Esercizi di Segnali e Sistemi.
GLI ESERCIZI 1,2,3,4,11 COSTITUISCONO UN TEMA D'ESAME TIPICO

Esempio 1 Consideriamo la funzione di trasferimento

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s} \\ 0 & \frac{1}{s} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Si calcoli la forma di Smith Mc-Millan.

Soluzione:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}N(s), \quad N(s) = \begin{bmatrix} s+1 & s & s+1 \\ 0 & s+1 & 2s(s+1) \\ 0 & -s(s+1) & s+1 \end{bmatrix}$$

Il massimo comun divisore di ordine 1 è $D_1(s) = 1$. Il polinomio $D_2(s)$ è il massimo comun divisore tra i polinomi:

$$\begin{aligned} &(s+1)^2 \\ &(s+1)(3s+1) \\ &(s+1)(2s^2 - s - 1) \end{aligned}$$

Risulta $D_2(s) = (s+1)$. Infine $D_3(s) = (s+1)^2(3s+1)$. Quindi

$$\begin{aligned} n_1(s) &= D_1(s)/D_0(s) = 1 \\ n_2(s) &= D_2(s)/D_1(s) = s+1 \\ n_3(s) &= D_3(s)/D_2(s) = (s+1)(3s+1) \end{aligned}$$

In conclusione

$$\tilde{N}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0) \\ 0 & 0 & (s+1)(3s+1) \end{bmatrix}$$

e quindi la forma di Smith-McMillan è:

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3s+1}{s} \end{bmatrix}$$

Quindi c'è un solo zero di trasmissione in $s = -1/3$.

Esempio 2 Si dimostri il teorema seguente

Il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

ha norma $\mathcal{H}_\infty$ minore di γ se e solo se la matrice

$$H = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2}BB' \\ -C'C & -A' \end{bmatrix}$$

non ha autovalori sull'asse immaginario.

Esempio 3 Si calcoli la norma $\mathcal{L}_2$ e la norma $\mathcal{L}_\infty$ della funzioe

$$G(s) = \frac{(s+1)}{(s-5)(s+5)}$$

Soluzione: Intanto si noti che:

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) := \frac{0.6}{(s-5)} + \frac{0.4}{(s+5)}$$

Queste due funzioni sono ortogonali e quindi $\|G(s)\|_2^2 = \|G_1(s)\|_2^2 + \|G_2(s)\|_2^2$ Inoltre $\|G_1(s)\|_2^2 = \|G_1(-s)\|_2^2$. Quindi le equazioni di Lyapunov relative a $G_1(-s)$ e $G_2(s)$ sono:

$$-10P_1 + 0.36 = 0, \quad -10P_2 + 0.16 = 0$$

Infine

$$\|G(s)\|_2^2 = P_1 + P_2 = 0.052$$

Per quanto riguarda la norma infinita, si ha

$$\|G(j\omega)\|^2 = \frac{\sqrt{\omega^2+1}}{\omega^2+25}$$

che ha punto di massimo per $\omega^2 = 23$, valore per il quale risulta $\|G(j\omega)\| = \sqrt{6}/24$, che è il valore della norma infinita.

Esempio 4 Si spieghi il perchè la γ entropia di una funzione $G(s)$ stabile e strettamente propria è maggiore della sua norma in $\mathcal{H}_2$.

Esempio 5 Con riferimento al sistema $\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$, $y(t) = 2x(t)$, si ricavi il massimo valore di picco (norma $\mathcal{L}_\infty[0\,\infty)$) della risposta temporale del sistema ad un ingresso integrabile a quadrato di norma unitaria.

Soluzione: Il valore è dato da $4p$ dove p risolve l'equazione di Lyapunov $-2p + 1 = 0$. Quindi il valore di picco massimo è 2.

Esempio 6 Si consideri il sistema dinamico $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ dove

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calcolare gli autovalori di A e dire se A è di Hurwitz o meno. Dire se il sistema è raggiungibile e, se possibile, assegnare gli autovalori del sistema nel punto -1, mediante un controllore dallo stato $u(t) = Kx(t)$.

