di $G(s)^{-1}$ con parte reale negativa. Per esempio si noti che

$$G(s) = \frac{s^2 - 2s - 3}{s^2 - 2s - 35} = \frac{s - 3}{s - 7} \frac{s + 1}{s + 5}$$

Vogliamo estendere questa fattorizzazione al caso multivariabile, considerando quindi matrici di trasferimento quadrate con $G(s) \in \mathcal{L}_\infty$ e $G(s)^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$. Sia intanto $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ una realizzazione minima di $G(s)$, con D matrice invertibile, e sia $\hat{A} = A - BD^{-1}C$ la matrice dinamica del sistema inverso con funzione di trasferimento $G(s)^{-1}$. Infine, data una matrice quadrata V si denoti con $\mathcal{X}_-(\mathcal{V})$ il sottospazio formato dagli autovettori (generalizzati)

⁴Se \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 sono due spazi di Hilbert e $\Sigma : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ un sistema lineare, allora il sistema aggiunto Σ^\sim è quel sistema lineare tale che, $\forall u_1 \in \mathcal{S}_1$ and $u_2 \in \mathcal{S}_2$, si abbia

$$\langle \Sigma u_1, u_2 \rangle_{\mathcal{S}_2} = \langle u_1, \Sigma^\sim u_2 \rangle_{\mathcal{S}_1},$$

di V associati agli autovalori di V con parte reale negativa e con $\mathcal{X}_+(\mathcal{V})$ il sottospazio formato dagli autovettori (generalizzati) di V associati agli autovalori di V con parte reale positiva. Abbiamo allora il seguente risultato:

Teorema 4.3 *Data una $G(s)$ razionale, bipropria, con $G(s) \in \mathcal{L}_\infty$ e $G(s)^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$, è possibile scrivere $G(s) = G_+(s)G_-(s)$ con $G_-(s) \in \mathcal{H}_\infty$, $G_-(s)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$, $G_+^\sim(s) \in \mathcal{H}_\infty$ e $G_+^\sim(s)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$ se e solo se i due sottospazi $\mathcal{X}_-(\hat{A})$ e $\mathcal{X}_+(A)$ sono complementari.*

Prova. La condizione è chiaramente necessaria. La parte sufficiente si prova per costruzione. Si prendano due matrici T_1 e T_2 tali che:

$$\mathcal{X}_+(A) = \text{Im}[T_2], \quad \mathcal{X}_-(\hat{A}) = \text{Im}T_1$$

e si ponga $T^{-1} = [T_1 \ T_2]$. Poichè $\mathcal{X}_+(A)$ è A -invariante risulta

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

con A_1 e $-A_4$ Hurwitz. Inoltre sia

$$TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad CT^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

Si noti che essendo $\mathcal{X}_-(\hat{A})$ un sottospazio \hat{A} -invariante si ha $A_3 = B_2D^{-1}C_1$ e inoltre $A_1 - B_1D^{-1}C_1$ Hurwitz e $-A_4 + B_2D^{-1}C_2$ Hurwitz. Queste considerazioni permettono immediatamente di concludere che la fattorizzazione cercata è:

$$G_+(s) = C_2(sI - A_4)^{-1}B_2 + D, \quad G_-(s) = D^{-1}C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 + I$$

4.3 La matrice Hamiltoniana

La matrice Hamiltoniana è una matrice quadrata $2n \times 2n$ del tipo

$$H = \begin{bmatrix} A & -R \\ -Q & -A' \end{bmatrix}$$

dove A , Q e R sono matrici reali quadrate e Q e R sono simmetriche. Si noti che lo spettro di H è simmetrico rispetto all'asse immaginario (oltre che all'asse reale), in quanto

$$HJ + JH' = 0$$

dove J è la matrice simplettica

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

Si denoti con \mathcal{L}_0 il sottospazio

$$\mathcal{L}_0 = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

Teorema 4.4 *Si assuma che R sia semidefinita positiva o negativa, che H non abbia autovalori sull'asse immaginario e che (A, R) sia una coppia stabilizzabile. Allora i sottospazi $\mathcal{X}_-(H)$ e \mathcal{L}_0 sono complementari, ed esiste una soluzione simmetrica P dell'equazione di Riccati*

$$A'P + PA - PRP + Q = 0$$

tale che $A - RX$ è di Hurwitz.

Prova Per ipotesi, la matrice hamiltoniana H ha n autovalori con parte reale negativa e n con parte reale positiva. Allora $\mathcal{X}_-(H)$ ha dimensione n ed è possibile trovare una matrice $2n \times n$ di rango n

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

tale che $\mathcal{X}_-(H) = \text{Im}T$. Quindi

$$HT = T\bar{A}$$

dove \bar{A} è una matrice di Hurwitz. Per la complementarità di \mathcal{L}_0 e $\mathcal{X}_-(H)$ basta e occorre che T_1 sia invertibile. A tale scopo si scriva $HT = T\bar{A}$ nel modo seguente:

$$AT_1 + RT_2 = T_1\bar{A}, \quad -QT_1 - A'T_2 = T_2\bar{A}$$

Si noti che

$$(T^*JT)\bar{A} = \bar{A}'(T^*JT)$$

e quindi, dal momento che \bar{A} e $-\bar{A}$ hanno spettri disgiunti si ha $T^*JT = 0$, cioè

$$T_1^*T_2 = T_2^*T_1$$

Si ha allora:

$$T_2^*A'T_2 + T_1^*QT_1 + T_2^*AT_1 + T_2^*RT_2 = 0$$

Se, per assurdo, si avesse $T_1x = 0$ con $x \neq 0$ allora, da questa equazione, $RT_2x = 0$ e da quella precedente $T_1\bar{A}x = 0$ e $A'T_2x = -T_2\bar{A}x$. Per induzione allora si ha:

$$T_1\hat{\nu}(\bar{A})x = 0, \quad A'T_2\hat{\nu}(\bar{A})x = -T_2\bar{A}\hat{\nu}(\bar{A})x, \quad RT_2\hat{\nu}(\bar{A})x = 0$$

per ogni matrice polinomiale $\hat{\nu}(\cdot)$ di \bar{A} . Sia allora $\nu_m(\cdot)$ il polinomio monico di grado minimo tale che $\nu_m(\bar{A})x = 0$ e sia $\nu_m(\bar{A}) = (\lambda I - \bar{A})\bar{\nu}(\bar{A})$. Naturalmente,

per la minimalità di $\nu_m(\cdot)$ risulta $y = \bar{\nu}(\bar{A})x \neq 0$. Inoltre, essendo $\bar{A}y = \lambda y$ e \bar{A} di Hurwitz, si ha che λ ha parte reale minore di zero. In conclusione si ha:

$$A'T_2y = -\lambda T_2y, \quad RT_2y = 0, \quad \operatorname{Re}(-\lambda) > 0$$

che implica, grazie alla stabilizzabilità di (A, R) che $T_2x = 0$. D'altra parte, quest'ultima conclusione, insieme a $T_1y = 0$ viola la n -dimensionalità del sottospazio $\operatorname{Im}[T]$.

Ponendo $P = T_2^{-1}T_1$ si ha poi che P soddisfa l'equazione di Riccati. Tale soluzione P risulta hermitiana. Infatti

$$P^* = (T_2T_1^{-1})^* = (T_1^{-1})^*T_2^* = (T_1^{-1})^*T_1^*T_2T_1^{-1} = T_2T_1^{-1} = P$$

Infine P è reale in quanto i vettori di T sono complessi coniugati e quindi indicando con T_c la matrice coniugata di T si ha che $T_c = T\Gamma$ dove Γ è una matrice di permutazione. Allora $P = T_2T_1^{-1} = T_2\Gamma(T_1\Gamma)^{-1} = P_c$ dove P_c è il coniugato di P . Quindi P è reale. Infine $A - RP = (AT_1 - RT_2)T_1^{-1} = T_1\bar{A}T_1^{-1}$ e quindi $A - RP$ è simile a \bar{A} ed è quindi Hurwitz.

4.4 Fattorizzazione spettrale

Lo spettro di potenza di un segnale è sovente definito come il modulo al quadrato della sua trasformata di Fourier. Pensando all'uscita di un sistema SISO alimentato da un impulso, lo spettro dell'uscita è dunque $\|G(j\omega)\|^2$. Per estensione definiamo lo spettro di un sistema con matrice di trasferimento $G(s)$ la funzione $\Gamma(s) = G^\sim(s)G(s)$ ⁵. Tale funzione gode della proprietà $\Gamma(s) = \Gamma^\sim(s)$ e $\Gamma(\infty) \geq 0$. Il problema della fattorizzazione spettrale consiste nel determinare una funzione $G(s)$ con certe proprietà a partire dallo spettro dato $\Gamma(s)$. In particolare, si tratta di ricavare una funzione quadrata

$$G_o(s) \in \mathcal{H}_\infty, \quad G_o(s)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$$

tale che

$$G_o^\sim(s)G_o(s) = \Gamma(s)$$

Una tale funzione $G_o(s)$ sarà chiamata *fattore spettrale canonico*.

