

Capitolo 6

Parametrizzazione dei controllori stabilizzanti

Certamente il problema di caratterizzare l'insieme dei controllori che stabilizzano un dato impianto è uno dei più significativi della teoria del controllo. Questo capitolo è dedicato essenzialmente a questo problema.

Per prima cosa occorre studiare il problema della verifica della stabilità interna di un sistema retroazionato attraverso le funzioni di trasferimento che lo compongono. A tale scopo si consideri il sistema retroazionato di Figura 1.4. Abbiamo già visto che la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un regolatore R stabilizzante è la stabilizzabilità e rivelabilità di S . Sotto queste ipotesi, il regolatore stabilizzante può essere scelto nella classe dei sistemi tempo-invarianti, lineari e a dimensioni finite. La determinazione di tale regolatore può essere effettuata attraverso un numero di tecniche classiche, una delle quali illustrata nella sezione 1.12. Più difficile è il problema della determinazione dell'intero insieme individuato dai regolatori stabilizzanti. Prima di fare ciò, occorre studiare la proprietà di stabilità interna di un sistema retroazionato in funzione di alcune sue funzioni di trasferimento caratteristiche.

6.1 Stabilità dei sistemi retroazionati

Consideriamo ancora il sistema in Figura 1.4 dove sia S che R sono sistemi stabilizzabili e rivelabili, aventi funzioni di trasferimento $G(s)$ e $C(s)$, rispettivamente (Figura 6.1). La dinamica (stabile) delle parti non raggiungibili e/o non osservabili non influenzano le funzioni di trasferimento. Senza perdere di generalità possiamo allora fare riferimento a realizzazioni minime di $G(s)$ e $C(s)$. Quindi,

$$G(s) := C(sI - A)^{-1}B + D$$

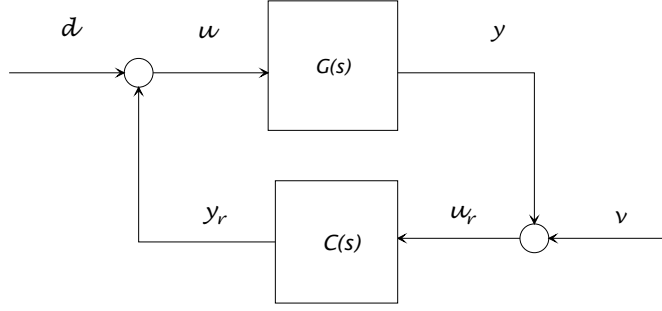


Figura 6.1: Connessione in retroazione

con

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

e

$$C(s) := C_r(sI - A_r)^{-1}B_r + D_r$$

con

$$\begin{aligned}\dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + B_r u_r(t) \\ y_r(t) &= C_r x_r(t) + D_r u_r(t)\end{aligned}$$

Queste equazioni hanno senso solo se la matrice $\Delta_{21} := (I - D_r D)$ (o, equivalentemente, la matrice $\Delta_{12} := (I - D D_r)$) è nonsingolare. Ponendo $z := [x' \ x_r']' \in R^n$, $\bar{u} := [u' \ u_r']'$, $\bar{v} := [d' \ v']'$, una realizzazione del sistema ad anello chiuso è data da:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \bar{A}z + \bar{B}\bar{v} \\ \bar{u} &= \bar{C}z + \bar{D}\bar{v}\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\bar{A} &:= \begin{bmatrix} A + B\Delta_{21}^{-1}D_r C & B\Delta_{21}^{-1}C_r \\ B_r\Delta_{12}^{-1}C & A_r + B_r\Delta_{12}^{-1}D C_r \end{bmatrix} \\ \bar{B} &:= \begin{bmatrix} B\Delta_{21}^{-1} & B\Delta_{21}^{-1}D_r \\ B_r\Delta_{12}^{-1}D & B_r\Delta_{12}^{-1} \end{bmatrix} \\ \bar{C} &:= \begin{bmatrix} \Delta_{21}^{-1}D_r C & \Delta_{21}^{-1}C_r \\ \Delta_{12}^{-1}C & \Delta_{12}^{-1}D C_r \end{bmatrix} \\ \bar{D} &:= \begin{bmatrix} \Delta_{21}^{-1} & \Delta_{21}^{-1}D_r \\ \Delta_{12}^{-1}D & \Delta_{12}^{-1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Sia $T(s) := \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D}$ la matrice di trasferimento da $\bar{v}$ a $\bar{u}$.

Teorema 6.1 *Il sistema retroazionato di Figura Fig. 6.1 è asintoticamente stabile se e solo se $T(s) \in \mathcal{H}_\infty$.*

Prova. Se $\bar{A}$ è di Hurwitz, allora ovviamente $T(s) \in \mathcal{H}_\infty$. Per provare la conclusione opposta, dimostreremo, attraverso il PBH test di raggiungibilità ed osservabilità, che il sistema $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ è in forma minima. Infatti, si considerino le due matrici

$$P_C(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda I - \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix}, \quad P_B(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda I - \bar{A} & -\bar{B} \end{bmatrix}$$

Il sistema ad anello chiuso è in forma minima se e solo se le due matrici hanno rango massimo per ogni λ . Si noti ora che le due matrici seguenti

$$T_o := \begin{bmatrix} I & 0 & B & 0 \\ 0 & I & 0 & B_r \\ 0 & 0 & I & -\Delta_{21}^{-1}D_r\Delta_{12} \\ 0 & 0 & -\Delta_{12}^{-1}D\Delta_{21} & I \end{bmatrix}$$

$$T_r := \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & -C_r & -\Delta_{21}D_r\Delta_{12}^{-1} & I \\ -C & 0 & I & -\Delta_{12}D\Delta_{21}^{-1} \end{bmatrix}$$

sono invertibili. Risulta dunque che $P_C(\lambda)$ e $P_B(\lambda)$ hanno lo stesso rango di $T_o P_C(\lambda)$ e $P_B(\lambda) T_r$. Inoltre:

$$T_o P_C(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda I - A & 0 \\ 0 & \lambda I - A_r \\ 0 & C_r \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_B(\lambda) T_r = \begin{bmatrix} \lambda I - A & 0 & 0 & -B \\ 0 & \lambda I - A_r & -B_r & 0 \end{bmatrix}$$

Grazie alla minimalità di (A, B, C, D) e (A_r, B_r, C_r, D_r) si ha dunque che il sistema di cui $T(s)$ è funzione di trasferimento è in forma minima. Quindi $T(s) \in \mathcal{H}_\infty$ implica che $\bar{A}$ è di Hurwitz. ■

Esempio 6.1 Sia $G(s) = -1/(s-1)$ e $C(s) = (s-1)/(s+1)$. La matrice dinamica di una particolare realizzazione è

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

che ha autovalori $\lambda_1 = -2$ and $\lambda_2 = 1$. Quindi il sistema ad anello chiuso non è asintoticamente stabile. Infatti,

$$T(s) = \begin{bmatrix} (s+1)/(s+2) & (s-1)/(s+2) \\ -(s+1)/(s-1)(s+2) & (s+1)/(s+2) \end{bmatrix}$$

non appartiene a $\mathcal{H}_\infty$. ■

Il risultato espresso nel teorema precedente può essere specializzato al caso in cui una delle due funzioni di trasferimento $G(s)$ o $C(s)$ è stabile. Nel seguito gli elementi di $T(s)$ sono denotati con il simbolo $T_{ij}(s)$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$.

Teorema 6.2 *Sia $G(s)$ stabile. Allora il sistema retroazionato è stabile asintoticamente se e solo se $T_{12}(s) \in \mathcal{H}_\infty$.*

Prova. Si noti che

$$\begin{aligned} I + T_{12}(s)G(s) &= I + [I - C(s)G(s)]^{-1}C(s)G(s) = [I - C(s)G(s)]^{-1} = T_{11}(s) \\ I + G(s)T_{12}(s) &= I + G(s)C(s)[I - G(s)C(s)]^{-1} = [I - G(s)C(s)]^{-1} = T_{22}(s) \\ T_{21}(s) &= G(s)T_{11}(s) \end{aligned}$$

Quindi $T_{12}(s) \in \mathcal{H}_\infty$ e $C(s) \in \mathcal{H}_\infty$ implica che $T(s) \in \mathcal{H}_\infty$. Il viceversa è ovvio. ■

Un ulteriore specializzazione del risultato si ha quando entrambe le funzioni $G(s)$ e $C(s)$ sono stabili.