Soluzione: Calcolando il determinante di

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda+2 & 3 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda+2 \end{bmatrix}$$

si ricava che il polinomio caratteristico di A è

$$\varphi_A(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda^2 - 4 + 3) = (\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-1),$$

da cui si deduce che gli autovalori di A sono -2, -1 e 1. La matrice A dunque non è Hurwitziana.
La matrice di raggiungibilità

$$K_r = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ha rango pieno. È possibile assegnare a piacere gli autovalori del sistema mediante un controllo $u(t) = Kx(t)$.
A tale proposito si noti che il polinomio caratteristico desiderato è $\varphi_{A+BK}(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$. Utilizzando la formula di Ackermann si ottiene

$$K = -[0 \quad 0 \quad 1] \cdot K_r^{-1} \cdot (A^3 + 3A^2 + 3A + 1).$$

L'inversa di K_r si ottiene facilmente

$$K_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e sostituendo si ottiene $K = [-1 \quad -4 \quad 1]$.

Esempio 7 Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcolare gli autovalori e gli zeri invarianti di tale sistema. Trovare la matrice di trasferimento di tale sistema e calcolare poi poli e zeri di trasmissione.

Soluzione: Gli autovalori della matrice A sono 0 e -1 (A è una matrice triangolare). Per calcolare gli zeri invarianti si consideri la matrice di sistema

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 1 & 1 \\ 1 & s+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$P(s)$ ha normalmente rango 3 tranne quando $s = 0$ e per $s = 1$ (in questo caso il rango della matrice è 2 in quanto vi sono solo due colonne linearmente indipendenti). Gli zeri invarianti del sistema quindi sono 0 e 1.
Per calcolare i poli e gli zeri di trasmissione, si consideri la matrice di trasferimento del sistema:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

In questo esercizio,

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \quad (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ \frac{-1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Sostituendo si ottiene

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s+1} & \frac{s-1}{s+1} \end{bmatrix}$$

che nella forma di McMillian-Smith diventa

$$\widetilde{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s+1} & 0 \end{bmatrix}$$

Vi è quindi un unico polo di trasmissione in -1 e un unico zero di trasmissione in 1.

Esempio 8 Con riferimento all'esempio precedente, dire se il sistema è raggiungibile e se è osservabile. Verificare l'osservabilità mediante il PBH-test.

Soluzione: La matrice di raggiungibilità

$$K_r = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ha rango pari a 2 da cui si deduce che il sistema in esame è raggiungibile.
Si noti che essendo gli zeri invarianti diversi dagli zeri di trasmissione il sistema non può essere osservabile, in quanto in quest'ultimo caso i due tipi di zeri dovrebbero coincidere. Verifichiamo la non osservabilità mediante il PBH-test.
Si consideri

$$\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & s+1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Per verificare la osservabilità occorre verificare che tale matrice non perda rango quando viene valutata negli autovalori di A. In questo caso per $s = 1$ il rango della matrice è 2, mentre per $s = 0$ il rango diventa 1. Questo conferma che il sistema non è osservabile. Inoltre 0 è autovalore della parte non osservabile del sistema.

Esempio 9 Con riferimento all'esempio precedente, si trovi analiticamente l'andamento nel tempo dell'uscita forzata $y_F(t)$ quando $u_1(t) = -te^{-t}$ e $u_2(t) = 1$ per $t > 0$.