Teorema 4.5 *Ogni funzione $\Gamma(s)$ tale che*

$$\Gamma(s) \in \mathcal{L}_\infty, \quad \Gamma(s)^{-1} \in \mathcal{L}_\infty, \quad \Gamma(s) = \Gamma^\sim(s), \quad \Gamma(\infty) > 0$$

ammette un fattore spettrale canonico.

⁵In verità pensando a processi stazionari lo spettro sarebbe meglio definito come $G(s)G^\sim(s)$

Prova. La prova è costruttiva. Poichè $\Gamma(s)$ è in \mathcal{L}_∞ , non ha poli sull'asse immaginario. Possiamo allora scrivere

$$\Gamma(s) = \Gamma_1(s) + \Gamma_2(s) + D$$

dove $\Gamma_1(s)$ e $\Gamma_2(s)$ sono in \mathcal{H}_∞ e sono strettamente proprie. Da $\Gamma(s) = \Gamma^\sim(s)$ risulta

$$\Gamma_1(s) - \Gamma_2(s) = \Gamma_1^\sim(s) - \Gamma_2(s) = (\Gamma_1(s) - \Gamma_2(s))^\sim$$

Poichè $\Gamma_1(s) - \Gamma_2(s) \in \mathcal{H}_\infty$ si ha (Teorema di Liouville)

$$\Gamma_1(s) = \Gamma_2(s)$$

Quindi

$$\Gamma(s) = \Gamma_1(s) + \Gamma_1^\sim(s) + D$$

Allora se $\Gamma_1(s) = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1$, la matrice dinamica di $\Gamma(s)^{-1}$ è:

$$H = \begin{bmatrix} A_1 - B_1 D^{-1} C_1 & -B_1 D^{-1} B_1' \\ C_1' D^{-1} C_1 & -A_1' - C_1' D^{-1} B_1' \end{bmatrix}$$

Si noti che H non ha autovalori sull'asse immaginario, che $B_1 D^{-1} B_1'$ è positiva semidefinita e che la coppia $(A_1 - B_1 D^{-1} C_1, B_1 D^{-1} B_1')$ è stabilizzabile in quanto A_1 è Hurwitz. Allora, grazie al Teorema 4.4, esiste una soluzione dell'equazione di Riccati

$$(A_1 - B_1 D^{-1} C_1)' P + P(A_1 - B_1 D^{-1} C_1) - P B_1 D^{-1} B_1' P - C_1' D^{-1} C_1 = 0$$

tale che

$$\hat{A} = A_1 - B_1 D^{-1} (C_1 + B_1' P)$$

è Hurwitz. Si noti che l'equazione di Riccati si può anche riscrivere nel modo seguente:

$$A_1' P + P A_1 = (C_1' + P B_1) D (C_1 + B_1' P)$$

Lo spettro $\Gamma(s)$ si può scrivere come:

$$\Gamma(s) = \bar{D} + \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1} \bar{B}$$

con

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -A_1' \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ -C_1' \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} C_1 & B_1' \end{bmatrix}$$

Definiamo la matrice di cambio di base:

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -P & 0 \end{bmatrix}$$

dove P soddisfa l'equazione di Riccati. Allora $\Gamma(s) = \tilde{D} + \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$, con:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= T\bar{A}T^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ -(C'_1 + PB_1)D^{-1}(C'_1 + PB_1)' & -A'_1 \end{bmatrix} \\ \tilde{B} &= T\bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ -(C'_1 + PB) \end{bmatrix} \\ \tilde{C} &= \bar{C}T^{-1} = \begin{bmatrix} (C_1 + B'_1P) & B'_1 \end{bmatrix} \\ \tilde{D} &= \bar{D}\end{aligned}$$

Il sistema $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$ è un sistema costituito dalla serie di $G_o(s)$ e $G_o^\sim(s)$, cioè $\Gamma(s) = G_o^\sim(s)G_o(s)$ con

$$G_o(s) = D^{-1/2}(C_1 + B'_1P)(sI - A_1)^{-1}B_1 + D^{1/2}$$

Il fattore spettrale canonico è proprio $G_o(s)$. Si noti che $G_o(s) \in \mathcal{H}_\infty$ in quanto A_1 è Hurwitz e inoltre $G_o(s)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$, poichè

$$G_o(s)^{-1} = -D^{-1}(C_1 + B'_1P)(sI - \hat{A})^{-1}B_1 + D^{-1/2}$$

e \hat{A} è di Hurwitz. ■

Si noti che la ricerca di un fattore spettrale canonico risulta facilitata se si ha a disposizione un fattore spettrale $G(s)$ già stabile, cioè tale che $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ e $G^\sim(s)G(s) = \Gamma(s)$. Infatti, se

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

la matrice della dinamica di $\Gamma(s)^{-1}$ risulta

$$H = \begin{bmatrix} A - B(D'D)^{-1}D'C & -B(D'D)^{-1}B' \\ -C'(I - D(D'D)^{-1}D'C) & -A' - C'D(DD')^{-1}B' \end{bmatrix}$$

e il fattore spettrale canonico diventa

$$G_o(s) = (DD')^{-1/2}(C + B'P)(sI - A)^{-1}B + (DD')^{1/2}$$

dove P risulta essere semidefinita positiva e risolve l'equazione ⁶

$$(A - B(DD')^{-1}D'C)'P + P(A - B(DD')^{-1}D'C) - PB(DD')^{-1}B'P + C'(DD')^{-1}C = 0$$

ed è tale che

$$\hat{A} = A - B(DD')^{-1}(D'C + B'P)$$

è Hurwitz.

⁶Questa equazione è l'equazione standard di Riccati del Controllo Ottimo in \mathcal{H}_2 , come vedremo in seguito.

4.5 Norma \mathcal{H}_2

Una funzione di trasferimento $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ appartiene a \mathcal{L}_2 se e solo se è strettamente propria ($D = 0$) e non ha poli sull'asse immaginario. In questo caso la norma \mathcal{L}_2 del sistema è semplicemente definita come:

$$\|G(s)\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [G(-j\omega)'G(j\omega)] d\omega \right]^{1/2}$$

Inoltre, se $G(s)$ è analitica nel semipiano destro chiuso (non ha ivi poli), allora $G(s) \in \mathcal{H}_2$ e la norma in \mathcal{H}_2 coincide con quella in \mathcal{L}_2 .

Possiamo chiederci quale sia la interpretazione della norma in termini di risposta del sistema strettamente proprio

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

Il teorema seguente fornisce una caratterizzazione nel tempo della norma \mathcal{H}_2 , in termini di risposta impulsiva e di risposta ad un rumore bianco.

Teorema 4.6 *Si consideri un sistema asintoticamente stabile e strettamente proprio con realizzazione (A, B, C) .*

(i) *Si assuma lo stato iniziale sia nullo al tempo zero e si definisca $y^i(t)$ la risposta del sistema all'impulso al canale i -esimo, cioè $u(t) = e_i\delta(t)$, dove e_i è il vettore della colonna i -esima della matrice identità. Risulta*

$$J_1 = \sum_{i=1}^m \int_0^{\infty} \|y^i(t)\|^2 dt = \|G(s)\|_2^2$$

(ii) *Si assuma lo stato iniziale nullo al tempo zero e sia l'ingresso $u(t)$ un rumore bianco con intensità unitaria e si indichi con E il valore atteso. Risulta:*

$$J_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} E [\|y(t)\|^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[\int_0^T \|y(t)\|^2 dt \right] = \|G(s)\|_2^2$$

(iii) *La norma \mathcal{H}_2 del sistema è data da*

$$\|G(s)\|_2^2 = \text{tr} [B'PB] = \text{tr} [CSC']$$

dove P e S sono le soluzioni definite positive delle equazioni di Lyapunov

$$A'P + PA + C'C = 0, \quad AS + SA' + BB' = 0$$

Prova. La dimostrazione è facile e si basa sull'applicazione del Teorema di Parseval e delle formule

$$P = \int_0^\infty e^{A't} C' C e^{At} dt, \quad S = \int_0^\infty e^{At} B B' e^{A't} dt$$