Teorema 6.3 *Assumiamo che $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ e $C(s) \in \mathcal{H}_\infty$. Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se*

$$\det[I - G(s)C(s)] \neq 0, \quad \operatorname{Re}(s) \geq 0$$

Prova. Notiamo che la matrice $\bar{A}$ è la matrice dinamica del sistema che ha come funzione di trasferimento

$$\bar{G}(s) = (I - G(s)C(s))^{-1}$$

Il sistema che ha come funzione di trasferimento $\bar{G}(s)^{-1} = I - G(s)C(s)$ ha come zeri invarianti gli autovalori di $\bar{A}$. Se $\bar{A}$ è Hurwitz si ha allora che tali zeri invarianti hanno parte reale negativa, così come gli zeri di trasmissione (che sono un sottoinsieme). Quindi la tesi. Viceversa, se vale la relazione $\det[\bar{G}(s)^{-1}] \neq 0$, $\operatorname{Re}(s) \geq 0$, gli zeri di trasmissione di $\bar{G}(s)^{-1}$ hanno parte reale negativa. Poichè entrambi i sistemi sono in forma minima e stabili asintoticamente, ne consegue che ogni zero invariante del sistema con funzione di trasferimento $\bar{G}(s)^{-1}$ che non sia di trasmissione debba essere nel semipiano sinistro. Quindi gli autovalori del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ (autovalori di $\bar{A}$) sono nel semipiano sinistro. Il sistema retroazionato risulta dunque asintoticamente stabile.

Per concludere la sezione, consideriamo un risultato ormai classico nella letteratura dei sistemi di controllo che è conosciuto con il nome di Teorema del piccolo guadagno (*small gain theorem*).

Teorema 6.4 *Sia $G(s)$. Allora*

- i) *Il sistema retroazionato di Figura 6.1 è asintoticamente stabile for ogni $C(s)$ in $\mathcal{H}_\infty$ con $\|C(s)\|_\infty < \alpha$ se $\|G(s)\|_\infty \leq \alpha^{-1}$*
- ii) *Se $\|G(s)\|_\infty > \alpha^{-1}$, allora esiste $C(s)$ in $\mathcal{H}_\infty$ con $\|C(s)\|_\infty < \alpha$ che destabilizza il sistema retroazionato.*

Prova. Se $\|G(s)\|_\infty \leq \alpha^{-1}$, risulta $\bar{\sigma}[G(s)C(s)] < 1, \forall \text{Re}(s) \geq 0$. Allora tutti gli autovalori di $G(s)C(s)$ hanno modulo minore di uno nel semipiano destro chiuso e quindi $\det[I - G(s)C(s)] \neq 0, \forall \text{Re}(s) \geq 0$. In vista del teorema precedente (Teorema 6.3) si conclude che il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile.

Viceversa, si supponga che $\|G(s)\|_\infty = \alpha^{-1}(1 + \epsilon) := \rho^{-1}, \epsilon > 0$ e si consideri il caso in cui il numero di ingressi del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ sia non superiore al suo numero di uscite. Scriviamo una scomposizione ai valori singolari di $G(j\omega)$, cioè $G(j\omega) = U(j\omega)\Sigma(j\omega)V^\sim(j\omega)$ con $\Sigma(j\omega) = [S(j\omega)' \ 0]'$, dove $S(j\omega)$ è quadrata. Si ponga $C(j\omega) := \rho V(j\omega)TU^\sim(j\omega)$, dove $T = [I \ 0]$. Segue che

$$\begin{aligned} \det[I - G(j\omega)C(j\omega)] &= \det \left[I - \rho U(j\omega) \begin{bmatrix} S(j\omega) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^\sim(j\omega) \right] \\ &= \det \left[\begin{bmatrix} I - \rho S(j\omega) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right] \\ &= \det[I - \rho S(j\omega)] \end{aligned}$$

Dal momento che $\|G(s)\|_\infty = \rho^{-1}$, esiste una frequenza $\bar{\omega}$ tale che $\lim_{\omega \rightarrow \bar{\omega}} \bar{\sigma}[G(j\omega)] = \rho^{-1}$. Allora, ricordando che $S(j\omega) = \text{diag}\{\sigma_i[G(j\omega)]\}$, segue che un elemento non nullo di $\rho S(j\omega)$ tende a uno e quindi $\lim_{\omega \rightarrow \bar{\omega}} \det[I - G(j\omega)C(j\omega)] = 0$. Grazie al teorema precedente (Teorema 6.3) ciò significa che il sistema retroazionato non è asintoticamente stabile. Il caso in cui il numero di ingressi è superiore al numero di uscita è simile e la dimostrazione relativa è lasciata al lettore.

6.2 Fattorizzazione doppia coprima

Introduciamo ora un risultato intermedio utile per fornire la parametrizzazione dei regolatori stabilizzanti.

Teorema 6.5 *Sia $G(s)$ una matrice razionale propria. Allora esistono otto matrici razionali $M(s), N(s), \hat{M}(s), \hat{N}(s), X(s), Y(s), \hat{X}(s), \hat{Y}(s)$, tutte in $\mathcal{H}_\infty$, tali che*

a)

$$G(s) = N(s)M^{-1}(s) = \hat{M}^{-1}(s)\hat{N}(s)$$

b)

$$\begin{bmatrix} \hat{X}(s) & \hat{Y}(s) \\ -\hat{N}(s) & \hat{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) & -Y(s) \\ N(s) & X(s) \end{bmatrix} = I$$

Le matrici $M(s)$, $N(s)$, $\hat{M}(s)$, $\hat{N}(s)$ costituiscono una doppia fattorizzazione coprima di $G(s)$.

Prova. Notiamo che il teorema implica la coprimità a destra di $M(s)$ e $N(s)$ e a sinistra di $\hat{M}(s)$ and $\hat{N}(s)$. Sia ora $G(s) = \Sigma(A, B, C, D)$ e si assuma il sistema stabilizzabile e rivelabile. Siano K e L due matrici tali che $A + BK$ e $A + LC$ sono di Hurwitz. Allora (la verifica è lasciata al lettore):

$$\begin{aligned} M(s) &= K(sI - A - BK)^{-1}B + I \\ N(s) &= (C + DK)(sI - A - BK)^{-1}B + D \\ X(s) &= -(C + DK)(sI - A - BK)^{-1}L + I \\ Y(s) &= K(sI - A - BK)^{-1}L \\ \hat{M}(s) &= C(sI - A - LC)^{-1}L + I \\ \hat{N}(s) &= C(sI - A - LC)^{-1}(B + LD) + D \\ \hat{X}(s) &= -K(sI - A - LC)^{-1}(B + LD) + I \\ \hat{Y}(s) &= K(sI - A - LC)^{-1}L \end{aligned}$$

E' chiaro che esistono infinite fattorizzazioni doppie coprime di una funzione $G(s)$.

Esempio 6.2 Consideriamo la matrice razionale

$$G(s) = \begin{bmatrix} (s^2 + s - 1)/(s^3 - s) & s/(s^2 - 1) \\ (2s^2 - 1)/(s^3 - s) & s^2/(s^2 - 1) \end{bmatrix}$$

che ammette come realizzazione minima la quadrupla

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Scegliendo

$$K := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad L := \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -4 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

è facile verificare che le otto matrici di una fattorizzazione doppia coprima sono le seguenti:

$$\begin{aligned}
M(s) &= \begin{bmatrix} s/(s+1) & 0 \\ -s(2s+1)/(s+1)(s^2+s+1) & (s^2-1)/(s^2+s+1) \end{bmatrix} \\
N(s) &= \begin{bmatrix} (s^2+1)/(s+1)(s^2+s+1) & s/(s^2+s+1) \\ 1/(s^2+s+1) & s^2/(s^2+s+1) \end{bmatrix} \\
X(s) &= \begin{bmatrix} (s^3+5s^2+s-5)/(s+1)(s^2+s+1) & 0 \\ -(9s+5)/(s^2+s+1) & 1 \end{bmatrix} \\
Y(s) &= \begin{bmatrix} -1/(s+1) & 0 \\ (12s^2+26s+13)/(s+1)(s^2+s+1) & 0 \end{bmatrix} \\
\hat{M}(s) &= \begin{bmatrix} s(s-1)/(s+1)^2 & 0 \\ -(3s+1)/(s+1)^2 & 1 \end{bmatrix} \\
\hat{N}(s) &= \begin{bmatrix} (s^2+s-1)/(s+1)^3 & s^2/(s+1)^3 \\ (2s^2+3s)/(s+1)^3 & (s^3+3s^2+s)/(s+1)^3 \end{bmatrix} \\
\hat{X}(s) &= \begin{bmatrix} (s^3+4s^2+7s+5)/(s+1)^3 & s/(s+1)^3 \\ (2s^2-5s-13)/(s+1)^3 & (s^3+4s^2-4s-1)/(s+1)^3 \end{bmatrix} \\
\hat{Y}(s) &= \begin{bmatrix} -(s-1)/(s+1)^2 & 0 \\ 12s/(s+1)^2 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Nel caso in cui la funzione di trasferimento $G(s)$ è già stabile, cioè $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$, si può scegliere $K = 0$, $L = 0$ e quindi:

$$\begin{aligned}
M(s) &= \hat{M}(s) = I \\
N(s) &= \hat{N}(s) = G(s) \\
X(s) &= \hat{X}(s) = I \\
Y(s) &= \hat{Y}(s) = 0
\end{aligned}$$

Il teorema sulla doppia fattorizzazione coprima ci permette di formulare un altro risultato relativo alla stabilità del sistema retroazionato di Figura 6.1. Tale sistema retroazionato si può rappresentare anche nel modo descritto in Figura 6.2, dove $G(s) = N_G(s)M_G(s)^{-1}$, con $M_G(s)$ e $N_G(s)$ coprimi a destra e $C(s) = N_C(s)M_C(s)^{-1}$ con $M_C(s)$ e $N_C(s)$ coprimi a destra. Con riferimento a tale figura sia $z := [z'_1 \ z'_2]'$, $\bar{u} := [u' \ u_r']'$ and $\bar{v} := [d' \ v']'$.