Soluzione: Nel dominio di Laplace si ha $U_1(s) = \frac{-1}{(s+1)^2}$ e $U_2(s) = \frac{1}{s}$ da cui

$$Y_F(s) = G(s)U(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s+1} & \frac{s-1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{(s+1)^2} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \frac{s^3-1}{s(s+1)^3}.$$

Mediante lo sviluppo di Heaviside si ha

$$Y_F(s) = A + \frac{B}{(s+1)^3} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{s+1} + \frac{E}{s},$$

dove

$$\begin{aligned}
&A = \lim_{s\to\infty} \tfrac{s^3-1}{s(s+1)^3} = 0 \\
&B = \lim_{s\to-1} (s+1)^3 \tfrac{s^3-1}{s(s+1)^3} = \lim_{s\to-1} \tfrac{s^3-1}{s} = 2 \\
&C = \lim_{s\to-1} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \tfrac{s^3-1}{s} = \lim_{s\to-1} \tfrac{2s^3+1}{s^2} = -1 \\
&D = \lim_{s\to-1} \tfrac{1}{2} \tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} \tfrac{s^3-1}{s} = \lim_{s\to-1} \tfrac{s^4-s}{s^4} = 2 \\
&E = \lim_{s\to 0} s \tfrac{s^3-1}{s(s+1)^3} = -1.
\end{aligned}$$

In definitiva,

$$Y_F(s) = \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s},$$

da cui anti-trasformando

$$y_F(t) = 2t^2e^{-t} - te^{-t} + 2e^{-t} - 1, \quad t > 0.$$

Esempio 10 Si dica come si calcola la struttura degli zeri all'infinito di una matrice razionale proria $G(s)$.

Esempio 11 Si considerino le due funzioni di trasferimento

$$G(s) = \frac{1-s}{s+5}, \quad H(s) = \frac{1}{s+5}$$

Si ricavi il filtro ottimo in $\mathcal{H}_2$, cioè $F(s)$ stabile tale che la norma $\|F(s)G(s) - H(s)\|_2$ sia minimizzata.

Soluzione: La soluzione è:

$$F^{ott}(s) = (H(s)G^{\sim}(s)\hat{G}^{\sim}(s)^{-1})_{sta}\hat{G}(s)^{-1}$$

dove

$$\hat{G}(s) = \frac{s+1}{s+5}$$

è il fattore spettrale canonico. Risulta:

$$H(s)G^{\sim}(s)\hat{G}^{\sim}(s)^{-1} = \frac{1+s}{(1-s)(s+5)} = \frac{-1/3}{s-1} + \frac{-2/3}{s+5}$$

e quindi

$$(H(s)G^{\sim}(s)\hat{G}^{\sim}(s)^{-1})_{sta} = \frac{-2/3}{s+5}$$

Infine:

$$F^{ott}(s) = \frac{-2/3}{s+1}$$

Vediamo ora la soluzione in spazio di stato e consideriamo quindi il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -5x(t) + w(t) \\ y(t) &= 6x(t) - w(t) \\ \xi(t) &= x(t) \end{aligned}$$

Per costruzione si ha che $G(s)$ è la funzione di trasferimento da w a y e $H(s)$ quella da w a ξ. Il filtro ottimo si ottiene nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= -5\hat{x}(t) + L(C\hat{x}(t) - y(t)) \\ \hat{\xi}(t) &= \hat{x}(t) \end{aligned}$$

dove

$$L = -6P + 1$$

e P è la soluzione stabilizzante di

$$-10P - (36P^2 + 1 - 12P) + 1 = 0$$

Si ha $P = 1/18$ e $L = 2/3$, e quindi la funzione di trasferimento da y a $\hat{\xi}$, che è il filtro ottimo, risulta

$$F^{ott}(s) = \frac{-2/3}{s+1}$$

che, ovviamente, coincide con quella ricavata in precedenza.

Esempio 12 Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = (A + L\Delta N)x(t)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \end{bmatrix}, \quad N = I$$

Si dimostri che A è di Hurwitz. Si trovi valore superiore della norma di Δ tale che $A + L\Delta N$ è Hurwitz. Si confronti poi questa norma con il raggio complesso di stabilità.