■

È importante osservare che il teorema precedente fornisce anche un procedimento di calcolo della norma \mathcal{H}_2 in termini di soluzione di un'equazione di Lyapunov. Infatti, sotto l'ipotesi di stabilità di A , l'equazione di Lyapunov ammette una e una sola soluzione, che risulta essere semidefinita positiva. Nel caso si voglia adoperare questo procedimento per calcolare la norma \mathcal{L}_2 di una certa funzione $G(s)$, si osservi che essa coincide con la norma della *parte stabile* $G_s(s)$ di $G(s)$. Infatti, $G(s) \in \mathcal{L}_2$ si può sempre scomporre ⁷ nel modo seguente:

$$G(s) = G_a(s) + G_s(s)$$

dove $G_s(s)$ è analitica nel semipiano destro chiuso e $G_a(s)$ è analitica nel semipiano sinistro chiuso. Essendo queste due funzioni ortogonali (nel prodotto scalare definito nel Capitolo 2), risulta $\langle G_a(s), G_s(s) \rangle = 0$, da cui il risultato (Teorema di Pitagora):

$$\|G(s)\|_2^2 = \|G_a(s)\|_2^2 + \|G_s(s)\|_2^2$$

D'altra parte è facile riconoscere, in base alla definizione, che il sistema aggiunto associato a $G_a(s)$ è stabile, cioè $G_a(-s)' \in \mathcal{H}_2$ ed ha la stessa norma \mathcal{H}_2 di $G_a(s)$. In conclusione

$$\|G(s)\|_2^2 = \|G_a(-s)'\|_2^2 + \|G_s(s)\|_2^2$$

Esempio 4.1 *Si voglia calcolare la norma in \mathcal{L}_2 della funzione di trasferimento*

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-5}{s^2+s-6} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

⁷Se (A, B, C, D) è una realizzazione di $G(s) \in \mathcal{L}_2$, risulta $D = 0$ e inoltre la matrice A non ha autovalori con parte reale nulla. Allora A ha n_s autovalori con parte reale negativa e n_a autovalori con parte reale nulla, con $n_s + n_a = n$. Si prenda allora una base T_s , n_s dimensionale, formata dagli autovettori, generalizzati o no, associati agli autovalori di A con parte reale negativa e una base T_a , n_a dimensionale, formata dagli autovettori, generalizzati o no, associati agli autovalori con parte reale positiva. Naturalmente la matrice $T^{-1} = [T_s \ T_a]$ è n -dimensionale, invertibile, e risulta

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_a \end{bmatrix}, \quad TB = \begin{bmatrix} B_s \\ B_a \end{bmatrix}, \quad CT^{-1} = [C_s \ C_a]$$

e quindi

$$G(s) = C_s(sI - A_s)^{-1}B_s + C_a(sI - A_a)^{-1}B_a$$

Si noti che $G(s) \in \mathcal{L}_2$ e quindi tale norma esiste. Inoltre

$$G(s) = G_a(s) + G_s(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0.6}{s-2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1.6}{s+3} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Si noti ancora che

$$\begin{aligned} G_a(s)G_a(-s)' &= \frac{-0.6}{s-2} \times \frac{0.6}{s+2} \\ G_s(s)G_s(-s)' &= \frac{1.8868(3.2472-s)}{(1-s)(3-s)} \times \frac{1.88686(s+3.2472)}{(s+1)(s+3)} \end{aligned}$$

e quindi

$$\|G(s)\|_2^2 = \|G_1(s)\|_2^2 + \|G_2(s)\|_2^2$$

dove

$$G_1(s) = \frac{0.6}{s+2}, \quad G_2(s) = \frac{1.88686(s+3.2472)}{(s+1)(s+3)}$$

Per quanto riguarda $G_1(s)$ l'equazione di Lyapunov è $\|G_1(s)\|_2^2 = p$ con $-4p + 0.36 = 0$. Quindi $\|G_1(s)\|_2^2 = 0.09$, mentre per $G_2(s)$ risulta

$$G_2(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

con

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 6.1270 & 1.8869 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'unica soluzione di $A'P + PA + C'C = 0$ è

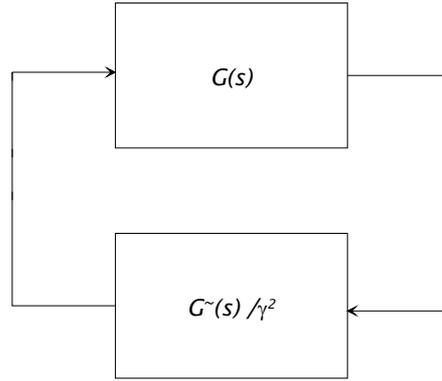
$$P = \begin{bmatrix} 19.4937 & 6.2567 \\ 6.2567 & 2.0092 \end{bmatrix}$$

e $\|G_2(s)\|_2^2 = B'PB = 2.0092$. Quindi $\|G(s)\|_2 = 1.4489$.

4.6 Norma \mathcal{H}_∞

Come sappiamo, la norma in \mathcal{L}_∞ di una funzione di trasferimento $G(s)$ è ben definita se (e solo se) $G(s)$ non ha poli sull'asse immaginario, e corrisponde alla massima norma della matrice $G(j\omega)$ al variare di ω . Nel caso di sistemi SISO è facile visualizzare il modulo di $G(j\omega)$ al variare di ω (diagramma di Bode del modulo) e evidenziare il valore massimo. Il picco del modulo è proprio la norma in \mathcal{L}_∞ . Nel caso MIMO bisogna invece visualizzare il massimo valore singolare (norma) di $G(j\omega)$ in funzione di ω e valutarne il massimo, cioè, per un sistema con funzione di trasferimento $G(s) \in \mathcal{L}_\infty$,

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \|G(j\omega)\|$$

Figura 4.1: Il sistema hamiltoniano per l'analisi \mathcal{H}_∞

che nel caso in cui $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ si può anche scrivere come

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\text{Re}(s) > 0} \|G(s)\|$$

A differenza della norma in \mathcal{L}_2 , non esiste un metodo diretto di calcolo della norma in \mathcal{L}_∞ . Esistono alcuni test efficaci per stabilire se questa norma è minore di un certo numero positivo γ , cioè $\|G(s)\|_\infty < \gamma$. D'altra parte questa relazione è equivalente a

$$\Gamma_\gamma(j\omega) = \gamma^2 I - G(-j\omega)'G(j\omega) > 0, \quad \forall \omega \quad (4.1)$$

e la norma infinita di $G(s)$ è esattamente il valore inferiore di γ per cui questa relazione vale.

Si noti che gli zeri del sistema con funzione di trasferimento $\Gamma_\gamma(s)$, definita nell'equazione (4.1) sono gli autovalori della matrice dinamica H del sistema retroazionato in figura 4.1. Tale matrice risulta essere

$$H = \begin{bmatrix} A + B(\gamma^2 I - D'D)^{-1}D'C & B(\gamma^2 I - D'D)^{-1}B' \\ -C'(I - \gamma^{-2}DD')^{-1}C & -A' - C'D(\gamma^2 I - D'D)^{-1}B' \end{bmatrix}$$

Naturalmente perchè il sistema retroazionato sia ben posto occorre che DD' non abbia autovalori in γ^2 . Si noti che la matrice H è hamiltoniana. Tale matrice ci permette di discernere se la norma infinita del sistema è minore di γ oppure no. Vale infatti il risultato seguente.

Teorema 4.7 $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ se e solo se $\|D\| < \gamma$ e H non ha autovalori sull'asse immaginario.

Prova. Se la norma è inferiore a γ allora ovviamente $\|D\| = \|G(\infty)\| < \gamma$. Supponiamo ora per assurdo che $Hx = j\omega x$, con $x \neq 0$ per un certo ω . Allora, siano x_1 e x_2 le componenti di x e si definisca $z = (\gamma^2 I - D'D)^{-1}(D'Cx_1 +$

$B'x_2$). Il vettore z risulta non nullo. Infatti, se così non fosse risulterebbe $Ax_1 = j\omega x_1$ e quindi $x_1 = 0$, $B'x_2 = 0$ e $A'x_2 = -j\omega x_2$, col che l'assurdo. Il vettore $z \neq 0$ è tale che (la verifica è lasciata al lettore):

$$G(-j\omega)'G(j\omega)z = \gamma^2 z$$

e quindi la norma infinita non è minore di γ .

Viceversa, si assuma che $\|D\| = \|G(\infty)\| < \gamma$ e che H non abbia autovalori in $j\omega$. Se per assurdo fosse

$$G(-j\omega)'G(j\omega)z = \gamma^2 z$$

per un certo $z \neq 0$ si avrebbe $Hx = j\omega x$ con

$$x_1 = (j\omega I - A)^{-1}Bz, \quad x_2 = (-j\omega I - A')^{-1}C'G(j\omega)z$$

■

L'interpretazione sistemistica della norma infinita più espressiva è quella seguente, dove si dimostra che tale norma non è altro che il valore pessimo del guadagno ingresso/uscita in \mathcal{L}_2 .