Teorema 6.6 *Il sistema in figura 6.2 è asintoticamente stabile se e solo se la funzione di trasferimento $H(s)$ dall'ingresso $\bar{v}$ all'uscita z è in $\mathcal{H}_\infty$.*

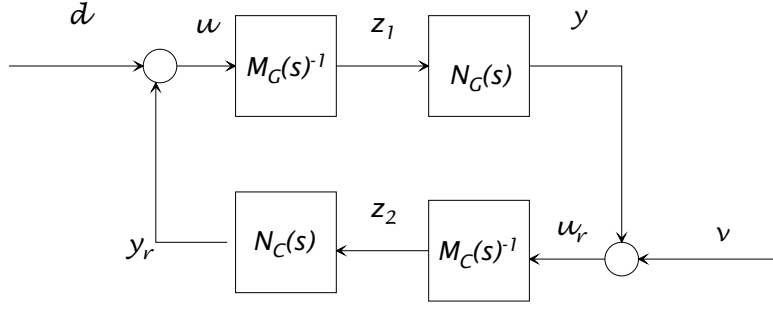


Figura 6.2: Connessione in retroazione

Prova. Siano $X_G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ e $Y_G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ soluzioni dell'equazione di Bezout $X_G(s)M_G(s) + Y_G(s)N_G(s) = I$ e $X_C(s) \in \mathcal{H}_\infty$ e $Y_C(s) \in \mathcal{H}_\infty$ soluzioni dell'equazione di Bezout $X_C(s)M_C(s) + Y_C(s)N_C(s) = I$. Per la dimostrazione del teorema basta osservare che le funzioni $H(s)$ e $T(s)$ (quest'ultima, si ricordi, è la funzione di trasferimento da $\bar{v}$ a $\bar{u}$) sono legate dalle relazioni:

$$\begin{aligned} T(s) &= \begin{bmatrix} 0 & N_C(s) \\ N_G(s) & 0 \end{bmatrix} H(s) + I \\ H(s) &= \begin{bmatrix} X_G(s) & Y_G(s) \\ Y_C(s) & X_C(s) \end{bmatrix} T(s) - \begin{bmatrix} 0 & Y_G(s) \\ Y_C(s) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Quindi $T(s) \in \mathcal{H}_\infty$ è equivalente a $H(s) \in \mathcal{H}_\infty$.

Teorema 6.7 *Il sistema di Figura 6.2 è asintoticamente stabile se e solo se $P^{-1}(s) \in RH_\infty$, dove*

$$P(s) := \begin{bmatrix} M_G(s) & N_C(s) \\ N_G(s) & M_C(s) \end{bmatrix}$$

Prova. Si osservi che $P(s)$ è bipropria e quindi invertibile, se il sistema retroazionato è ben posto. Infatti, se $G(\infty) = D$ e $C(\infty) = D_r$ si ha $\det[P(\infty)] = \det[I - DD_r]$. Infine $H(s) \in \mathcal{H}_\infty$ se e solo se $P^{-1}(s) \in \mathcal{H}_\infty$. Infatti

$$H(s) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} P^{-1}(s) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

■

6.3 Parametrizzazione

Adesso risolveremo finalmente il problema della parametrizzazione dei regolatori stabilizzanti. Articoliamo la discussione iniziando dal caso più semplice in cui $G(s)$ è stabile (in $\mathcal{H}_\infty$). In tale caso, sappiamo dal Teorema 6.2 che il

sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile se e solo se $T_{12}(s) \in \mathcal{H}_\infty$. Sia allora $Q(s)$ una generica funzione in $\mathcal{H}_\infty$ e si ponga

$$C(s) = Q(s)(I + G(s)Q(s))^{-1} = (I + Q(s)G(s))^{-1}Q(s) \quad (6.1)$$

un generico controllore. Allora si noti che:

$$\begin{aligned} T_{12}(s) &= Q(s) \\ T_{11}(s) &= I + Q(s)G(s) \\ T_{21}(s) &= G(s) + G(s)Q(s)G(s) \\ T_{22}(s) &= I + G(s)Q(s) \end{aligned}$$

Quindi, essendo $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ si ha che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, qualunque sia la scelta di $Q(s) \in \mathcal{H}_\infty$ tale da non annullare identicamente $\det[I + Q(s)G(s)]$. Viceversa se $C(s)$ è un regolatore stabilizzante allora $C(s)$ si può scrivere nella forma (6.1) prendendo $Q(s) = T_{12}(s)$.

Nel caso generale, la parametrizzazione può essere ricavata facendo riferimento alla figura 6.2 e alla parametrizzazione doppia coprima di $G(s)$ discussa in precedenza.

Teorema 6.8 *L'insieme delle funzioni razionali $C(s)$ che stabilizzano internamente $G(s)$ è definito dai regolatori della forma:*

$$\begin{aligned} C(s) &= [-Y(s) + M(s)Q(s)][X(s) + N(s)Q(s)]^{-1} \\ &= [\hat{X}(s) + Q(s)\hat{N}(s)]^{-1}[-\hat{Y}(s) + Q(s)\hat{M}(s)] \end{aligned} \quad (6.2)$$

dove $Q(s)$ è ogni elemento di $\mathcal{H}_\infty$ tale che

$$\det[I + D \lim_{s \rightarrow \infty} Q(s)] \neq 0 \quad (6.3)$$

Prova. Le inverse che appaiono nelle equazioni (6.2) esistono in quanto $N(s)$ e $\hat{N}(s)$ sono strettamente proprie e $X(s)$ e $\hat{X}(s)$ sono bi-proprie. Per ogni matrice $Q(s)$ si ha:

$$\begin{aligned} I &= \begin{bmatrix} I & -Q(s) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Q(s) \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & -Q(s) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}(s) & \hat{Y}(s) \\ -\hat{N}(s) & \hat{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) & -Y(s) \\ N(s) & X(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Q(s) \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{X}(s) + Q(s)\hat{N}(s) & \hat{Y}(s) - Q(s)\hat{M}(s) \\ -\hat{N}(s) & \hat{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) & M(s)Q(s) - Y(s) \\ N(s) & N(s)Q(s) + X(s) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Il blocco (1,2) del prodotto delle due ultime matrici è zero, quindi

$$\begin{aligned} &[\hat{X}(s) + Q(s)\hat{N}(s)][M(s)Q(s) - Y(s)] + \\ &[\hat{Y}(s) - Q(s)\hat{M}(s)][N(s)Q(s) + X(s)] = 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

che dimostra l'uguaglianza in (6.2).

Sia ora

$$C(s) := [-Y(s) + M(s)Q(s)][X(s) + N(s)Q(s)]^{-1}$$

dove $Q(s) \in \mathcal{H}_\infty$ soddisfa la condizione (6.3). Dimostriamo che un tale regolatore stabilizza $G(s)$. Sia $U(s) := -Y(s) + M(s)Q(s)$, $V(s) := X(s) + N(s)Q(s)$, $\hat{U}(s) := -\hat{Y}(s) + Q(s)\hat{M}(s)$, $\hat{V}(s) := \hat{X}(s) + Q(s)\hat{N}(s)$, e quindi $C(s) = U(s)V^{-1}(s) = \hat{V}(s)^{-1}\hat{U}(s)$. Dalla fattorizzazione doppia coprima di $G(s)$ segue che

$$\begin{bmatrix} \hat{V}(s) & -\hat{U}(s) \\ -\hat{N}(s) & \hat{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) & U(s) \\ N(s) & V(s) \end{bmatrix} = I$$

cioè

$$\begin{bmatrix} M(s) & U(s) \\ N(s) & V(s) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{V}(s) & -\hat{U}(s) \\ -\hat{N}(s) & \hat{M}(s) \end{bmatrix}$$

La matrice nel membro di destra appartiene a $\mathcal{H}_\infty$ e quindi anche la matrice inversa. Dal Teorema 6.7, il sistema in Fig. 6.1 è asintoticamente stabile.