Soluzione: Il fatto di essere A di Hurwitz segue da: $det[\lambda I - A] = \lambda^2 + 4\lambda + 7{=}0$. Poi:

$$A + L\Delta N = \begin{bmatrix} -1+\delta_1 & 2+\delta_2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},$$

e

$$det[\lambda I - A - L\Delta N] = \lambda^2 + (4-\delta_1)\lambda + 7 - 3\delta_1 + 2\delta_2$$

Quindi si ha stabilità per

$$\delta_1 < 4, \quad \delta_2 > 1.5\delta_1 - 3.5$$

Il valore superiore del raggio per cui si conserva la stabilità si trova intersecando le due rette:

$$\delta_2 > 1.5\delta_1 - 3.5, \quad \delta_2 = -2/3\delta_1$$

e quindi

$$\delta_1 = 21/13, \quad \delta_2 = -14/13$$

col che il raggio reale di stabilità è:

$$\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2} = \frac{\sqrt{637}}{13} = 1.9415$$

Il raggio complesso di stabilità è invece:

$$\frac{1}{\|N(sI-A)^{-1}L\|_\infty}$$

Sia allora $G(s) = N(sI-A)^{-1}L$. Si ha

$$G(s) = \begin{bmatrix} s+3 \\ -2 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2+4s+7}$$

Quindi

$$G^\sim(s)G(s) = \frac{13-s^2}{(s^2+4s+7)(s^2-4s+7)}$$

Allora

$$\|G(s)\|_\infty = \|\frac{\sqrt{13}+s}{s^2+4s+7}\|_\infty = 0.519$$

Il raggio complesso di stabilità è dunque

$$\frac{1}{1.1232} = 1.9269 < 1.9415$$

Esempio 13 Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si calcoli

$$J = \int_0^\infty y(t)'y(t)dt$$

Soluzione: Si ha

$$J = x(0)' \int_0^\infty e^{A't}C'Ce^{At}dtx(0) = x(0)'Px(0)$$

dove

$$A'P + PA + C'C = 0$$

Quindi

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

e

$$J = 2.5$$

Esempio 14 Si calcoli la norma $\mathcal{L}_2$ della funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)^2}$$

Soluzione: Si ha

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{1/9}{s-1} + \frac{7/9 + s/3}{(s+2)^2}$$

e quindi

$$\|G(s)\|_2^2 = \|\frac{7/9 + s/3}{(s+2)^2}\|_2^2 + \|\frac{1/9}{(s+1)^2}\|_2^2$$

Allora sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 7/9 & 1/3 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\|G_1(s)\|_2^2 = trace[B'PB], \quad A'P + PA + C'C = 0$$

Si ha:

$$P = \begin{bmatrix} 0.1744 & 0.0756 \\ 0.0756 & 0.0328 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\|G_1(s)\|_2^2 = 0.0328$$

Inoltre, per quanto riguarda $G_2(s)$ si ha che

$$\|G_2(s)\|_2^2 = p/81, \quad -2p + 1 = 0$$

Quindi

$$\|G_2(s)\|_2^2 = 1/162$$

e

$$\|G(s)\|_2^2 = 0.0328 + 0.0062 = 0.039$$

Esempio 15 Si definisca la γ-entropia di una funzione di trasferimento $G(s)$ specificando le condizioni di esistenza. Si spieghi perchè la γ-entropia è non inferiore alla norma $\mathcal{H}_2$ di $G(s)$.

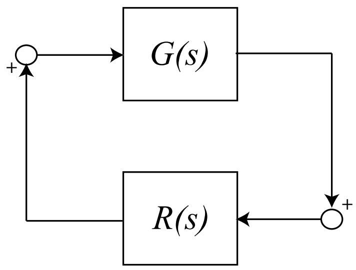

Figura 1: Retroazione

Esempio 16 Si consideri il sistema dinamico avente funzione di trasferimento $G(s) = \frac{s+2}{s^2-1}$. Tale sistema è connesso in retroazione ad un controllore $C(s)$ come in figura 1. Si trovi un controllore $C(s)$ che stabilizzi $G(s)$ e successivamente si trovi la classe di tutti i controllori stabilizzanti $G(s)$.