Teorema 4.8 *Sia $G(s) \in L_\infty$. Allora*

$$\|F(s)\|_\infty = \sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in \mathcal{L}_2}} \frac{\|G(s)u\|_2}{\|u\|_2}$$

Prova Si osservi che si può sempre assumere $F(s) \in \mathcal{H}_\infty$. Quindi $F(s)u \in \mathcal{L}_2$ se $u \in RL_2$. Ora si noti che

$$\sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in RL_2}} \frac{\|F(s)u\|_2^2}{\|u\|_2^2} \geq \sup_{\substack{Re(\lambda) > 0 \\ \mu \neq 0}} \frac{\|F(s)\frac{\mu}{s-\lambda}\|_2^2}{\|\frac{\mu}{s-\lambda}\|_2^2} \quad (4.2)$$

dove μ è un vettore costante di dimensioni opportune. La risposta del sistema con funzione di trasferimento $F(s)$ alimentato dall'ingresso $u = \mu e^{\lambda t}$ è data da (se λ non coincide con un polo di $F(s)$) $y = F(\lambda)\mu e^{\lambda t}$, ammesso che un opportuno stato iniziale sia stato scelto. Allora,

$$F(s)\frac{\mu}{s-\lambda} = F(\lambda)\frac{\mu}{s-\lambda} - f(s)$$

dove $f \in \mathcal{H}_2$ è la trasformata di Laplace della risposta libera, mentre la parte sinistra dell'equazione corrisponde alla risposta forzata. Dal momento che $F(\lambda)\frac{\mu}{s-\lambda} \in RH_2^\perp$, segue che

$$\|F(s)\frac{\mu}{s-\lambda}\|_2^2 = \|F(\lambda)\frac{\mu}{s-\lambda}\|_2^2 + \|f(s)\|_2^2 \geq \|F(\lambda)\frac{\mu}{s-\lambda}\|_2^2 \quad (4.3)$$

Dalle equazioni (4.2), (4.3) si ha

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in RL_2}} \frac{\|F(s)u\|_2^2}{\|u\|_2^2} &\geq \sup_{\substack{Re(\lambda) > 0 \\ \mu \neq 0}} \frac{\|F(s) \frac{\mu}{s-\lambda}\|_2^2}{\|\frac{\mu}{s-\lambda}\|_2^2} \\
&\geq \sup_{\substack{Re(\lambda) > 0 \\ \mu \neq 0}} \frac{\|F(\lambda)\mu\|^2}{\|\mu\|^2} \\
&\geq \sup_{Re(\lambda) > 0} \|F(\lambda)\|^2 \\
&\geq \|F(s)\|_\infty
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Per ricavare queste espressioni, abbiamo utilizzato i due fatti seguenti:

- 1) Se K è una costante, allora $\|\frac{K}{s-\lambda}\|_2^2 = K \sim K \|\frac{1}{s-\lambda}\|_2^2 = \|K\|^2 \|\frac{1}{s-\lambda}\|_2^2$
- 2) $\sup_{\mu \neq 0} \frac{\|F(\lambda)\mu\|^2}{\|\mu\|^2} = \|F(\lambda)\|^2$

D'altra parte, se e_i denota la i -esima colonna della matrice identità, e definendo

$$u := \begin{bmatrix} ue_1 & \cdots & ue_\nu \end{bmatrix}$$

si ha

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in RL_2}} \frac{\|F(s)u\|_2^2}{\|u\|_2^2} &= \sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in RL_2}} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \text{trace} [u^\sim(j\omega) F^\sim(j\omega) F(j\omega) u(j\omega)] d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \text{trace} [u^\sim(j\omega) u(j\omega)] d\omega} \\
&= \sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in RL_2}} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{\nu} e_i' u^\sim(j\omega) F^\sim(j\omega) F(j\omega) u(j\omega) e_i d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{\nu} e_i' u^\sim(j\omega) u(j\omega) e_i d\omega} \\
&= \sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in RL_2}} \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \|F(j\omega) u(j\omega) e_i\|^2 d\omega}{\sum_{i=1}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \|u(j\omega) e_i\|^2 d\omega} \\
&\leq \sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in RL_2}} \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \|F(j\omega)\|^2 \|u(j\omega) e_i\|^2 d\omega}{\sum_{i=1}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \|u(j\omega) e_i\|^2 d\omega} \\
&\leq \sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in RL_2}} \frac{\|F(s)\|_\infty^2 \sum_{i=1}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \|u(j\omega) e_i\|^2 d\omega}{\sum_{i=1}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \|u(j\omega) e_i\|^2 d\omega} \\
&\leq \|F(s)\|_\infty^2
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Dalle equazioni (4.4), (4.5), segue la tesi. \blacksquare

Il risultato seguente sul valore superiore della norma infinita è conosciuto in letteratura come lemma della limitatezza reale (*bounded real lemma*).

Teorema 4.9 Sia $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ e supponiamo che A sia di Hurwitz. Allora $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ se e solo se $\|D\| < \gamma$ ed esiste una soluzione semidefinita positiva P dell'equazione di Riccati

$$A'P + PA + (PB + C'D)(\gamma^2 I - D'D)^{-1}(D'C + B'P) + C'C = 0$$

tale che

$$\hat{A} = A + B(\gamma^2 I - D'D)^{-1}(D'C + B'P)$$

è di Hurwitz.

Prova. La prova è pressochè immediata a partire dai Teoremi 4.4 e 4.7. Infatti se $\|D\| < \gamma$ ed esiste una soluzione P reale e simmetrica dell'equazione di Riccati tale che \hat{A} è Hurwitz, la matrice hamiltoniana H risulta avere n autovalori con parte reale negativa (quelli di \hat{A}) e n con parte reale positiva (i simmetrici rispetto all'asse immaginario). In vista del Teorema 4.7 la norma infinita è minore di γ . Viceversa, se la norma infinita è minore di γ allora $\|D\| < \gamma$ e la matrice hamiltoniana H non ha autovalori a parte reale nulla (Teorema 4.7). La stabilità di A implica poi la stabilizzabilità della coppia

$$A + B(\gamma^2 I - D'D)^{-1}D'C, \quad B(\gamma^2 I - D'D)^{-1}B'$$

e quindi, grazie al Teorema 4.4 esiste la soluzione P con le proprietà ricercate. ■

Se la norma è minore di γ è possibile costruire il fattore spettrale canonico di $\Gamma_\gamma(s)$ attraverso la soluzione dell'equazione di Riccati. Infatti, ponendo $X(s) = -(\gamma^2 I - D'D)^{-1/2}(sI - A)^{-1}B + (\gamma^2 I - D'D)^{-1/2}$, e' semplice verificare che

$$\gamma^2 I - G^\sim(s)G(s) = X^\sim(s)X(s)$$

Quindi $\gamma^2 I - G(-j\omega)'G(j\omega) \geq 0$, $\forall \omega$ e $X(s)$ è il fattore spettrale canonico di $\gamma^2 I - G^\sim(s)G(s) = X^\sim(s)X(s)$. Infatti $X(s) \in \mathcal{H}_\infty$ in quanto A è Hurwitz e $X(s)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$ in quanto la matrice dinamica di $X(s)^{-1}$ è \hat{A} .

Il teorema sulla limitatezza reale ammette una descrizione in termini di diseuguaglianza matriciale lineare. Infatti vale il seguente risultato.