Viceversa, assumiamo che $C(s)$ stabilizzi $G(s)$. Affinchè il sistema di Fig. 6.1 sia ben posto, il controllore $C(s)$ deve soddisfare l'equazione

$$\det [I - DD_r] \neq 0 \quad (6.6)$$

dove $D_r := \lim_{s \rightarrow \infty} C(s)$. Siano $U(s)$ e $V(s)$ due elementi coprimi a destra di $\mathcal{H}_\infty$ tali che $C(s) = U(s)V^{-1}(s)$ e consideriamo l'identità

$$\begin{bmatrix} \hat{X}(s) & \hat{Y}(s) \\ -\hat{N}(s) & \hat{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) & U(s) \\ N(s) & V(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \hat{X}(s)U(s) + \hat{Y}(s)V(s) \\ 0 & -\hat{N}(s)U(s) + \hat{M}(s)V(s) \end{bmatrix}$$

Poichè le due matrici nel membro di sinistra hanno inversa in $\mathcal{H}_\infty$, si ha $P^{-1}(s) := [-\hat{N}(s)U(s) + \hat{M}(s)V(s)]^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$ e $Q(s) := [\hat{X}(s)U(s) - \hat{Y}(s)V(s)]P^{-1}(s) \in \mathcal{H}_\infty$. Notiamo ora che

$$\begin{aligned} Q(s) &:= [\hat{X}(s)C(s) + \hat{Y}(s)][P(s)V(s)^{-1}]^{-1} \\ &= [\hat{X}(s)C(s) - \hat{Y}(s)][-\hat{N}(s)C(s) + \hat{M}(s)]^{-1} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} I + D \lim_{s \rightarrow \infty} Q(s) &= I + D \lim_{s \rightarrow \infty} [\hat{X}(s)C(s) + \hat{Y}(s)][-\hat{N}(s)C(s) + \hat{M}(s)]^{-1} \\ &= I + DD_r(I - DD_r)^{-1} = (I - DD_r)^{-1} \end{aligned}$$

Quindi $Q(s)$ soddisfa la condizione (6.3).

Dalle definizioni di $U(s)$ e $V(s)$ si ha

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M(s) & -Y(s) \\ N(s) & X(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}(s) & \hat{Y}(s) \\ -\hat{N}(s) & \hat{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) & U(s) \\ N(s) & V(s) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} M(s) & -Y(s) \\ N(s) & X(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Q(s)P(s) \\ 0 & P(s) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

che diventa

$$\begin{bmatrix} M(s) & U(s) \\ N(s) & V(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(s) & -Y(s) \\ N(s) & X(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Q(s)P(s) \\ 0 & P(s) \end{bmatrix}$$

Quest'ultima condizione implica

$$\begin{aligned} U(s) &= [-Y(s) + M(s)Q(s)]P(s) \\ V(s) &= [X(s) - N(s)Q(s)]P(s) \end{aligned}$$

e quindi

$$C(s) = U(s)V^{-1}(s) = [-Y(s) + M(s)Q(s)][X(s) - N(s)Q(s)]^{-1}$$

Il controllore $C_0(s)$ che corrisponde alla scelta naturale $Q(s) = 0$, è di solito chiamato controllore *centrale*. In vista dell'equazione (6.2), tale controllore è dato da

$$C_0(s) = -Y(s)X^{-1}(s) = -\hat{X}^{-1}(s)\hat{Y}(s)$$

e quindi dipende dalla particolare scelta della doppia fattorizzazione coprima. Nonostante la scelta del parametro libero più semplice, il controllore centrale non ha di solito l'ordine più piccolo possibile.

Esempio 6.3 Sia $G(s) = 1/s$ e si scelga $K = L = -1$ così da ottenere $N(s) = \hat{N}(s) = 1/(s+1)$, $M(s) = \hat{M}(s) = s/(s+1)$, $X(s) = \hat{X}(s) = (s+2)/(s+1)$, $Y(s) = \hat{Y}(s) = 1/(s+1)$. Dall'equazione (6.2) si ha

$$K(s) = -\frac{1 - sQ(s)}{s + 2 + Q(s)}$$

e quindi, in corrispondenza di $Q(s) = 0$, il controllore centrale è: $C_0(s) = -1/(s+2)$, mentre, se $Q(s) = -1$, si ha $C(s) = -1$. ■

La struttura dell'insieme dei regolatori stabilizzanti può essere messa in luce in funzione del controllore centrale nel modo indicato dal risultato seguente, la cui prova richiede solo passaggi di algebra delle matrici ed è quindi lasciata al lettore.

Teorema 6.9 *L'insieme delle funzioni razionali $C(s)$ che stabilizza $G(s)$ è dato da*

$$C(s) = C_0(s) + \hat{X}(s)^{-1}(s)Q(s)[I + X^{-1}(s)N(s)Q(s)]^{-1}X^{-1}(s)$$

dove

$$\begin{aligned} C_0(s) &= -Y(s)X^{-1}(s) = -\hat{X}(s)^{-1}(s)\hat{Y}(s) \\ Q(s) &\in \mathcal{H}_\infty \\ 0 &\neq \det[I + D \lim_{s \rightarrow \infty} Q(s)] \end{aligned}$$

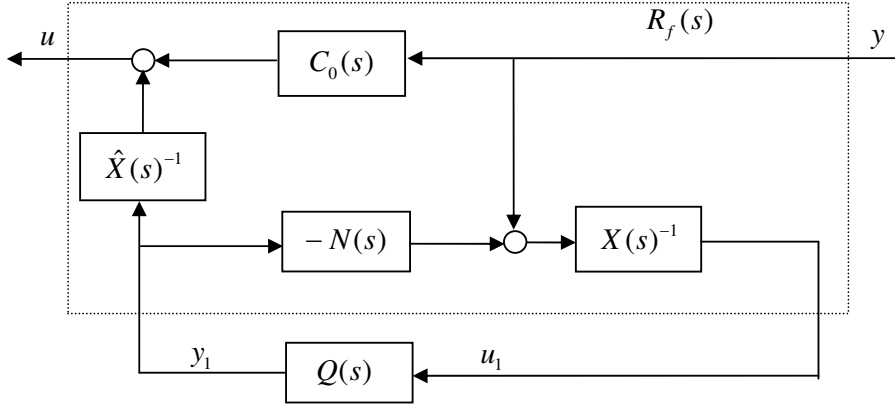


Figura 6.3: Struttura dei regolatori stabilizzanti

La forma di $C(s)$ data dal Teorema 6.9 mostra che il generico controllore stabilizzante è costituito dalla connessione in retroazione di due sottosistemi, si veda la Figura 6.3. Il primo, indicato con il simbolo $R_f(s)$ in Fig. 6.3, dipende solo dalla scelta della fattorizzazione doppia coprime, mentre il secondo è semplicemente costituito dal parametro libero $Q(s)$. Infatti, è facile riconoscere che la funzione di trasferimento da y a u del sistema controllato è precisamente $C(s)$. Con riferimento alla Figura 6.3, la funzione di trasferimento del sistema $R_f(s)$ dai due ingressi y e y_1 alle due uscite u e u_1 è

$$R_f(s) = \begin{bmatrix} C_0(s) & -Z^{-1}(s) \\ X^{-1}(s) & X^{-1}(s)N(s) \end{bmatrix}$$

Siano ora K e L tali che $A + BK$ e $A + LC$ siano Hurwitz, e si costruisca il regolatore centrale $C_0(s)$ attraverso l'osservatore e la legge di controllo sullo stato ricostruito, come spiegato nella Sezione 1.12. Allora, si può vedere che la una realizzazione di $R_f(s)$ è la seguente:

$$R_f(s) = \begin{bmatrix} K \\ -C \end{bmatrix} (sI - A - BK - LC - LDK)^{-1} \begin{bmatrix} -L & -B - LD \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & D \end{bmatrix}$$

Infine, gli autovalori del sistema complessivo sono dati dagli autovalori di $A + BF$, di $A + HC$ e della matrice dinamica A_q di $Q(s) := \Sigma(A_q, B_q, C_q, D_q)$. Infatti, denotando con x lo stato del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$, con $\hat{x}$ lo stato dell'osservatore asintotico, e con x_q quello del sistema con funzione di trasferimento $Q(s)$, la scelta $x_t := [x' - \xi' \ x_q' \ x']'$ come vettore di stato del sistema complessivo, porta a una matrice dinamica data da:

$$A_t = \begin{bmatrix} A + LC & 0 & 0 \\ B_q C & A_q & 0 \\ -B(K + D_q C) & -B C_q & A + BK \end{bmatrix}$$

