SEGNALI E SISTEMI

(Prof. P. Colaneri)

PROVA del 04-05-2004

*Da compilarsi **a penna** prima di iniziare la prova d'esame.*

Cognome .... Nome ....

Nato/a a .... il .... Matricola ....

....

(Firma)

SEGNALI E SISTEMI – 4 Maggio 2004

Si risolva il maggior numero possibile di esercizi a scelta tra quelli qui di seguito.

1. Si calcoli la norma L_2 e L_∞ della matrice di trasferimento:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} \\ \dfrac{10}{s-2} \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE

Si scrive:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} \\ \dfrac{10}{s-2} \end{bmatrix} = G_1(s) + G_2(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{10}{s-2} \end{bmatrix}$$

Quindi $\|G(s)\|_2^2 = \|G_1(s)\|_2^2 + \|G_2(-s)\|_2^2$. Allora

$$\|G_1(s)\|_2^2 = P, \quad -2P+1=0, \quad \|G_2(s)\|_2^2 = P, \quad -4P+100=0 \rightarrow \|G(s)\|_2^2 = 25.5$$

Per quanto riguarda la norma infinita, si ha

$G(-jw)'G(jw) = \dfrac{1}{1+w^2} + \dfrac{100}{4+w^2}$ il cui massimo si ha per $\omega=0$, cioè $\|G_2(s)\|_\infty^2 = 26$

2. Sia

$$G(s) = \frac{s-3}{s+1}, \quad H(s) = \frac{1}{s+2}$$

Si ricavi F(s) in H_∞ tale che H(s)-G(s)F(s) sia in H_∞ e $\|H(s)-G(s)F(s)\|_2$ sia minimizzata (Filtro ottimo H_2).

SOLUZIONE

Il fattore spettrale canonico di G(s) è $\hat{G}(s) = \dfrac{s+3}{s+1}$. Quindi

$$F(s) = [H(s)G^{\sim}(s)\hat{G}^{\sim}(s)^{-1}]_{st}\hat{G}(s)^{-1} = [\frac{1}{(s+2)}\frac{(s+3)}{(s-1)}\frac{(1-s)}{(3-s)}]_{st}\frac{s+1}{s+3} =$$

$$= [\frac{1}{(s+2)}\frac{3+s}{(s-3)}]_{st}\frac{s+1}{s+3} = \frac{-0.2(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

3. Si consideri la coppia (A,B) e si ricavi l'insieme delle matrici K tali che (A+BK) è Hurwitz. Si dimostri in che modo tale insieme possa essere riparametrizzato in un insieme convesso.

SOLUZIONE

A+BK è Hurwitz se e solo se esiste P>0 tale che

$(A+BK)P+P(A+BK)'<0$

Ponendo W=KP si ha

$AP+PA' +BW+W'B'<0$

L'insieme (P,W) con P>0 è un insieme convesso e genera $K=WP^{-1}$.

4. Si dica in che cosa consiste il problema della fattorizzazione spettrale e come si trova un fattore spettrale canonico a partire da uno spettro dato.

SOLUZIONE

Dato lo spettro $\Gamma(s)$ con $\Gamma(\infty)>0$ e $\Gamma^{\sim}(s)=\Gamma(s)$ si deve trovare un sistema quadrato G(s) stabile con inversa stabile tale che $G^{\sim}(s)G(s)=\Gamma(s)$. Si può dimostrare che G(s) si può trovare attraverso la ricerca della soluzione stabilizzante dell'equazione di Riccati associata alla matrice Hamiltoniana, matrice dinamica del sistema $\Gamma(s)^{-1}=[\Gamma_1(s)+\Gamma_1^{\sim}(s)+\Gamma(\infty)]^{-1}$, dove $\Gamma_1(s)$ è la parte stabile e strettamente propria di $\Gamma(s)$.

5. Si consideri un sistema dinamico descritto dalle matrici:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix},\quad D=0$$

5.1 Si verifichi che il sistema è in forma minima.
5.2 Si trovi K tale che A+BK sia Hurwitz.
5.3 Si trovi L tale che A+LC sia Hurwitz.
5.4 Si trovi la funzione di trasferimento del regolatore dinamico dall'uscita formato dal ricostruttore dello stato e dalla legge di controllo teste' trovati. Si dica quali sono gli autovalori del sistema complessivo (sistema + regolatore).

SOLUZIONE

La funzione di trasferimento del regolatore è:

$$C(s)=-K(sI-A-LC-BK)^{-1}L$$

Ad esempio si può prendere $K = \begin{bmatrix} -2 & -5 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$ e si ha:

$$C(s) = -K(sI - A - LC - BK)^{-1}L = \frac{-8-20s}{s^2+8s-4}$$

6. Si spieghi perché e come la matrice Hamiltoniana

$$H = \begin{bmatrix} A & BB' \\ -C'C & -A' \end{bmatrix}$$

è associata alla norma $\left\| C(sI-A)^{-1}B \right\|_\infty$

SOLUZIONE

Ponendo $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$ si ha che la matrice H è la matrice dinamica del sistema retroazionato $(I-G(s)G^{\sim}(s))^{-1}$. Quindi H non ha autovalori sull'asse immaginario se e solo se la norma infinita di G(s) è minore di uno.

7. Si calcolino gli zeri invarianti del sistema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE

Il sistema è raggiungibile ed osservabile. Gli zeri invarianti coincidono con quelli di trasmissione. Quindi:

$$G(s) = \frac{1}{s^2-3s-2}\begin{bmatrix} s-2 \\ s(s-2) \end{bmatrix}.$$

Quindi c'è un solo zero di trasmissione (un solo zero invariante) in s=2.