Teorema 4.10 *Sia $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ e supponiamo che A sia di Hurwitz. Allora $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ se e solo se $\|D\| < \gamma$ ed esiste una soluzione definita positiva P della disequazione matriciale*

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & PB + C'D \\ D'C + B'P & -\gamma^2 I + D'D \end{bmatrix} < 0 \quad (4.6)$$

Prova. Supponiamo esista $P > 0$ che soddisfa (4.6), che è equivalente, grazie al lemma di Schur, alla coppia di disequazioni

$$\begin{aligned} \gamma^2 I &> DD' \\ 0 &> A'P + PA + (PB + C'D) (\gamma^2 I - D'D)^{-1} (PB + C'D)' + C'C \end{aligned}$$

Dalla prima segue la prima conclusione, cioè $\|D\| < \gamma$. Dalla seconda si ha che A è di Hurwitz (Lemma di Lyapunov). Inoltre, sempre dalla seconda segue che

$$A'P + PA + (PB + \bar{C}'\bar{D}) (\gamma^2 I - \bar{D}'\bar{D})^{-1} (PB + \bar{C}'\bar{D})' + \bar{C}'\bar{C} = 0$$

dove

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C \\ E \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}$$

e la matrice E è tale che $E'E > 0$. Poniamo ora

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A + B(\gamma^2 I - \bar{D}'\bar{D})^{-1}(B'P + \bar{D}'\bar{C}) \\ \bar{B} &= B(\gamma^2 I - \bar{D}'\bar{D})^{-1/2} \\ \hat{C} &= \begin{bmatrix} (\gamma^2 I - \bar{D}'\bar{D})^{-1/2}\bar{D}'\bar{C} \\ E \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e consideriamo ora l'equazione di Riccati nell'incognita X :

$$\bar{A}'X + X\bar{A} - X\bar{B}\bar{B}'X + \hat{C}'\hat{C} = 0$$

La stabilità di A implica la stabilizzabilità di (\bar{A}, \bar{B}) . Inoltre, essendo $E'E > 0$ si ha che la coppia (\bar{A}, \hat{C}) è osservabile. Grazie al Teorema 4.4 esiste la soluzione X stabilizzante, cioè tale che

$$\bar{A} - \bar{B}\bar{B}'X = A + B(\gamma^2 I - \bar{D}'\bar{D})^{-1}(B'(P - X) + \bar{D}'\bar{C})$$

è Hurwitz. Si ponga ora $W = P - X$. Sottraendo termine a termine gli elementi dell'equazione di P e quella di X si ha:

$$A'W + WA + (WB + C'D)(\gamma^2 I - D'D)^{-1}(WB + C'D)' + C'C = 0$$

Quindi W è semidefinita positiva e stabilizzante. Grazie al Teorema 4.9, la norma di $G(s)$ è minore di γ .

Viceversa, si supponga che $G(s)$ abbia norma minore di γ . Quindi $\|D\| < \gamma$. Si definisca la nuova funzione di trasferimento

$$\bar{G}(s) = \begin{bmatrix} C \\ \sqrt{\epsilon}I \end{bmatrix} (sI - A)^{-1}B + \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}$$

Denotando con $F(s) = (sI - A)^{-1}B$, si ha

$$\bar{G}^\sim(s)\bar{G}(s) = G^\sim(s)G(s) + F^\sim(s)F(s)$$

e quindi

$$\|\bar{G}(s)\|_\infty^2 \leq \|G(s)\|_\infty^2 + \epsilon\|F(s)\|_\infty^2$$

Sia ϵ tale che

$$0 < \epsilon < \frac{\gamma^2 - \|G(s)\|_\infty^2}{\|F(s)\|_\infty^2}$$

Quindi, per un tale valore di ϵ la norma infinita di $\bar{G}(s)$ è minore di γ . Ponendo:

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C \\ \sqrt{\epsilon}I \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}$$

e grazie al Teorema 4.9, esiste $P \geq 0$ che soddisfa

$$A'P + PA + (PB + \bar{C}'\bar{D}) \left(\gamma^2 I - \bar{D}'\bar{D} \right)^{-1} (PB + \bar{C}'\bar{D})' + \bar{C}'\bar{C} = 0$$

Quindi, essendo $\bar{C}'\bar{C} > 0$ si ha che $P > 0$ e risolve l'equazione

$$A'P + PA + (PB + C'D) \left(\gamma^2 I - D'D \right)^{-1} (PB + C'D)' + C'C + \epsilon I < 0 = 0$$

La conclusione si ha in base al lemma di Schur notando che $\|D\| < \gamma$ e $P > 0$ è soluzione della equazione precedente (che diventa disequazione togliendo ϵ).

4.7 Sistemi all pass e fattorizzazione Inner-Outer

La funzione di trasferimento di un sistema *passa tutto* (all-pass, lossless) ha la seguente proprietà:

$$G^\sim(s)G(s) = I \quad (4.7)$$

Ad esempio, nel caso scalare, una funzione passa tutto è:

$$G(s) = \frac{1-s}{1+s}$$

La ragione della denominazione "passa tutto" è nel fatto che (si pensi al caso scalare), il modulo di $G(j\omega)$ è costante su tutte le frequenze, e quindi il sistema si comporta come un filtro che nè attenua nè amplifica le armoniche del segnale di ingresso su tutte le frequenze. Si noti che se $G(s)$ è quadrata di rango massimo, allora $G^\sim(s) = G^{-1}(s)$ e $G(s)G^\sim(s) = I$. Il teorema seguente caratterizza i sistemi passa tutto.

Teorema 4.11 *Sia (A, B, C, D) una realizzazione minima di $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ e supponiamo che esista una matrice simmetrica P tale che*

$$\begin{aligned} A'P + PA + C'C &= 0 \\ D'C + B'P &= 0 \\ D'D &= I \end{aligned}$$

Allora $G(s) \in \mathcal{L}_\infty$ ed è una funzione passa tutto. Se in più $P \geq 0$ allora $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$.

Prova. Si definisca $\Psi(s) = (sI - A)^{-1}$. Dalla prima equazione si ha:

$$\Psi^\sim(s)C'C\Psi(s) = \Psi^\sim(s)P + P\Psi(s)$$

e quindi

$$\begin{aligned} G^\sim(s)G(s) &= [B'\Psi^\sim(s)C' + D'] [C\Psi(s)B + D] \\ &= D'D + (D'C + B'P)\Psi(s)B + B'\Psi^\sim(s)(C'D + PB) \\ &= I \end{aligned}$$

col che $G(s)$ è passa tutto. Assumiamoci per assurdo che la matrice A abbia un autovalore con parte reale nulla, cioè $Ax = j\omega x$ per qualche $x \neq 0$ e qualche ω . Allora, dalla prima equazione si ha $0 = x^*(A'P + PA + C'C)x = x^*C'Cx$, e quindi $Ax = j\omega x$ con $Cx = 0$ viola l'osservabilità della coppia (A, C) . Quindi $G(s) \in \mathcal{L}_\infty$. Se $P \geq 0$, dalla prima equazione, e con lo stesso ragionamento, segue che ogni autovalore di A con parte reale non negativa è non osservabile. Quindi $G(s)$ (che è la funzione di trasferimento della parte raggiungibile ed osservabile) non ha poli con parte non negativa e risulta $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$. ■

Una funzione passa tutto $G(s)$ ha la ovvia proprietà che $\|G(s)F(s)\|_\infty = \|G(s)\|_\infty$ per ogni funzione $F(s) \in \mathcal{L}_\infty$. Una funzione passa tutto in $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ si dice essere *inner*. Al contrario, una funzione $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ si dice essere *outer* se ha un'inversa destra analitica in $Re(s) > 0$ (se ha rango pieno per righe per ogni $Re(s) > 0$). Una funzione outer ha dunque un numero di righe non superiore al numero di colonne. Se la matrice è quadrata, allora è outer se $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ e $G(s)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$. Il concetto di funzione outer generalizza quindi il concetto di sistemi SISO a sfasamento minimo. Un'altra possibile caratterizzazione di funzione $G(s) = [G_1(s) \ G_2(s)] \in \mathcal{H}_\infty$ outer è che $G_1(s)$ e $G_2(s)$ siano coprime a sinistra in \mathcal{H}_∞ .

La fattorizzazione inner-outer di una funzione $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$, consiste nella scrittura

$$G(s) = G_i(s)G_o(s)$$

con $G_i(s)$ inner e $G_o(s)$ outer. Nel caso in cui $G(s)$ è scalare, bipropria, senza zeri sull'asse immaginario, è molto facile ricavare la fattorizzazione inner-outer. Per esempio,

$$G(s) = \frac{(s-1)(s+5)}{(s+2)(s+3)} = G_i(s)G_o(s), \quad G_i(s) = \frac{1-s}{1+s}, \quad G_o(s) = -\frac{(1+s)(s+5)}{(s+2)(s+3)}$$

Anche nel caso in cui $G(j\omega)$ ha rango pieno per colonne per ogni ω tra 0 e ∞ , una fattorizzazione inner outer si trova prendendo $G_o(s)$ coincidente con il fattore spettrale canonico di $G^\sim(s)G(s)$ (che è stabile con inversa stabile) e ponendo poi $G_i(s) = G(s)G_o(s)^{-1}$. Infatti, si ha:

$$\begin{aligned} G_i(s)G_o(s) &= G(s)G_o(s)^{-1}G_o(s) = G(s) \\ G_i^\sim(s)G_i(s) &= G_o^\sim(s)^{-1}G^\sim(s)G(s)G_o(s)^{-1} = G_o^\sim(s)^{-1}G_o^\sim(s)G_o(s)G_o(s)^{-1} = I \end{aligned}$$