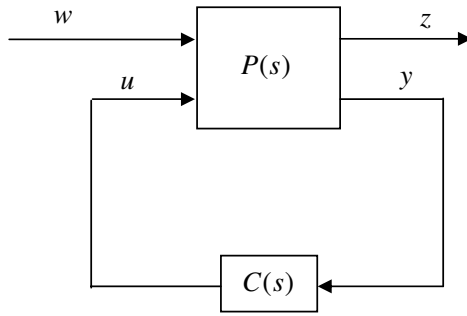


Figura 6.4: Schema standard

6.4 Alcuni problemi di progetto

In questa sezione conclusiva, definiamo alcuni problemi di sintesi del controllore. Una formulazione generale del problema di sintesi fa riferimento alla Figura ?? . Lo schema a blocchi corrispondente è anche detto *schema standard*. In tale figura il vettore w rappresenta le variabili di disturbo o di riferimento e il vettore z rappresenta invece le variabili di prestazioni, sulle quali appunto si vogliono esprimere le specifiche di progetto. Le prestazioni sono solitamente espresse attraverso la norma della funzione di trasferimento da w a z . Se con $P_{ij}(s)$, $i, j = 1, 2$, si indicano le funzioni di trasferimento che compongono $P(s)$, tale funzione è data dalla *Trasformazione Lineare Frazionaria* (LFT)

$$G_{cl}(s) = P_{11}(s) + P_{12}(s) [I - C(s)P_{22}(s)]^{-1} C(s)P_{21}(s)$$

Lo scopo del progetto è quello di ricavare un controllore $C(s)$ tale da stabilizzare il sistema ad anello chiuso e rendere minima (o comunque limitare), in una norma da specificare, la funzione di trasferimento ad anello chiuso $G_{cl}(s)$.

La dipendenza di $G_{cl}(s)$ da $C(s)$ è ovviamente complicata. Possiamo però utilizzare la parametrizzazione dei controllori che stabilizzano il sistema retroazionato avente $P_{22}(s)$ come linea di andata. Segnatamente sia,

$$P_{22}(s) = N(s)M^{-1}(s) = \hat{M}^{-1}(s)\hat{N}(s)$$

con

$$\begin{bmatrix} \hat{X}(s) & \hat{Y}(s) \\ -\hat{N}(s) & \hat{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) & -Y(s) \\ N(s) & X(s) \end{bmatrix} = I$$

dove tutti gli elementi sono in $\mathcal{H}_\infty$. E' un fatto di semplice manipolazione di matrici dimostrare che la funzione di trasferimento in anello chiuso $G_{cl}(s)$ si può scrivere come:

$$G_{cl}(s) = T_1(s) + T_2(s)Q(s)T_3(s)$$

dove

$$\begin{aligned} T_1(s) &= P_{11}(s) - P_{12}(s)M(s)\hat{Y}(s)P_{21}(s) \\ T_2(s) &= P_{12}(s)M(s) \\ T_3(s) &= \hat{M}(s)P_{21}(s) \end{aligned}$$

Il problema è quindi quello di ricavare $Q(s) \in \mathcal{H}_\infty$ tale da minimizzare $G_{cl}(s)$ (*Model Matching Problem*) e poi calcolare il controllore attraverso la formula di parametrizzazione

$$C(s) = \left(\hat{X}(s) + Q(s)\hat{N}(s) \right)^{-1} \left(Q(s)\hat{M}(s) - \hat{Y}(s) \right)$$

Si noti però che le funzioni $T_i(s)$ potrebbero non essere in $\mathcal{H}_\infty$. Infatti, si consideri una realizzazione del sistema aumentato $P(s)$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w \end{aligned}$$

Le funzioni $T_i(s)$ sono in $\mathcal{H}_\infty$ se e solo se la coppia (A, B_2) è stabilizzabile e la coppia (A, C_2) è rivelabile, cioè se il sistema con funzione di trasferimento $P_{22}(s) = C_2(sI - A)^{-1}B_2 + D_{21}$ è internamente stabilizzabile da y .

Primo caso

Assumiamo che

- (i) La funzione di trasferimento $T_2(s)$ è tale che esiste una funzione inner $U(s) \in \mathcal{H}_\infty$ in modo tale che $U(s)T_2(s) \in \mathcal{H}_\infty$
- (ii) La funzione di trasferimento $T_3(s)$ ha rango pieno per righe senza zeri e poli sull'asse immaginario

Allora, indicando con $\bar{T}_2(s)$ la funzione $\bar{T}_2(s) = U(s)T_2(s)$, e con $\bar{T}_1(s)$ la funzione $\bar{T}_1(s) = U(s)T_1(s)$ si ha

$$\begin{aligned} \|G_{cl}(s)\|_2^2 &= \|U(s)^{-1}U(s)T_1(s) + U^{-1}U(s)T_2(s)Q(s)T_3(s)\|_2^2 \\ &= \|\bar{T}_1(s) + \bar{T}_2(s)Q(s)T_3(s)\|_2^2 \end{aligned}$$

Infine, si scriva una fattorizzazione inner outer di $\bar{T}_2(s) \in \mathcal{H}_\infty$, cioè $\bar{T}_2(s) = \bar{T}_{2i}(s)\bar{T}_{2o}(s)$. Allora, si noti che (completamento dei quadrati)

$$G_{cl}(s)G_{cl}^\sim(s) = \bar{T}_1(s) \left[I - T_3^\sim(s)(T_3(s)T_3^\sim(s))^{-1}T_3(s) \right] \bar{T}_1^\sim(s) + R_Q(s)R_Q^\sim(s)$$

dove

$$R_Q(s) = \bar{T}_{2o}(s)Q(s)\hat{T}_3(s) + \bar{T}_{2i}(s)^{-1}\bar{T}_1(s)T_3^\sim(s)\hat{T}_3^\sim(s)^{-1}$$

e $\hat{T}_3(s)$ è il fattore spettrale canonico di $T_3(s)T_3^\sim(s)$ che esiste grazie all'ipotesi (ii). La soluzione ottima è dunque tale da minimizzare la norma $\mathcal{L}_2$ di $R_Q(s)$. Indicando con $\llbracket_{st}$ la parte stabile e con $\llbracket^\dagger$ la pseudoinversa¹, la soluzione ottima è:

$$Q^{ott}(s) = -\bar{T}_{2o}(s)^\dagger \left[\bar{T}_1(s)T_3^\sim(s)\hat{T}_3^\sim(s)^{-1} \right]_{st} \hat{T}_3(s)^{-1}$$

Si noti che tale soluzione ottima potrebbe non essere propria nel caso in cui $T_2(\infty)$ non ha rango pieno. In questo caso, la soluzione ottima può essere approssimata con una soluzione propria aggiungendo un numero opportuno di poli ad alta frequenza.

Secondo caso

Assumiamo che

- (i) La funzione di trasferimento $T_3(s)$ è tale che esiste una funzione inner $U(s) \in \mathcal{H}_\infty$ in modo tale che $T_3(s)U(s) \in \mathcal{H}_\infty$
- (ii) La funzione di trasferimento $T_2(s)$ ha rango pieno per colonne senza zeri e poli sull'asse immaginario

Allora, indicando con $\bar{T}_3(s)$ la funzione $\bar{T}_3(s) = T_3(s)U(s)$, e con $\bar{T}_1(s)$ la funzione $\bar{T}_1(s) = T_1(s)U(s)$ si ha

$$\begin{aligned} \|G_{cl}(s)\|_2^2 &= \|T_1(s)U(s)U(s)^{-1} + T_2(s)Q(s)T_3(s)U(s)U(s)^{-1}\|_2^2 \\ &= \|\bar{T}_1(s) + T_2(s)Q(s)\bar{T}_3(s)\|_2^2 \end{aligned}$$

Infine, si scriva una fattorizzazione inner outer di $\bar{T}_3(s) \in \mathcal{H}_\infty$, cioè $\bar{T}_3(s) = \bar{T}_{3o}(s)\bar{T}_{3i}(s)$. Allora, si noti che (completamento dei quadrati)

$$G_{cl}(s)G_{cl}^\sim(s) = \bar{T}_1^\sim(s) \left[I - T_2(s)(T_2^\sim(s)T_2(s))^{-1}T_2^\sim(s) \right] \bar{T}_1(s) + S_Q^\sim(s)S_Q(s)$$

dove

$$S_Q(s) = \hat{T}_2(s)Q(s)\bar{T}_{3o}(s) + \hat{T}_2^\sim(s)^{-1}T_2^\sim(s)T_1(s)\bar{T}_{3i}(s)^{-1}$$

e $\hat{T}_2(s)$ è il fattore spettrale canonico di $T_2^\sim(s)T_2(s)$ che esiste grazie all'ipotesi (ii). La soluzione ottima è dunque tale da minimizzare la norma $\mathcal{L}_2$ di $S_Q(s)$. Indicando con $\llbracket_{st}$ la parte stabile e con $\llbracket^\dagger$ la pseudoinversa, la soluzione ottima è:

$$Q^{ott}(s) = -\hat{T}_2(s)^{-1} \left[\hat{T}_2^\sim(s)^{-1}T_2^\sim(s)\bar{T}_1(s)^{-1}\bar{T}_{3i}(s)^{-1} \right]_{st} \bar{T}_{3o}(s)^\dagger$$

Si noti che tale soluzione ottima potrebbe non essere propria nel caso in cui $T_3(\infty)$ non ha rango pieno. In questo caso, la soluzione ottima può essere approssimata con una soluzione propria aggiungendo un numero opportuno di poli ad alta frequenza.