Soluzione: $G(s)$ può essere fattorizzata come:

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-1)} = \frac{1}{s+1} \cdot \left[\frac{s-1}{s+2}\right]^{-1} = N(s) \cdot M(s)^{-1}$$

Si consideri l'equazione Diofantina

$$X(s)M(s) + Y(s)N(s) = X(s) \cdot \frac{s-1}{s+2} + Y(s) \cdot \frac{1}{s+1} = 1.$$

Si noti che $M(s) + N(s) = \frac{s^2+s+1}{s^2+3s+1}$ dove sia quest'ultima funzione di trasferimento che la sua inversa appartengono a $\mathcal{RH}_\infty$. Scegliendo quindi

$$X(s) = Y(s) = \frac{s^2+3s+1}{s^2+s+1}$$

si ottiene una soluzione in $\mathcal{RH}_\infty$ dell'equazione Diofantina di cui sopra cosicchè

$$C(s) = -Y(s) \cdot X(s)^{-1} = -1.$$

In effetti, andando a considerare il polinomio caratteristico dello schema in retroazione in figura si ha

$$\Delta(s) = D_G(s)D_C(s) - N_G(s)N_C(s) = s^2 - 1 - (-1) \cdot (s+2) = s^2 + s + 1,$$

le cui radici hanno effettivamente parte reale strettamente minore di 0.
La parametrizzazione di tutti i controllori stabilizzanti è

$$K(s) = \frac{-Y(s) + M(s)Q(s)}{X(s) + N(s)Q(s)} = \frac{-\frac{s^2+3s+1}{s^2+s+1} + \frac{s-1}{s+2} \cdot Q(s)}{\frac{s^2+3s+1}{s^2+s+1} + \frac{1}{s+1} \cdot Q(s)}, \quad Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty.$$

Vale la pena di notare che la soluzione dell'equazione Diofantina non è unica. Difatti scegliendo

$$X(s) = \frac{s+3}{s+1}, \quad Y(s) = \frac{s+5}{s+2}$$

si ottiene ancora una soluzione in $\mathcal{RH}_\infty$. Tale soluzione porta al controllore

$$\widetilde{C}(s) = -\frac{s+5}{s+2} \cdot \frac{s+1}{s+3},$$

anch'esso stabilizzante, come si può facilmente verificare andando a calcolare le radici del polinomio caratteristico del sistema in retroazione.

Esempio 17 Si consideri la seguente funzione di trasferimento $G(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha}$ dove $\alpha \in (0, \infty)$. Si calcoli $\|G(s)\|_\infty$ in funzione di α, mediante l'equazione di Riccati per la norma $\mathcal{H}_\infty$. Si dica poi per quali valori di α si ottiene $\|G(s)\|_\infty < \|G(s)\|_2$

Soluzione: Una realizzazione di $G(s)$ è data da $A = -\alpha$, $B = 1$, $C = \alpha$ e $D = 0$. L'equazioni di Riccati in questione è

$$A'P + PA + \frac{1}{\gamma^2} PBB'P + C'C = -2\alpha P + \frac{P^2}{\gamma^2} + \alpha^2 = 0$$

che ammette soluzione

$$P = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{\gamma^2}} = \alpha \pm \alpha \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}.$$

La matrice

$$\widehat{A} = A + BB'P = -\alpha + \alpha \pm \alpha \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \pm \alpha \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$$

è di Hurwitz solo per la soluzione $P = \alpha - \alpha\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$ e quando $\gamma > 1$.
Di conseguenza $\|G(s)\|_\infty < \gamma$, $\forall \gamma > 1$ e quindi $\|G(s)\|_\infty = 1$.

Dall'equazione di Lyapunov

$$A'Q + QA + CC' = -2\alpha Q + \alpha^2 = 0$$

Si ricava $Q = \frac{\alpha}{2}$ e di conseguenza

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\mathrm{tr}[B'QB]} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}$$

Quindi

$$\|G(s)\|_\infty < \|G(s)\|_2 \iff 1 < \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \iff \alpha > 2.$$