Il caso in cui $G(j\omega)$ ha rango costante, diciamo r , per ogni ω tra 0 e ∞ , è più complicato. Intanto si scriva:

$$G(s) = H(s) \begin{bmatrix} G_1(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K(s)$$

con $G_1(s) \in \mathcal{H}_\infty$ bipropria con $G_1(j\omega)$ di rango costante r per ogni ω tra 0 e ∞ . Inoltre $H(s) \in \mathcal{H}_\infty$ e $K(s) \in \mathcal{H}_\infty$ sono biproprie con $H(s)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$,

$K(s)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$. Si definisca ora:

$$F(s) = H(s) \begin{bmatrix} G_1(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si noti che $F(s) \in \mathcal{H}_\infty$, $F^\sim(s)F(s) \in \mathcal{L}_\infty$, $F^\sim(\infty)F(\infty) > 0$. Quindi possiamo trovare un fattore spettrale canonico $F_o(s)$ di $F^\sim(s)F(s)$ e definire

$$\begin{aligned} G_o(s) &= \begin{bmatrix} F_o(s) & 0 \end{bmatrix} K(s) \\ G_i(s) &= F(s)F_o(s)^{-1} \end{aligned}$$

Risulta:

$$\begin{aligned} G_i(s)G_o(s) &= F(s)F_o(s)^{-1} \begin{bmatrix} F_o(s) & 0 \end{bmatrix} K(s) = \begin{bmatrix} F(s) & 0 \end{bmatrix} K(s) = G(s) \\ G_i^\sim(s)G_i(s) &= F_o^\sim(s)^{-1}F^\sim(s)F(s)F_o(s)^{-1} = F_o^\sim(s)^{-1}F_o^\sim(s)F_o(s)F_o(s)^{-1} = I \end{aligned}$$

Si noti che $G_o(s)$ ha inversa destra analitica in $Re(s) \geq 0$, in quanto $K(s)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$, $F_o(s)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$ e

$$G_o(s)K^{-1}(s) \begin{bmatrix} F_o(s)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} = I$$

4.8 Raggio Complesso

La norma in \mathcal{H}_∞ si presta bene alla caratterizzazione del cosiddetto raggio complesso di stabilità di una matrice incerta A_{in} descritta da:

$$A_{in} = A + L\Delta N$$

dove A è una matrice conosciuta, supposta essere di Hurwitz, Δ è una matrice (anche complessa) limitata in norma, cioè

$$\|\Delta\| \leq \alpha$$

mentre L e N sono matrici conosciute che descrivono la forma dell'incertezza. La classe di incertezza alla quale A_{in} appartiene è di solito chiamata classe di incertezza *norm bounded*. La matrice A_{in} è la matrice dinamica del sistema retroazionato

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Lw(t) \\ z(t) &= Nx(t) \\ w(t) &= \Delta z(t) \end{aligned}$$

Il Teorema 6.4, dimostrato nel capitolo seguente, ci dice che il sistema retroazionato (e quindi A_{in}) è asintoticamente stabile se

$$\|N(sI - A)^{-1}L\|_\infty < \alpha^{-1}$$

Viceversa, se $\|N(sI - A)^{-1}L\|_\infty \geq \alpha^{-1}$ esiste un elemento Δ con norma non superiore ad α che rende A_{in} non Hurwitz. Infatti, sia $\bar{\omega}$ la frequenza associata al massimo della norma di $N(j\omega I - A)^{-1}L$ e sia $x \neq 0$ tale che

$$L'(-j\bar{\omega}I - A')^{-1}N'N(j\bar{\omega}I - A)^{-1}Lx = \lambda^2 x$$

con $\lambda \geq \alpha^{-1}$. Allora, ponendo $y = (j\bar{\omega}I - A)^{-1}Lx$ si ha

$$Lx = (j\bar{\omega}I - A)y, \quad L'(-j\bar{\omega}I - A')^{-1}N'Ny = \lambda^2 x$$

da cui

$$(j\bar{\omega}I - A - L\Delta N)y = 0$$

con

$$\Delta = \frac{1}{\lambda^2}L'(-j\bar{\omega}I - A')^{-1}N', \quad \|\Delta\| = \frac{1}{\lambda} \leq \alpha$$

In conclusione abbiamo dimostrato che A_{in} è stabile per ogni Δ complesso di norma non superiore ad α se e solo se la norma di $N(sI - A)^{-1}L$ è minore di α^{-1} . Quindi

$$r_{comp} = \frac{1}{\|N(sI - A)^{-1}L\|_\infty}$$

è il cosiddetto *raggio complesso* di stabilità, cioè il valore inferiore della norma di Δ capace di destabilizzare A_{in} ⁸.

Esempio 4.2 Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = (A + L\Delta N)x(t)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \end{bmatrix}, \quad N = I$$

Come prima cosa vogliamo trovare il valore superiore della norma di una perturbazione *reale* Δ tale che $A + L\Delta N$ è Hurwitz (raggio reale di stabilità) e confrontarlo con il raggio complesso di stabilità. A tale scopo si noti che

$$A + L\Delta N = \begin{bmatrix} -1 + \delta_1 & 2 + \delta_2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},$$

e

$$\det[\lambda I - A - L\Delta N] = \lambda^2 + (4 - \delta_1)\lambda + 7 - 3\delta_1 + 2\delta_2$$

⁸Naturalmente esiste anche il concetto di *raggio reale* di stabilità, definito come il valore superiore della norma di Δ *reale* per cui si ha stabilità. Il calcolo di tale raggio, indicato con il simbolo r_{real} , è molto più difficile, in generale. Si può dimostrare che

$$r_{real}^{-1} = \sup_{\omega} \inf_{\gamma \in (0,1)} \inf_{\sigma_2} \left(\begin{bmatrix} Re(N(j\omega I - A)^{-1}L) & -\gamma Im(N(j\omega I - A)^{-1}L) \\ \gamma^{-1} Im(N(j\omega I - A)^{-1}L) & Re(N(j\omega I - A)^{-1}L) \end{bmatrix} \right)$$

dove Re indica la parte reale, Im la parte immaginaria e σ_2 il secondo (più grande) valor singolare.

Quindi si ha stabilità per

$$\delta_1 < 4, \quad \delta_2 > 1.5\delta_1 - 3.5$$

Il cerchio di raggio massimo per cui si conserva la stabilità si trova intersecando le due rette:

$$\delta_2 > 1.5\delta_1 - 3.5, \quad \delta_2 = -2/3\delta_1$$

e quindi

$$\delta_1 = 21/13, \quad \delta_2 = -14/13$$

col che il raggio reale di stabilità è:

$$\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2} = \frac{\sqrt{637}}{13} = 1.9415$$

Il raggio complesso di stabilità è invece:

$$\frac{1}{\|N(sI - A)^{-1}L\|_\infty}$$

Sia allora $G(s) = N(sI - A)^{-1}L$. Si ha

$$G(s) = \begin{bmatrix} s+3 \\ -2 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 4s + 7}$$

Quindi

$$G^\sim(s)G(s) = \frac{13 - s^2}{(s^2 + 4s + 7)(s^2 - 4s + 7)}$$

Allora

$$\|G(s)\|_\infty = \left\| \frac{\sqrt{13} + s}{s^2 + 4s + 7} \right\|_\infty = 0.519$$

Il raggio complesso di stabilità è dunque

$$\frac{1}{1.1232} = 1.9269 < 1.9415$$

■

Il concetto di raggio complesso di stabilità è anche legato a quello di *stabilità quadratica* di un sistema incerto. In particolare, diremo che l'insieme delle matrici A_{in} , ottenuto scegliendo in modo arbitrario la matrice Δ (complessa) con $\|\Delta\| < \alpha$, è quadraticamente stabile se esiste una (unica) matrice *hermitiana* P che soddisfa

$$A_{in}^\sim P + PA_{in} < 0, \quad \forall \Delta, \quad \|\Delta\| \leq \alpha$$

A tale proposito si ha il risultato seguente.

Teorema 4.12 *L'insieme definito dalla matrice incerta A_{in} è quadraticamente stabile se e solo se*

$$\|N(sI - A)^{-1}L\|_\infty < \alpha^{-1}$$

Prova. La stabilità quadratica dell'insieme definito da A_{in} è una proprietà più forte della stabilità di ogni elemento dell'insieme. Se dunque A_{in} è di Hurwitz per ogni Δ di norma minore di α , dal risultato precedente sul raggio complesso segue che la norma di $N(sI - A)^{-1}L$ è minore di α^{-1} .