¹La pseudoinversa di Moore-Penrose di una matrice X complessa è definita come quella matrice $X^\dagger$ tale che $XX^\dagger X = X$ e $X^\dagger X X^\dagger = X^\dagger$. Se X è invertibile allora $X^\dagger = X^{-1}$. Se X è invertibile a destra, allora $X^\dagger = X'(XX^\sim)^{-1}$. Se X è invertibile a sinistra, allora $X^\dagger = (X^\sim)^{-1}X$.

6.4.1 Filtro ottimo $\mathcal{H}_2$

Il problema del filtro ottimo in $\mathcal{H}_2$ si può formulare nel modo seguente. Sia w un rumore (pensato deterministico) che genera le misure y attraverso un sistema dinamico con funzione di trasferimento $G(s)$. Sia poi $H(s)$ un altro filtro dinamico, ancora alimentato da w , che genera un segnale di uscita ξ che si vuole ricostruire in modo da minimizzare l'errore di ricostruzione. Il filtro da sintetizzare, $F(s)$, ha come ingresso le misure y e genera in uscita una ricostruzione u del segnale incognito ξ . Si vuole minimizzare la norma in $\mathcal{L}_2$ della funzione di trasferimento da w a $z = \xi - u$, cioè

$$G_{cl}(s) = H(s) - F(s)G(s)$$

Questo problema di filtraggio si può formulare come problema di controllo attraverso lo schema standard, definendo $C(s) = F(s)$ e

$$P(s) = \begin{bmatrix} H(s) & -I \\ G(s) & 0 \end{bmatrix}$$

Poichè $P_{22}(s) = 0$ si può scegliere

$$\begin{aligned} N(s) &= 0 \\ \hat{N}(s) &= 0 \\ \hat{X}(s) &= M(s) = I \\ X(s) &= \hat{M}(s) = I \\ Y(s) &= \hat{Y}(s) = 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$G_{cl}(s) = T_1(s) + T_2(s)Q(s)T_3(s)$$

con $T_1(s) = H(s)$, $T_2(s) = I$, $T_3(s) = G(s)$, e $Q(s) = F(s)$. Se quindi $G(s)$ ha rango pieno per righe si ricade nel primo caso discusso precedentemente.

Il filtro ottimo ha dunque l'espressione:

$$F^{ott}(s) = \left[H(s)G^\sim(s)\hat{T}_3^\sim(s)^{-1} \right]_{st} \hat{T}_3(s)^{-1}$$

dove $\hat{T}_3(s)$ è il fattore spettrale canonico di $G(s)G^\sim(s)$. Si noti però che la funzione $G_{cl}(s)$ ottenuta potrebbe non essere in $\mathcal{H}_2$, ma solo in $\mathcal{L}_2$.

Consideriamo ora il sistema dinamico

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Dw(t) \\ \xi(t) &= Mx(t) \end{aligned}$$

e affrontiamo il problema di ricavare un sistema dinamico $F(s)$ stabile, alimentato da y , che genera una ricostruzione ottima u del segnale incognito ξ ,

cioè tale da minimizzare la norma $\mathcal{H}_2$ della funzione di trasferimento da w a $z = u - \xi$, cioè

$$G_{cl}(s) = H(s) - F(s)G(s)$$

dove

$$H(s) = M(sI - A)^{-1}B, \quad G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Le ipotesi principali che vengono fatte sono:

(A1) La coppia (A, C) è rivelabile

(A2) $DD' > 0$

Osservazione 6.1 *Se vale l'ipotesi A2, senza ledere la generalità si può pensare di assumere che $DB' = 0$ e $DD' = I$. Infatti, il sistema può essere riscritto nel modo seguente:*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \tilde{A}x(t) + \tilde{B}w(t) + BD'(DD')^{-1}y(t) \\ \bar{y}(t) &= \tilde{C}x + \tilde{D}w \\ \xi(t) &= Mx(t) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A - BD'(DD')^{-1}C \\ \tilde{B} &= B(I - D'(DD')^{-1})D \\ \tilde{C} &= (DD')^{-1/2}C \\ \tilde{D} &= (DD')^{-1/2}D \\ \bar{y}(t) &= (DD')^{-1/2}y(t) \end{aligned}$$

per cui $\tilde{B}\tilde{D}' = 0$ e $\tilde{D}\tilde{D}' = I$. Ora si introduca il nuovo sistema

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}w(t) \\ \bar{y}(t) &= \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{D}w(t) \\ \xi(t) &= M\tilde{x}(t) \end{aligned}$$

che differisce dal primo solo nell'assenza del termine deterministico $D'(DD')^{-1}y(t)$ nella derivata dello stato (iniezione dell'uscita nella derivata dello stato). Quest'ultimo sistema soddisfa però le ipotesi $\tilde{B}\tilde{D}' = 0$ e $\tilde{D}\tilde{D}' = I$. Il ricostruttore ottimo in $\mathcal{H}_2$ per il sistema di partenza si ricava dal ricostruttore ottimo in $\mathcal{H}_2$ per il nuovo sistema aggiungendo nelle equazioni della derivata dello stato di quest'ultimo termine $D'(DD')^{-1}y(t)$.

La soluzione ottima è data dal filtro

$$F(s) = M(sI - A - LC)^{-1}L$$

dove

$$L = -(PC' + BD')(DD')^{-1/2}$$

e P è la soluzione stabilizzante dell'equazione di Riccati

$$AP + PA' - (PC' + BD')(DD')^{-1/2}(CP + DB') + BB' = 0$$

cioè tale che $P \geq 0$ e $A - PC' + BD')(DD')^{-1/2}C$ sia Hurwitz.

Esempio 6.4 Si considerino le due funzioni di trasferimento

$$G(s) = \frac{1-s}{s+5}, \quad H(s) = \frac{1}{s+5}$$

Si ricavi il filtro ottimo in $\mathcal{H}_2$, cioè $F(s)$ stabile tale che la norma $\|F(s)G(s) - H(s)\|_2$ sia minimizzata. A tale scopo si noti che la soluzione in $\mathcal{H}_2$ coincide con quella in $\mathcal{L}_2$, in quanto $H(s)$ e $G(s)$ sono stabili.

Soluzione: La soluzione è:

$$F^{ott}(s) = (H(s)G^\sim(s)\hat{G}^\sim(s)^{-1})_{sta}\hat{G}(s)^{-1}$$

dove

$$\hat{G}(s) = \frac{s+1}{s+5}$$

è il fattore spettrale canonico. Risulta:

$$H(s)G^\sim(s)\hat{G}^\sim(s)^{-1} = \frac{1+s}{(1-s)(s+5)} = \frac{-1/3}{s-1} + \frac{-2/3}{s+5}$$

e quindi

$$(H(s)G^\sim(s)\hat{G}^\sim(s)^{-1})_{sta} = \frac{-2/3}{s+5}$$

Infine:

$$F^{ott}(s) = \frac{-2/3}{s+1}$$

e quindi

$$H(s) - F^{ott}(s)G(s) = \frac{1}{s+5} + \frac{2(1-s)}{3(s+5)(s+1)} = \frac{5-s}{3(s+5)}$$

col che $\|G_{cl}(s)\|_2 = \frac{1}{3}$.