Viceversa, se questa norma è minore di α^{-1} , sappiamo che esiste $P > 0$ tale che

$$A'P + PA + \alpha^2 PLL'P + N'N < 0$$

Quindi

$$\begin{aligned} 0 &> A'P + PA + \alpha^2 PLL'P + N'N \\ &\geq A'P + PA + \alpha^2 PLL'P + N'\alpha^{-2}\Delta\sim\Delta N \\ &= A_{in}^{\sim}P + PA_{in} + \alpha^{-2} \left[(PL\alpha^2 - N'\Delta\sim)(L'P\alpha^2 - \Delta N) + \right] \\ &\geq A_{in}^{\sim}P + PA_{in} \end{aligned}$$

conclude la prova.

4.9 Entropia

Consideriamo una funzione di trasferimento reale $G(s) \in \mathcal{H}_2$ cioè *strettamente propria e stabile*, e sia γ un numero positivo tale che $\|G(s)\|_{\infty} \leq \gamma$. Definiamo la γ -entropia del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ nel modo seguente:

$$I_{\gamma}(G) = -\frac{\gamma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \det \left[I - \frac{G(-j\omega)'G(j\omega)}{\gamma^2} \right] d\omega$$

Si noti che tale quantità è ben definita grazie al fatto che $\|G(s)\|_{\infty} \leq \gamma$ ⁹. Si noti ancora che, essendo il determinante di una matrice il prodotto dei suoi

⁹Il concetto di entropia nella statistica e nella teoria dell'informazione richiederebbe probabilmente un corso a sè. Nel caso di sistemi SISO è possibile caratterizzare l'entropia in senso probabilistico, facendo riferimento alla funzione di trasferimento di un sistema retroazionato

$$G_{cl}(s) = \frac{G(s)}{1 - \Delta(s)G(s)}$$

dove $G(s)$ è stabile con norma infinita minore di γ e $\Delta(j\omega)$ è, per ogni ω , una variabile casuale distribuita uniformemente nel cerchio di raggio γ^{-1} e tale che $\Delta(j\omega_1)$ e $\Delta(j\omega_2)$ sono indipendenti se $\omega_1 \neq \omega_2$. Si può allora dimostrare che la γ -entropia è il valore atteso della norma \mathcal{H}_2 di $G_{cl}(s)$, cioè:

$$E_{\Delta} \left(\left\| \frac{G(s)}{1 - \Delta(s)G(s)} \right\|_2^2 \right)$$

dove E_{Δ} indica il valore atteso rispetto a Δ . Infatti, si ponga $\Delta(j\omega) = \rho e^{j\theta}$ e $G(j\omega) = \lambda e^{j\phi}$, e si noti che la funzione di distribuzione di $\Delta(j\omega)$ è γ^2/π . Quindi

$$\begin{aligned} E_{\Delta} \left(\left\| \frac{G(j\omega)}{1 - \Delta(j\omega)G(j\omega)} \right\|^2 \right) &= \frac{\gamma^2 \lambda^2}{\pi} \int_0^{\gamma^{-1}} \rho \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \lambda^2 \rho^2 - 2\lambda \rho \cos(\theta + \phi)} d\theta \right] d\rho \\ &= 2\gamma^2 \lambda^2 \int_0^{\gamma^{-1}} \frac{\rho}{1 - \rho^2 \lambda^2} d\rho = -\gamma^2 \ln(1 - \lambda^2 \gamma^{-2}) \end{aligned}$$

autovalori, si può anche scrivere:

$$I_\gamma(G) = -\frac{\gamma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^m \ln \left[1 - \frac{1}{\gamma^2} \sigma_i^2(G(j\omega)) \right] d\omega$$

dove $\sigma_i(\cdot)$ denota il valore singolare i -esimo.

Teorema 4.13 *Si consideri un sistema asintoticamente stabile e strettamente proprio con funzione di trasferimento $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ e una realizzazione minima (A, B, C) . Si supponga inoltre che $\|G(s)\|_\infty < \gamma$. Sia inoltre $\beta = \frac{\gamma^2}{\|G(s)\|_\infty^2}$. Allora:*

$$\|G(s)\|_2^2 \leq I_\gamma(G) \leq -\beta \log(1 - \beta^{-1}) \|G(s)\|_2^2$$

$$I_\gamma(G) = \text{trace}[B'PB]$$

dove P è la soluzione (definita positiva) dell'equazione di Riccati

$$A'P + PA + \gamma^{-2}PBB'P + C'C = 0$$

tale che $A + \gamma^{-2}BB'P$ è asintoticamente stabile.

Prova. La norma in \mathcal{H}_2 si scrive anche nel modo seguente:

$$\|G(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^m \sigma_i^2(G(j\omega)) d\omega$$

Dunque, definendo la funzione

$$f(x^2) = -\gamma^2 \ln \left(1 - \frac{x^2}{\gamma^2} \right)$$

si ha

$$I_\gamma(G) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^m f(\sigma_i^2(G(j\omega))) d\omega$$

Si noti che $f(x^2) \geq x^2$, $\forall x$ e quindi la prima conclusione è che:

$$\|G(s)\|_2^2 \leq I_\gamma(G)$$

Sia ora $r_i = \frac{\gamma^2}{\sigma_i^2(G(j\omega))}$ e si noti che $r_i \geq \beta > 1$. La funzione $x \log(1 - x^{-1})$ è negativa e monotona crescente per $x > 1$. Quindi

$$\log \left[1 - \frac{1}{r_i} \right] \geq \frac{\beta}{r_i} \log \left[1 - \frac{1}{\beta} \right]$$

Quindi

$$E_\Delta \left(\left\| \frac{G(s)}{1 - \Delta(s)G(s)} \right\|_2^2 \right) = \frac{-\gamma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 - |G(j\omega)|^2 \gamma^{-2}) d\omega$$

e quindi

$$\begin{aligned}
I_\gamma(G) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^m -\gamma^2 \log \left[1 - \frac{1}{r_i} \right] d\omega \\
&\leq -\beta \log(1 - \beta^{-1}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^m \sigma_i^2(G(j\omega)) d\omega \\
&= -\beta \log(1 - \beta^{-1}) \|G(s)\|_2^2
\end{aligned}$$

Per dimostrare che l'entropia si può calcolare attraverso l'equazione di Riccati del bounded real lemma, si noti che essendo $\|G(s)\|_\infty < \gamma$, in base al Teorema 4.9 esiste $P > 0$, $W = \gamma I$ e $L = -\gamma^{-1} B' P$ tale che

$$A'P + PA + \gamma^{-2} PBB'P + C'C = 0$$

Ponendo allora $Y(s) = I - \gamma^{-2} B' P (sI - A)^{-1} B$, risulta

$$I - \gamma^{-2} G^\sim(s) G(s) = Y^\sim(s) Y(s)$$

e quindi ¹⁰

$$\begin{aligned}
I_\gamma(G) &= -\frac{\gamma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \det [Y(-j\omega)' Y(j\omega)] d\omega \\
&= \lim_{z \rightarrow \infty} -\frac{\gamma^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |\det [Y(j\omega)]| \frac{z^2}{z^2 + \omega^2} d\omega \\
&= \lim_{z \rightarrow \infty} -\gamma^2 z \ln |\det [Y(z)]| \\
&= \lim_{z \rightarrow \infty} -\gamma^2 z \ln \left| \det \left[I - \gamma^{-2} B' P (zI - A)^{-1} B \right] \right| \\
&= \lim_{z \rightarrow \infty} -\gamma^2 z \ln \left| \det \left[I - \gamma^{-2} z^{-1} B' P B - \gamma^{-2} z^{-2} B' P A \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} A^k B \right] \right|
\end{aligned}$$

¹⁰Nei passaggi sequenti si utilizza la formula integrale di Cauchy che dice che se la curva chiusa δ contiene il punto z allora

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\delta} \frac{f(s)}{s - z} ds = f(z)$$

Calcolata in $s = j\omega$, se z è un numero reale positivo e la funzione è tale che $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = \beta < \infty$ si ha

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(j\omega)}{j\omega - z} d\omega = f(z)$$

Infine, se vale la condizione più debole $\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-1} |f(z)| = 0$ allora

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(j\omega) z}{|j\omega - z|^2} d\omega = f(z)$$

Utilizzando la simbologia $\mathcal{O}(z^{-2})$ ad indicare infinitesimi con potenze z^{-2} , z^{-3} , \dots , si ha $\det[I + \epsilon V] = 1 + \epsilon \text{tr} V + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, e $\ln \det[I + \epsilon V] = \epsilon \text{tr} V + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, dove V è una matrice quadrata.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z \rightarrow \infty} -\gamma^2 z \ln \left| 1 - \gamma^{-2} z^{-1} \text{trace} [B'PB] + \mathcal{O}(z^{-2}) \right| \\
&= \lim_{z \rightarrow \infty} -\gamma^2 z \left[-\gamma^{-2} z^{-1} \text{trace} [B'PB] + \mathcal{O}(z^{-2}) \right] \\
&= \text{trace} [B'PB]
\end{aligned}$$

La prova è quindi conclusa.