Vediamo ora la soluzione in spazio di stato (ricostruttore ottimo in $\mathcal{H}_2$) e consideriamo quindi il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -5x(t) + w(t) \\ y(t) &= 6x(t) - w(t) \\ \xi(t) &= x(t) \end{aligned}$$

Per costruzione si ha che $G(s)$ è la funzione di trasferimento da w a y e $H(s)$ quella da w a ξ . Il filtro ottimo si ottiene nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= -5\hat{x}(t) + L(C\hat{x}(t) - y(t)) \\ \hat{\xi}(t) &= \hat{x}(t)\end{aligned}$$

dove

$$L = -6P + 1$$

e P è la soluzione stabilizzante di

$$-10P - (36P^2 + 1 - 12P) + 1 = 0$$

Si ha $P = 1/18$ e $L = 2/3$, e quindi la funzione di trasferimento da y a $\hat{\xi}$, che è il filtro ottimo, risulta

$$F^{ott}(s) = \frac{-2/3}{s+1}$$

che, per le ragioni già dette, coincide con quella ricavata in precedenza.

Esempio 6.5 Si considerino le due funzioni di trasferimento

$$G(s) = \frac{s-1}{s-5}, \quad H(s) = \frac{1}{s-5}$$

Si ricavi il filtro ottimo in $\mathcal{L}_2$ con $F(s)$ stabile tale che la norma $\|F(s)G(s) - H(s)\|_2$ sia minimizzata.

Soluzione: La soluzione è:

$$F^{ott}(s) = (H(s)G^\sim(s)\hat{G}^\sim(s)^{-1})_{sta}\hat{G}(s)^{-1}$$

dove

$$\hat{G}(s) = \frac{s+1}{s+5}$$

è il fattore spettrale canonico. Risulta:

$$H(s)G^\sim(s)\hat{G}^\sim(s)^{-1} = \frac{1+s}{(5+s)(s-1)}$$

e quindi

$$(H(s)G^\sim(s)\hat{G}^\sim(s)^{-1})_{sta} = \frac{2/3}{s+5}$$

Infine:

$$F^{ott}(s) = \frac{2/3}{s+1}$$

e quindi

$$H(s) - F^{ott}(s)G(s) = \frac{1}{s-5} - \frac{2(s-1)}{3(s-5)(s+1)} = \frac{s+5}{3(s-5)(s+1)}$$

col che $\|G_{cl}(s)\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

Vediamo ora la soluzione in spazio di stato (ricostruttore ottimo in $\mathcal{H}_2$) e consideriamo quindi il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= 5x(t) + w(t) \\ y(t) &= 4x(t) + w(t) \\ \xi(t) &= x(t)\end{aligned}$$

Per costruzione si ha che $G(s)$ è la funzione di trasferimento da w a y e $H(s)$ quella da w a ξ . Il filtro ottimo si ottiene nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= 5\hat{x}(t) + L(C\hat{x}(t) - y(t)) \\ \hat{\xi}(t) &= \hat{x}(t)\end{aligned}$$

dove

$$L = -(4P + 1)$$

e P è la soluzione stabilizzante di

$$10P - (4P^2 + 1)^2 + 1 = 0$$

Si ha $P = 1/8$ e $L = -3/2$, e quindi la funzione di trasferimento da y a $\hat{\xi}$, del ricostruttore ottimo, risulta

$$F^{ott}(s) = \frac{3/2}{s + 1}$$

che, per le ragioni già dette, non coincide con quello ricavata in precedenza. Infine: $\|G_{cl}(s)\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, che è maggiore di quella ricavata minimizzando in $\mathcal{L}_2$ anzichè in $\mathcal{H}_2$.

Osservazione 6.2 Il problema del filtraggio in ambiente stocastico si può descrivere nel modo seguente. Si consideri il sistema n -dimensionale

$$\dot{x} = Ax + \zeta_1 + B_2 u \quad (6.7)$$

$$\bar{y} = Cx + \zeta_2 \quad (6.8)$$

dove $\zeta := [\zeta_1' \ \zeta_2']'$ è un rumore bianco gaussiano a media nulla e intensità unitaria

$$W := \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{12}' & W_{22} \end{bmatrix}, \quad W_{22} > 0 \quad (6.9)$$

Si vuole ricavare una stima u di una combinazione lineare dello stato del sistema Mx , in maniera da minimizzare il funzionale

$$J_4 := \lim_{t \rightarrow \infty} E [[Mx(t) - u(t)]' [Mx(t) - u(t)]]$$

o

$$J_5 := \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T} \int_0^T [Mx(t) - u(t)]' [Mx(t) - u(t)] dt \right]$$

Si noti che $\hat{W} := W_{11} - W_{12}W_{22}^{-1}W_{12}' \geq 0$ ². Si prenda una matrice B_{11} che sia una fattorizzazione $n \times n$ di $\hat{W}$, in modo tale che

$$B_{11}B_{11}' = \hat{W} \quad (6.10)$$

Inoltre si definisca

$$D := [0 \ I], \quad B := [B_{11} \ W_{12}W_{22}^{-1/2}] \quad (6.11)$$

$$y := W_{22}^{-1/2}\bar{y}, \quad C := W_{22}^{1/2}C \quad (6.12)$$

$$z := C_1x + u, \quad C_1 := -M \quad (6.13)$$

Allora il sistema (6.7)–(6.9) può essere riscritto come

$$\dot{x} = Ax + Bw + B_2u \quad (6.14)$$

$$z = C_1x + u \quad (6.15)$$

$$y = Cx + Dw \quad (6.16)$$

dove w è un rumore bianco gaussiano a media nulla e intensità unitaria

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & W_{12}W_{22}^{-1/2} \\ 0 & W_{22}^{1/2} \end{bmatrix} w \quad (6.17)$$

Si osservi che

$$BB' = W_{11}, \quad BD' = W_{12}W_{22}^{-1/2}, \quad DD' = I \quad (6.18)$$

E' facile verificare che

$$J_4 = \lim_{t \rightarrow \infty} E[z'(t)z(t)]$$

e

$$J_5 = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T} \int_0^T z'(t)z(t) dt \right]$$

Allora il problema consiste nel trovare un controllore della forma

$$\dot{\xi} = F\xi + Gy \quad (6.19)$$

$$u = H\xi + Ny \quad (6.20)$$

tale che il sistema di controllo (6.14)–(6.20) è stabile e il criterio J_4 o J_5 venga minimizzato. Il sistema ad anello chiuso è ben posto e la funzione di trasferimento da w a z è strettamente propria se e solo se $N = 0$. Infine, risulta che $J_4 = J_5$ che uguaglia il quadrato della norma in $\mathcal{H}_2$ della funzione di trasferimento da w a z .

²Infatti, dal momento che $W \geq 0$ e $W_{22} > 0$ si ha $\hat{W} = Z'WZ$, con

$$Z := \begin{bmatrix} I \\ -W_{22}^{-1}W_{12}' \end{bmatrix}$$

6.4.2 Controllo ottimo $\mathcal{H}_2$

In questa sezione conclusiva viene schematicamente presentato il problema del controllo ottimo in $\mathcal{H}_2$ dallo stato. Precisamente, sempre con riferimento alla Figura 6.4 si fa l'ipotesi che lo stato del sistema aumentato P e le variabili esogene w siano a disposizione del progettista, e che si voglia ottimizzare la norma $\mathcal{H}_2$ della funzione di trasferimento da w alle variabili di prestazione z . A tale problema è frequentemente dato il nome di *full information control*. Il sistema P è descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_1w(t) \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

con le ipotesi che (A, B) sia stabilizzabile e (A, C) rivelabile. Secondo lo schema standard si ha dunque:

$$\begin{aligned}P_{11}(s) &= C(sI - A)^{-1}B_1 \\ P_{12}(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ P_{21}(s) &= \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1}B_1 \\ I \end{bmatrix} \\ P_{22}(s) &= \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1}B \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Una volta calcolata la fattorizzazione doppia coprima di $P_{22}(s)$ il problema è quello di minimizzare la norma $\mathcal{L}_\infty$ di $T_1(s) + T_2(s)Q(s)T_3(s)$, dove

$$\begin{aligned}T_1(s) &= P_{11}(s) - P_{12}(s)M(s)\hat{Y}(s)P_{21}(s) \\ T_2(s) &= P_{12}(s)M(s) \\ T_3(s) &= \hat{M}(s)P_{21}(s)\end{aligned}$$

dipendono da una doppia fattorizzazione coprima di $P_{22}(s)$:

$$\begin{aligned}\hat{X}(s) &= X(s) = I \\ \hat{Y}(s) &= Y(s) = \begin{bmatrix} -K & 0 \end{bmatrix} \\ M(s) &= I + K(sI - A - BK)^{-1}B \\ N(s) &= \begin{bmatrix} (sI - A - BK)^{-1}B \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hat{N}(s) &= \begin{bmatrix} (sI - A - L)^{-1}B \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hat{M}(s) &= \begin{bmatrix} (sI - A - L)^{-1}L + I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\end{aligned}$$

dove K e L tali che $A + BK$ e $A + LC$ sono di Hurwitz. Risulta:

$$\begin{aligned} T_1(s) &= (C + DK)(sI - A - BK)^{-1}B_1 \\ T_2(s) &= (C + DK)(sI - A - BK)^{-1}B + D \\ T_3(s) &= \begin{bmatrix} (sI - A - LC)^{-1}B_1 \\ I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le ipotesi del secondo caso illustrato nella parte introduttiva della sezione sono soddisfatte se si fa l'ipotesi $D'D > 0$, e la soluzione ottima risulta:

$$Q^{ott}(s) = -\hat{T}_2(s)^{-1} \left[\hat{T}_2^\sim(s)^{-1} T_2^\sim(s) \bar{T}_1(s) \bar{T}_{3i}(s)^{-1} \right]_{st} \bar{T}_{3o}(s)^\dagger$$

dove $\bar{T}_1(s) = T_1(s)$, $\bar{T}_{3o}(s) = T_3(s)$ e $\bar{T}_{3i}(s) = I$. Quindi

$$Q^{ott}(s) = -\hat{T}_2(s)^{-1} \left[\hat{T}_2^\sim(s)^{-1} T_2^\sim(s) T_1(s) \right]_{st} \bar{T}_{3o}(s)^\dagger$$