4.10 Passività

La nozione di passività di un sistema nasce da considerazioni prese dalla teoria dei circuiti. Consideriamo infatti l'impedenza $Z(s)$ di un circuito passivo che mappa il vettore delle correnti di porta i al vettore delle tensioni di porta v . La passività (stretta) del circuito implica che l'energia consumata in un intervallo $[0 T]$ sia positiva per ogni corrente non nulla (non viene prodotta energia), cioè

$$\int_0^T i(t)v(t)' dt > 0, \quad \forall i(\cdot) \neq 0$$

Prendendo T arbitrariamente grande e valutando l'espressione nel dominio delle frequenze si ha, per un certo numero positivo ϵ :

$$Z(s) \in \mathcal{H}_\infty, \quad Z(j\omega) + Z(-j\omega)' \geq 2\epsilon I$$

che è la condizione di stretta positività reale che abbiamo già incontrato nel Capitolo 1. Seguendo l'analogia dei circuiti passivi, la passività di un sistema dinamico risulta di facile definizione. Precisamente, un sistema dinamico $\Sigma : \mathcal{L}_{2e} \rightarrow \mathcal{L}_{2e}$ si dice essere *strettamente passivo* se esiste un numero positivo ϵ tale che

$$\langle Pu - Pw, u - w \rangle_{[0,T]} \geq \epsilon \|u - w\|_{2,[0,T]}^2, \quad \forall u, w \in \mathcal{L}_2[0, T], \quad \forall T$$

Se ϵ può essere posto uguale a zero, allora il sistema si dirà essere passivo. Come abbiamo visto per l'impedenza di un circuito, per i sistemi quadrati (stesso numero di ingressi e uscite) lineari e invarianti nel tempo la condizione di passività si formula attraverso la positività reale della funzione di trasferimento $G(s)$, e quindi il sistema è passivo se

$$G(s) \in \mathcal{H}_\infty, \quad G(-j\omega)' + G(j\omega) \geq 0, \quad \forall \omega$$

ed è strettamente passivo se

$$G(s) \in \mathcal{H}_\infty, \quad G(-j\omega)' + G(j\omega) > 0, \quad \forall \omega \in [0 \infty)$$

Questa condizione può essere verificata nel modo seguente.

Teorema 4.14 *Sia (A, B, C, D) una realizzazione minima di funzione razionale propria quadrata $G(s)$. Tale funzione è strettamente positiva reale se e solo se esiste una matrice simmetrica P che soddisfa la disequazione lineare matriciale*

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & PB - C' \\ B'P - C & -D - D' \end{bmatrix} < 0$$

Prova. Supponiamo che tale P esista. Allora, per il lemma di Schur si ha:

$$\begin{aligned} D + D' &> 0 \\ A'P + PA + (PB - C')(D + D')^{-1}(B'P - C) &< 0 \end{aligned}$$

Quindi, indicando con $\Psi = (j\omega I - A)^{-1}$, segue che

$$\Psi^{\sim}P + P\Psi - \Psi^{\sim}(PB - C')(D + D')^{-1}(B'P - C)\Psi > 0$$

Moltiplicando a destra per B e a sinistra per B' abbiamo:

$$B'\Psi^{\sim}PB + B'P\Psi B - B'\Psi^{\sim}(PB - C')(D + D')^{-1}(B'P - C)\Psi B \geq 0$$

Poichè $G(j\omega) = C\Psi B + D$ si ha:

$$\begin{aligned} B'\Psi^{\sim}(PB - C') + (B'P - C)\Psi B + G(j\omega) + G(j\omega)^{\sim} - D - D' \\ \geq B'\Psi^{\sim}(PB - C')(D + D')^{-1}(B'P - C)\Psi B \end{aligned}$$

e quindi indicando con $F = ((D + D')^{-1}(B'P - C)\Psi B - I)$ si ha

$$G(j\omega) + G(j\omega)^{\sim} \geq F^{\sim}(D + D')F > 0$$

Viceversa, si supponga che $G(j\omega) + G(j\omega)^{\sim} > 0$ col che $D + D' > 0$. Mostriamo che la matrice hamiltoniana

$$H = \begin{bmatrix} A - B(D + D')^{-1}C & B(D + D')^{-1}B' \\ C'(D + D')^{-1}C & -A' - C'(D + D')^{-1}B' \end{bmatrix}$$

non ha autovalori sull'asse immaginario. Infatti, si assuma per assurdo che $Hx = j\omega x$, con $x = [x_1' \ x_2']' \neq 0$. Allora, indicando con $\Psi = (j\omega I - A)^{-1}$ si ha

$$\begin{aligned} x_1 &= \Psi B(D + D')^{-1}r \\ x_2 &= \Psi^{\sim}C'(D + D')^{-1}r \\ r &= B'x_2 - Cx_1 \end{aligned}$$

e quindi

$$(G(j\omega) + G(-j\omega)') (D + D')^{-1}r = 0$$

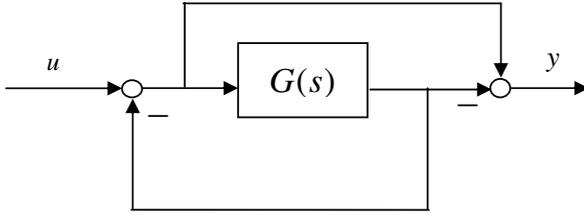


Figura 4.2: Il sistema retroazionato per la passività

il che implica, in base all'ipotesi, $r = 0$ e quindi $x_1 = x_2 = 0$ il che è assurdo. Grazie allora al Teorema 4.4, fissata una matrice Q definita positiva, esiste una soluzione dell'equazione di Riccati

$$0 = \left(A - B(D + D')^{-1}C \right)' P + P \left(A - B(D + D')^{-1}C \right) + PB(D + D')^{-1}B'P + C'(D + D')^{-1}C + Q$$

che coincide con

$$A'P + PA + (PB - C')(D + D')^{-1}(B'P - C) = -Q < 0$$

In conclusione

$$\begin{aligned} D + D' &> 0 \\ A'P + PA + (PB - C')(D + D')^{-1}(B'P - C) &< 0 \end{aligned}$$

col che il teorema è dimostrato. \blacksquare

Per la stretta passività, la funzione di trasferimento deve appartenere a \mathcal{H}_∞ , oltre ad essere strettamente positiva reale. Quindi, nel teorema precedente basta richiedere che P sia positiva definita.

Teorema 4.15 *Sia (A, B, C, D) una realizzazione minima di funzione razionale propria quadrata $G(s)$. Il sistema è strettamente passivo se e solo se esiste una matrice simmetrica definita positiva P che soddisfa la disequazione lineare matriciale*

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & PB - C' \\ B'P - C & -D - D' \end{bmatrix} < 0$$

La proprietà di passività e di limitatezza della norma \mathcal{H}_∞ sono legate nel modo seguente. Si consideri il sistema retroazionato in Figura 4.2. Allora vale il risultato seguente.

Teorema 4.16 *Sia (A, B, C, I) una realizzazione minima di $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$. Il sistema (A, B, C, I) è strettamente passivo se e solo se il sistema retroazionato dall'ingresso u all'uscita y ha norma infinita minore di uno.*

Prova. Si noti che la funzione di trasferimento da u a y è:

$$F(s) = (I - G(s))(I + G(s))^{-1} = -\hat{C}(sI - A + \hat{B}\hat{C})^{-1}\hat{B}, \quad \hat{B} = B/\sqrt{2}, \quad \hat{C} = C\sqrt{2}$$

Se dunque $G(s)$ è strettamente passivo, allora esiste $P > 0$ tale che

$$A'P + PA + (PB - C')(B'P - C)/2 < 0$$

che si può scrivere come

$$(A - \hat{B}\hat{C})' + P(A - \hat{B}\hat{C}) + P\hat{B}\hat{B}'P + \hat{C}'\hat{C} < 0$$

Ciò significa che $A - \hat{B}\hat{C}$ è Hurwitz e che la norma infinita di $F(s)$ è minore di uno (Bounded Real Lemma, Teorema 4.10). Viceversa se $F(s) \in \mathcal{H}_\infty$ e $\|F(s)\|_\infty < 1$ allora esiste $P > 0$ che soddisfa tale diseuguaglianza e quindi $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ ed è strettamente passivo.