Per quanto riguarda il fattore spettrale canonico di $T_2^\sim(s)T_2(s)$, si segue quanto discusso nella sezione 4.4. Si ha

$$\hat{T}_2(s) = (D'D)^{1/2} \left(I + (D'D)^{-1/2} (B'P + D'C + D'DK)(sI - A - BK)^{-1}B \right)$$

dove P è la soluzione stabilizzante dell'equazione di Riccati

$$\begin{aligned} 0 &= (A + BK)'P + P(A + BK) + (C + DK)'(C + DK) \\ &- (PB + C'D + K'D'D)(D'D)^{-1}(B'P + D'DK + D'C) \end{aligned}$$

Se si prende

$$K = -(D'D)^{-1}(B'P + D'C)$$

l'equazione di Riccati diventa:

$$A'P + PA + (PB + C'D)(D'D)^{-1}(B'P + D'C) + C'C = 0$$

Tale scelta di K porta a una matrice $A + BK$ di Hurwitz e inoltre (i conti sono lasciati al lettore):

$$\hat{T}_2^\sim(s)^{-1} T_2^\sim(s) T_1(s) = -(D'D)^{-1/2} B'(sI + A')^{-1} P B_1 \in \mathcal{H}_2^\perp$$

Essendo questa funzione antistabile, la sua parte stabile è nulla, cioè la scelta ottima

$$Q(s) = T_2(s)^{-1} \left[\hat{T}_2^\sim(s)^{-1} T_2^\sim(s) T_1(s) \right]_{st} T_3(s)^\dagger = 0$$

Quindi,

$$C(s) = -\hat{X}(s)^{-1} \hat{Y}(s) = \begin{bmatrix} K & 0 \end{bmatrix}$$

cioè $u(t) = Kx(t)$. In conclusione il controllo ottimo $\mathcal{H}_2$ è:

$$u(t) = -(D'D)^{-1}(B'P + D'C)x(t)$$

dove P è l'unica soluzione stabilizzante dell'equazione di Riccati:

$$A'P + PA + (PB + C'D)(D'D)^{-1}(B'P + D'C) + C'C = 0$$

Si noti che il controllo così ottenuto non dipende da w , che pure era stato supposto essere misurabile. Con ciò si dice che il controllo ottimo *full information* coincide con il controllo ottimo *state feedback*.

Osservazione 6.3 Il problema di controllo ottimo in $\mathcal{H}_2$ si può applicare ai problemi di controllo LQ (*lineare quadratico* o LQS (*lineare quadratico stocastico*)).

Problema LQ Consideriamo il sistema n -dimensionale

$$\dot{x} = Ax + B\bar{u} \quad (6.21)$$

$$x(0) = x_0 \quad (6.22)$$

con il funzionale di costo

$$J_1 := \int_0^\infty [x'(t)Qx(t) + 2x'(t)S\bar{u}(t) + \bar{u}'(t)R\bar{u}(t)] dt \quad (6.23)$$

dove

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} := L = L' \geq 0, \quad R > 0 \quad (6.24)$$

So osservi che $L \geq 0$ and $R > 0$ implica

$$\hat{Q} := Q - SR^{-1}S' \geq 0$$

dal momento che $\hat{Q} = Z' LZ$ con $Z' := [I \quad -SR^{-1}]$. Sia $C_{11} \in R^{n \times n}$ una fattorizzazione di $\hat{Q}$, e quindi

$$C_{11}' C_{11} = \hat{Q} \quad (6.25)$$

Inoltre si definisca

$$C := \begin{bmatrix} C_{11} \\ R^{-1/2}S' \end{bmatrix}, \quad D := \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

$$u := R^{1/2}\bar{u}, \quad z := Cx + Du \quad (6.27)$$

E' facile verificare che

$$J_1 = \int_0^\infty z'(t)z(t)dt$$

D'altra parte, il movimento libero dello stato si può sempre vedere come un movimento forzato da un ingresso impulsivo che agisce attraverso una matrice di ingresso opportuna. Perciò, se si tengono in conto le equazioni (6.25)–(6.27), il sistema (6.21), (6.22) può essere descritto nel modo seguente

$$\dot{x} = Ax + B_1w + Bu \quad (6.28)$$

$$z = Cx + Du \quad (6.29)$$

con $w := \delta(t)$, $B_1 := x_0$, $B := BR^{-1/2}$ and $x(0) = 0$. Il problema LQ consiste nel trovare un controllore della forma

$$\dot{\xi} = F\xi + Gx \quad (6.30)$$

$$u = H\xi + Nx \quad (6.31)$$

tale che il sistema in anello chiuso si asintoticamente stabile e l'indice di costo sia minimizzato. Si noti che il sistema di controllo è ben posto, che la funzione di trasferimento da w a z risulta essere strettamente propria e che il quadrato della norma in $\mathcal{H}_2$ di tale funzione è proprio J_1 .

Tuttavia, si osservi che nel contesto del problema classico di controllo ottimo, il problema LQ è formulato senza richiedere la stabilità del sistema risultante. Ad esempio si consideri il sistema (6.21) e il costo (6.23) con

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1, \quad S = 0$$

dove $\alpha = 1$ o $\alpha = -1$. Nel contesto del problema classico LQ, la soluzione è data dalla legge di controllo $u_{CL}^o(x) = -[0 \ 1]x$ a cui corrisponde il valore del costo $J_{1CL}^o(x(0)) = x_2^2(0)$. Il sistema ad anello chiuso è stabile se $\alpha = -1$ e instabile se $\alpha = 1$. Nel contesto $\mathcal{H}_2$ la legge di controllo ottima è $u_{\mathcal{H}_2}^o(x) = -[4 \ 3]x$ quando $\alpha = 1$, e il valore del costo è $J_{1RH_2}^o(x(0)) = 8x_1^2(0) + 8x_1(0)x_2(0) + 3x_2^2(0)$. Quando $\alpha = -1$ si trova la stessa legge di controllo del caso classico. Nel contesto $\mathcal{H}_2$, il sistema ad anello chiuso è stabile in entrambi i casi. Infine si noti che $J_{1CL}^o(x(0)) \leq J_{1H_2}^o(x(0))$, $\forall x(0)$.

Problema LQS Si assuma che il sistema controllato è

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B\bar{u}$$

dove w è un rumore bianco con intensità unitaria. Inoltre si consideri il costo

$$J_2 := \lim_{t \rightarrow \infty} E [x'(t)Qx(t) + 2x'(t)S\bar{u}(t) + \bar{u}'(t)R\bar{u}(t)]$$

oppure

$$J_3 := \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T} \int_0^T [x'(t)Qx(t) + 2x'(t)S\bar{u}(t) + \bar{u}'(t)R\bar{u}(t)] dt \right]$$

dove le matrici Q, R, S soddisfano le equazioni (6.24). Dalle equazioni (6.25)–(6.27) segue che

$$J_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} E[z'(t)z(t)]$$

$$J_3 = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T} \int_0^T z'(t)z(t) dt \right]$$

e il sistema controllato è descritto da

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + Bu \quad (6.32)$$

$$z = Cx + Du \quad (6.33)$$

Il problema di controllo ottimo LQS consiste nel trovare un controllore della forma (6.30), (6.31) tale che il sistema ad anello chiuso sia asintoticamente stabile e J_2 o J_3 è minimizzato. Ancora risulta $J_2 = J_3$ che coincidono con il quadrato della norma in $\mathcal{H}_2$ della funzione di trasferimento da w a z .